

# VERS LA SIMULATION MULTI-ÉCHELLE D'ORDRE ÉLEVÉ DES ÉCOULEMENTS CAPILLAIRES

Eléonore Gauci

sous la direction d'Alain Dervieux

Université de Nice Sophia-Antipolis, le 13 juin 2014



1. Motivation industrielle
2. Un cas test
  - a. Etude analytique
  - b. Calculs avec ANANAS
3. Nouvelle approximation de la solution
4. Analyse d'erreur

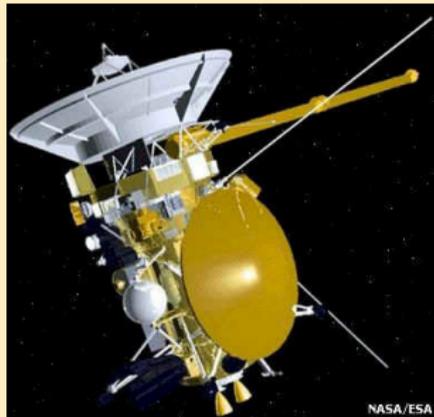


FIGURE : Sonde spatiale Cassini

## Application :

Mouvement de combustible dans les réservoirs spatiaux.

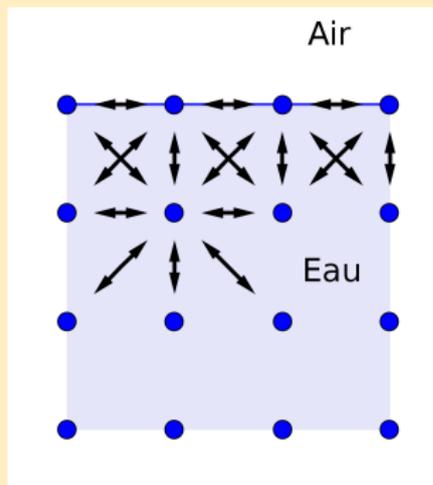


FIGURE : Forces de Van der Waals et tension superficielle



FIGURE : La sphère est la surface d'énergie de tension superficielle minimale

# Calcul Lemma : sonde Cassini



# Equation de Navier-Stokes avec capillarité

$$\begin{cases} (\rho(\phi)\mathbf{U})_t - \operatorname{div}(\rho(\phi)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \nu \Delta \mathbf{U} + \nabla p = \rho(\phi)\mathbf{g} + \sigma \kappa \delta_\phi \mathbf{n} \\ \operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0 \\ \phi_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

où :

$\mathbf{U}(x, y, t)$  : vecteur vitesse du fluide ( $m.s^{-1}$ )

$\phi$  : fonction Level Set

$\rho(\phi)$  : masse volumique du fluide = fonction Heavyside de  $\phi$

$p(x, y, t)$  : pression ( $Pa$ )

$\mathbf{g}$  : vecteur d'accélération gravitationnelle ( $m.s^{-2}$ )

$\sigma$  : coefficient de tension surfacique ( $N.m^{-1}$ )

$\kappa(x, y, t) = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi(x, y, t)}{|\nabla \phi(x, y, t)|} \right)$  : courbure locale ( $m^{-1}$ )

$\nu > 0$  : coefficient de viscosité dynamique ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )

$\mathbf{n}$  : normale extérieure

$\delta_\phi$  : fonction de Dirac des valeurs de  $\phi$

$$R(\theta, t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(t) P_j(\cos \theta) \right]$$

où  $P_j(\cos \theta)$  : sont les  $j$ -ièmes polynômes de Legendre  
 $R_0$  : est le rayon de la goutte non perturbée (en pointillés)

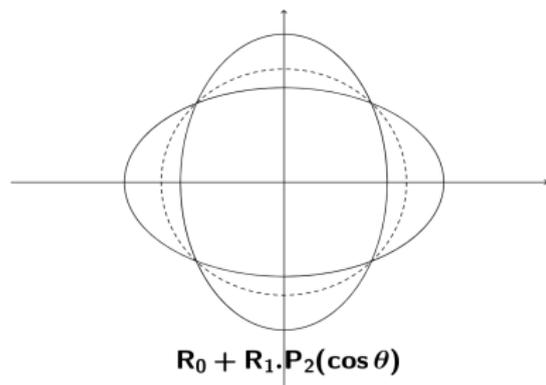


FIGURE : Mode propre fondamental d'une goutte d'eau

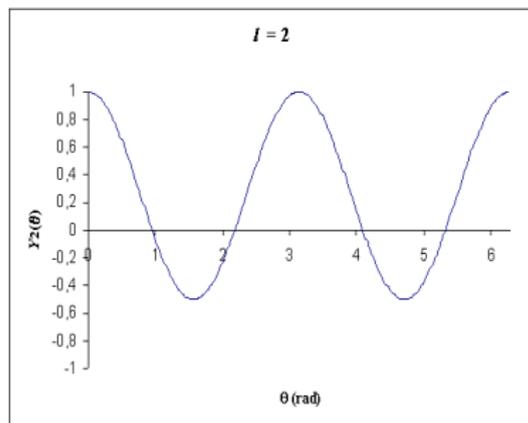
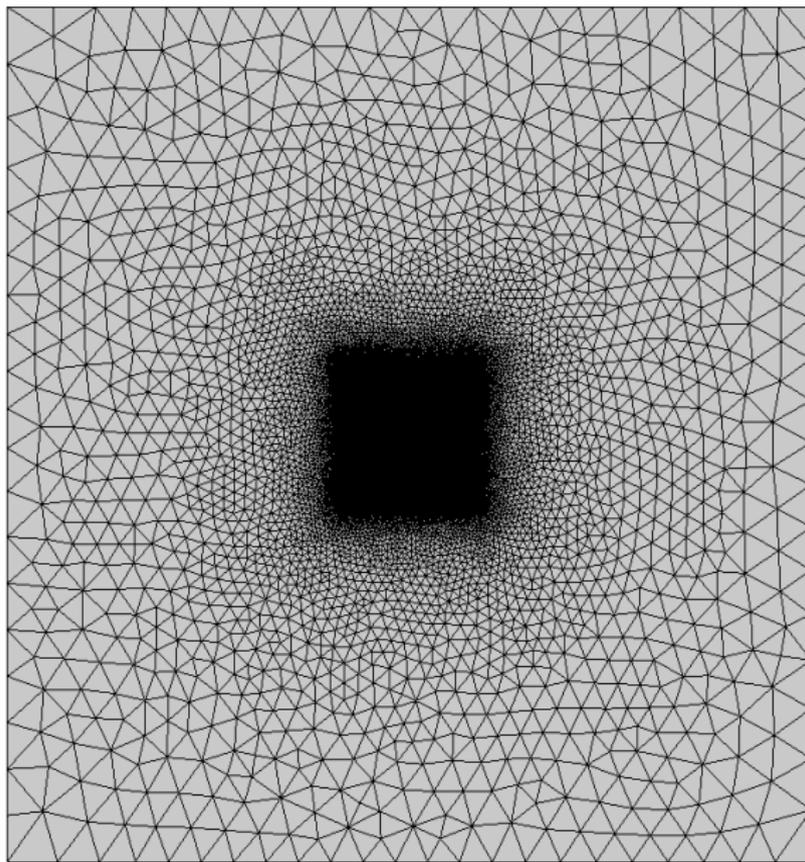
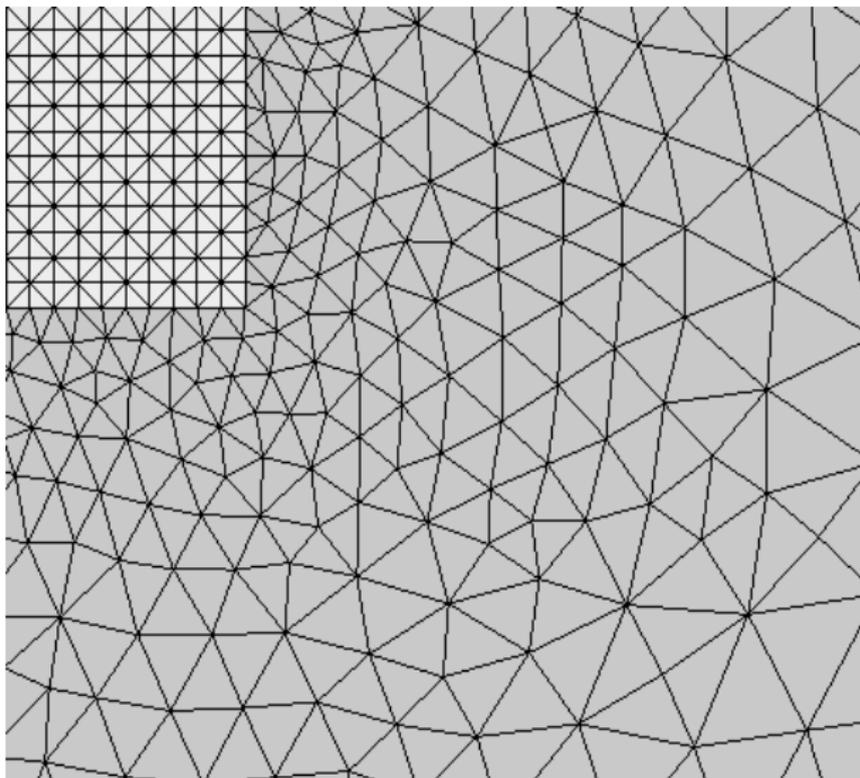


FIGURE : fonction

# Maillage (2D) : Maillage entier



# Maillage (2D) : Détail du maillage



# Initialisation de la Level Set

## Définition

La Level Set est une distance à l'interface signée  $\phi(x, t)$  :

- $\phi < 0$  dans le gaz
- $\phi = 0$  à l'interface
- $\phi > 0$  dans le liquide

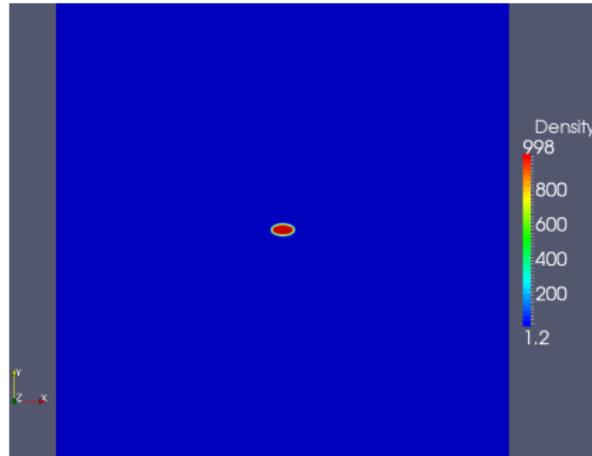


FIGURE : Masse volumique  $\rho = H_\phi$

Vitesse initiale :  $0 \text{ m.s}^{-1}$

Masse volumique de la goutte d'eau :  $998 \text{ kg.m}^{-3}$

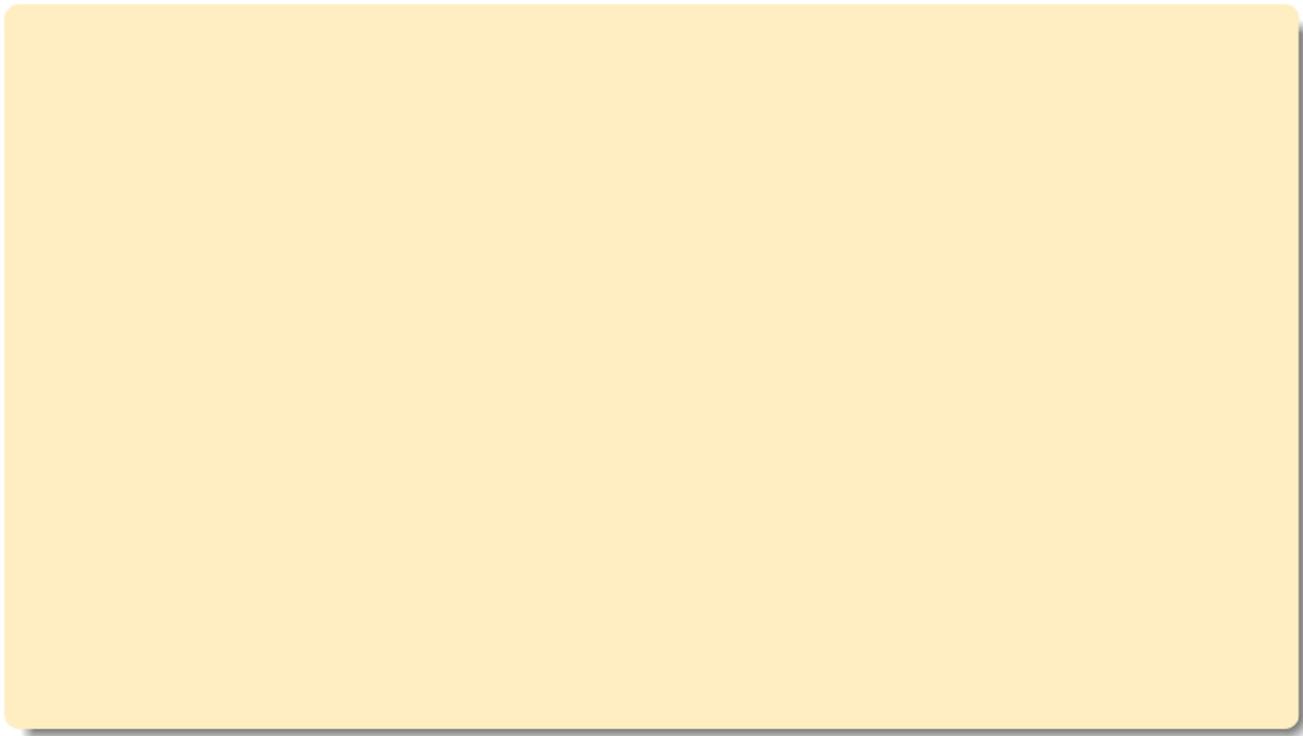
Masse volumique de l'air :  $1.2 \text{ kg.m}^{-3}$

Tension superficielle de l'eau en contact avec l'air  $\sigma$  :  $0.07 \text{ N.m}^{-1}$

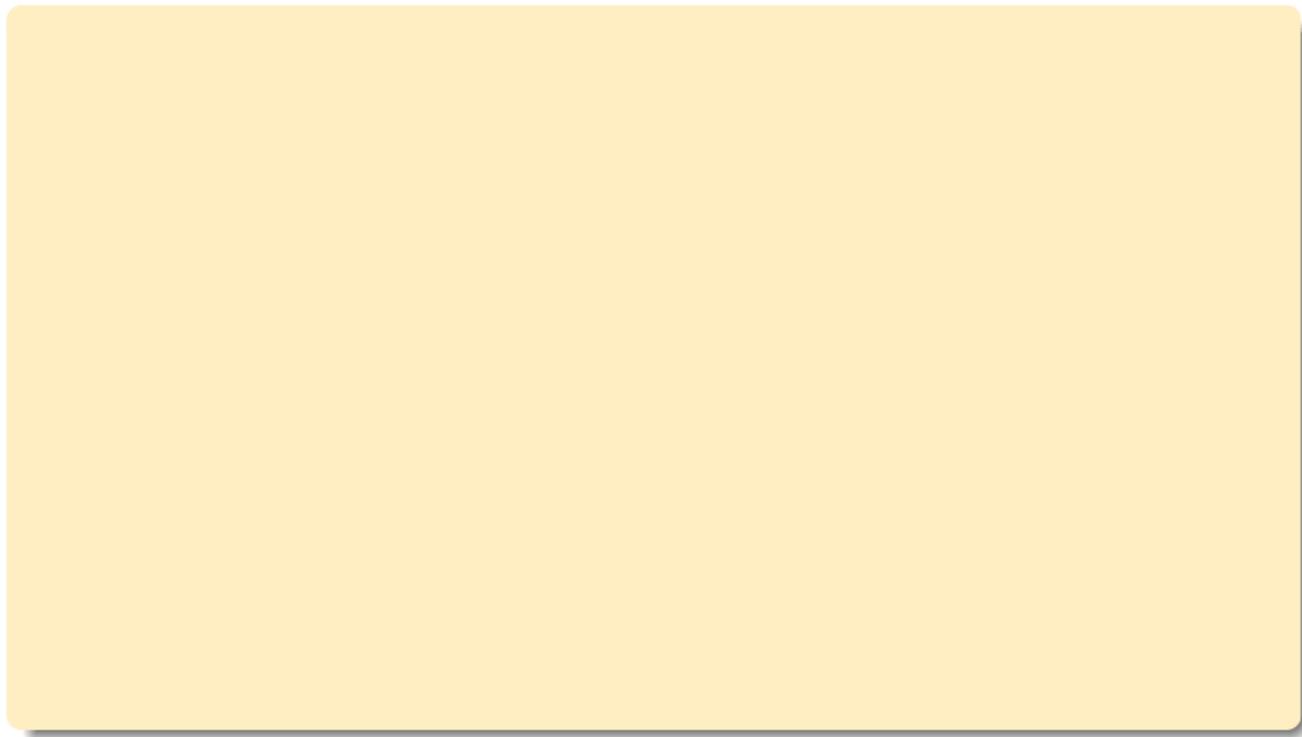
$\mathbf{g}$  :  $0 \text{ m.s}^{-2}$

$\mathbf{v}$  :  $0 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

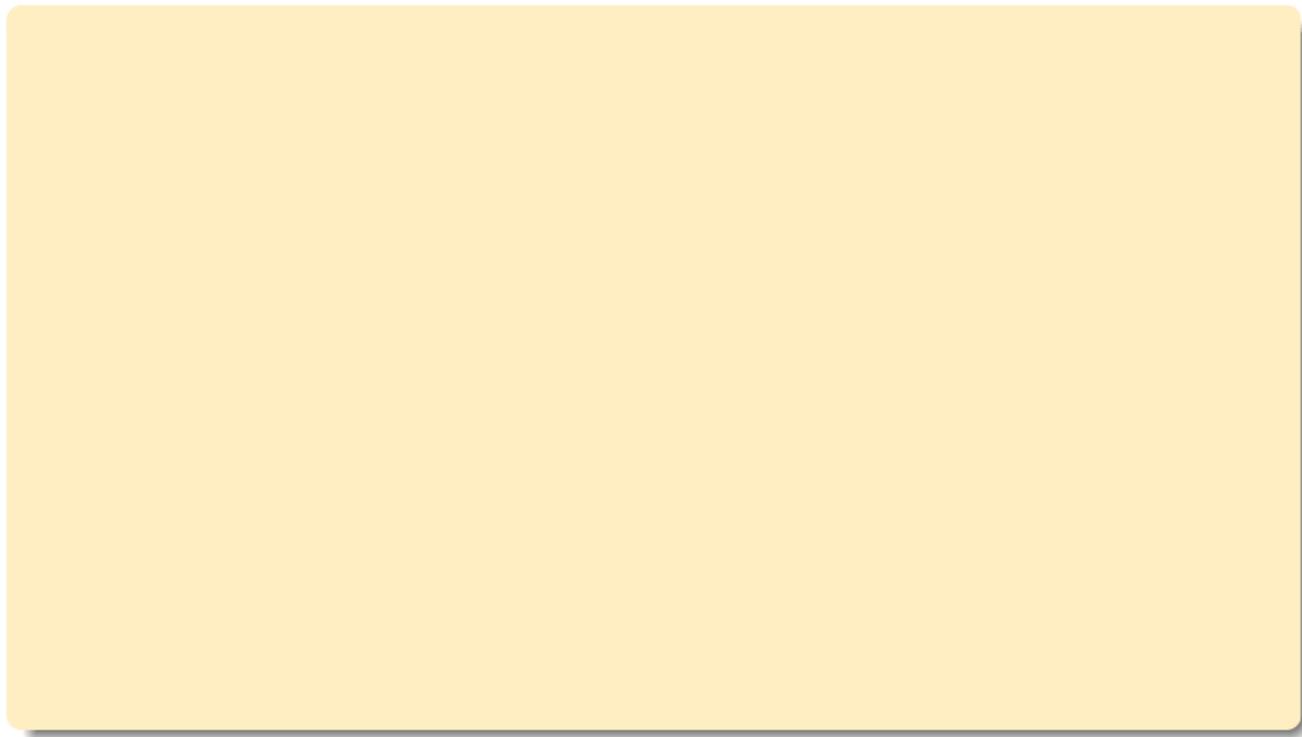
# Visualisation de la masse volumique du multifluide



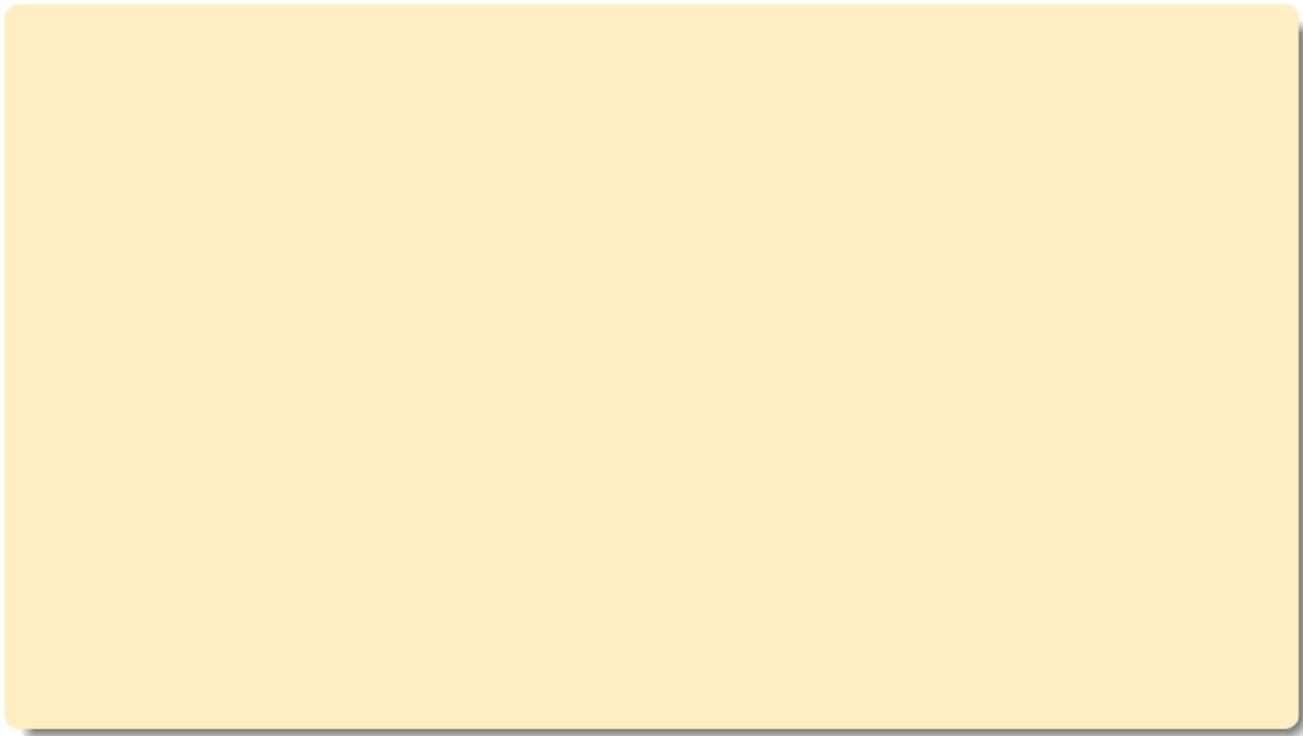
# Visualisation de la norme de la vitesse du multifluide



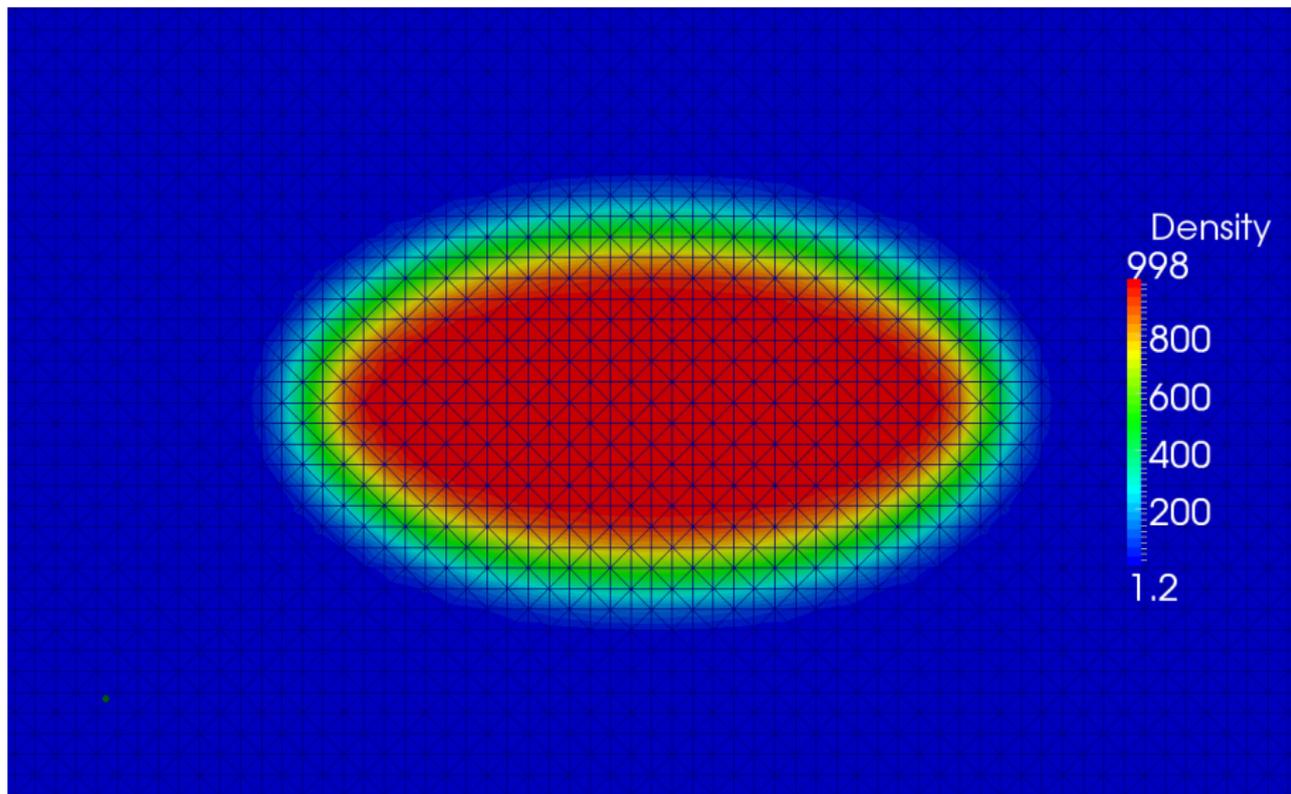
# Visualisation de la pression du multifluide



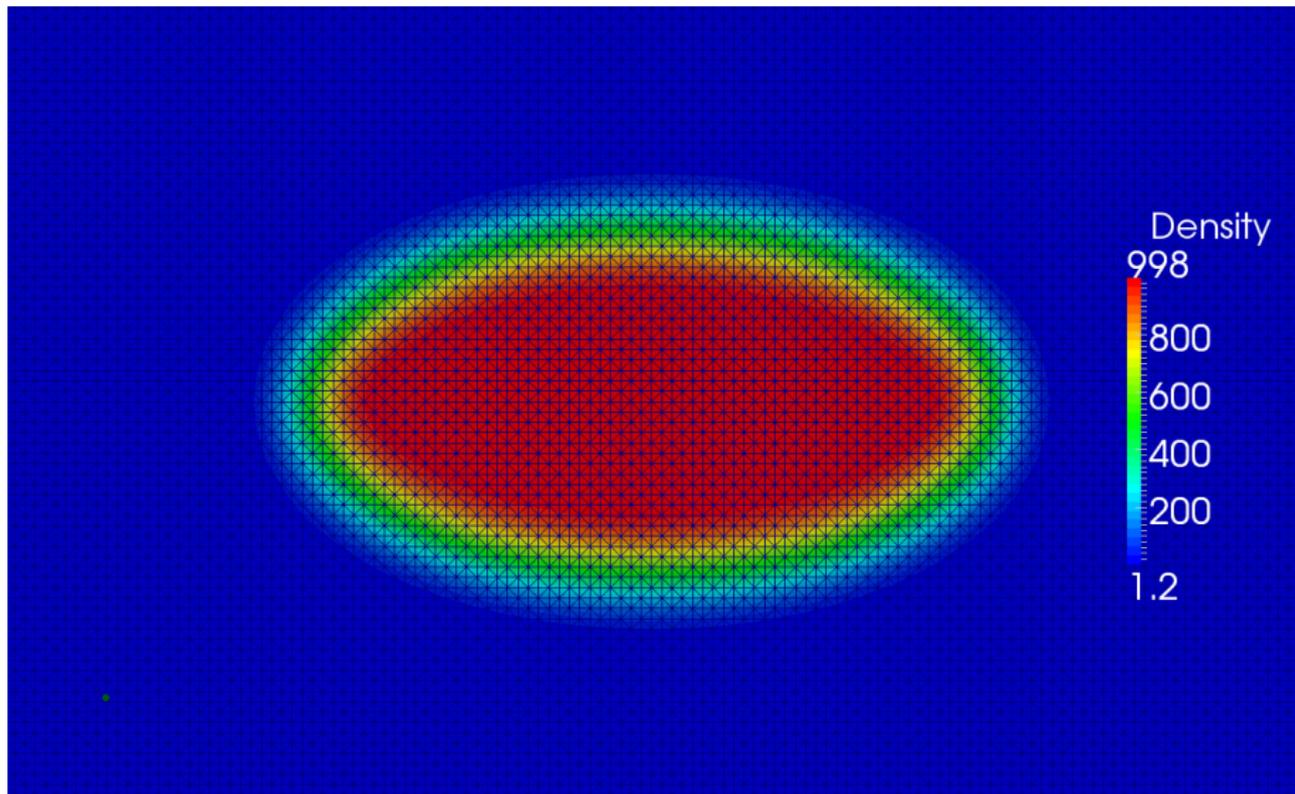
# Visualisation de la courbure dans la goutte d'eau



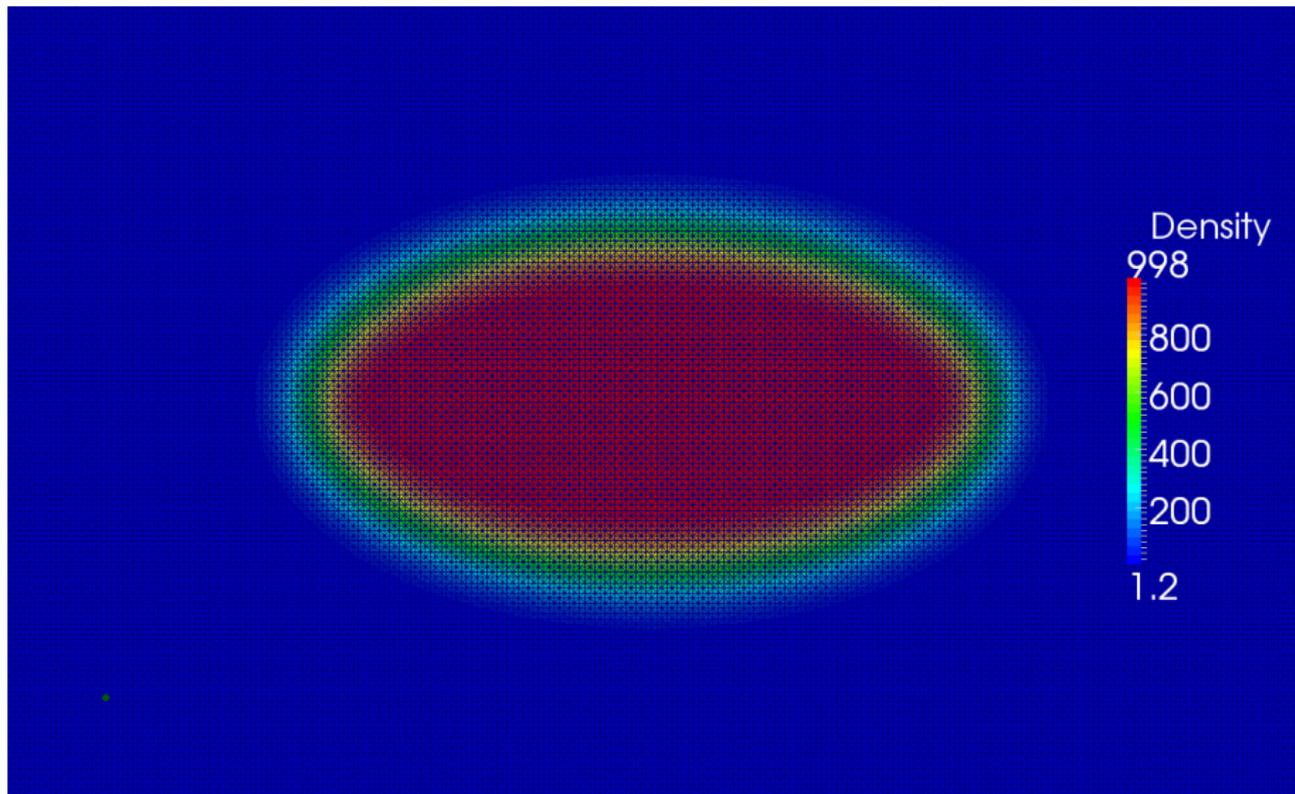
# Convergence en maillage : Maillage grossier



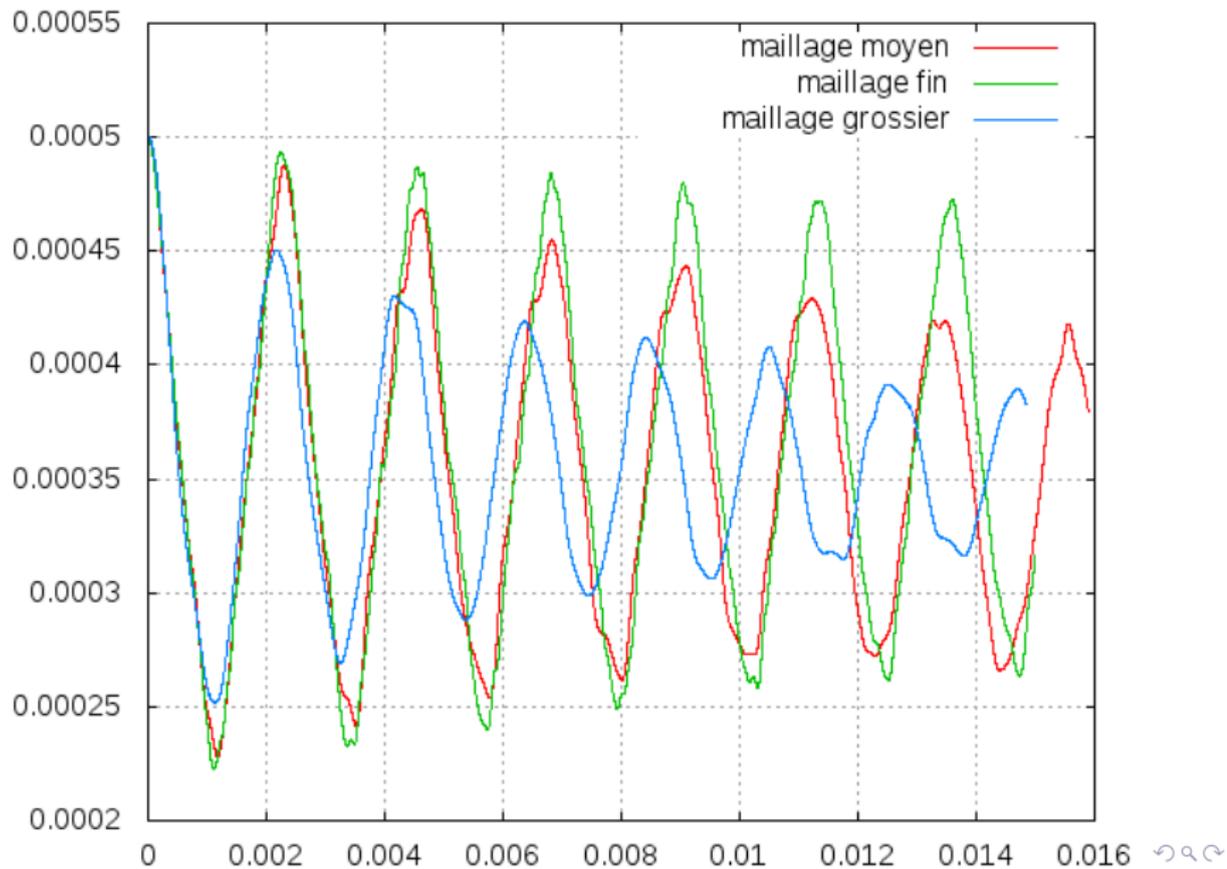
# Convergence en maillage : Maillage moyen



# Convergence en maillage : Maillage fin



# Convergence en maillage



# Convergence en maillage : tableau d'interprétation

	Instant initial	1ère oscillation	2e oscillation	3e oscillation
Maillage fin	$5.0.10^{-4}$	$4.95.10^{-4}$	$4.85.10^{-4}$	$4.8.10^{-4}$
Maillage moyen $\ \psi_h - \psi_{2h}\ $	$5.0.10^{-4}$	$4.86.10^{-4}$ $0.09.10^{-4}$	$4.7.10^{-4}$ $0.15.10^{-4}$	$4.6.10^{-4}$ $0.2.10^{-4}$
Maillage grossier $\ \psi_{2h} - \psi_{4h}\ $	$5.0.10^{-4}$	$4.5.10^{-4}$ $0.36.10^{-4}$	$4.23.10^{-4}$ $0.47.10^{-4}$	$4.1.10^{-4}$ $0.5.10^{-4}$
Ordre numérique		2	1.65	1.32

TABLE : Convergence de maillage

# Courbure et convergence en maillage

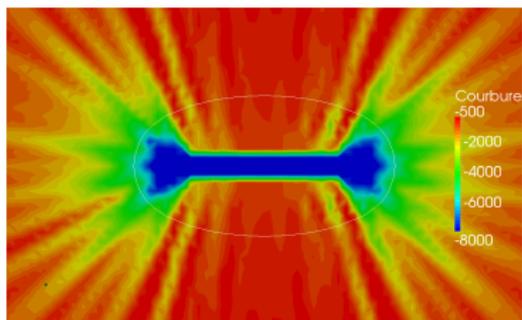


FIGURE : maillage grossier

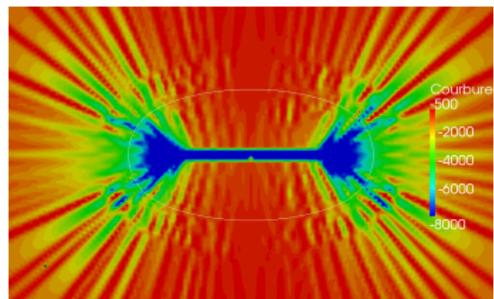


FIGURE : maillage moyen

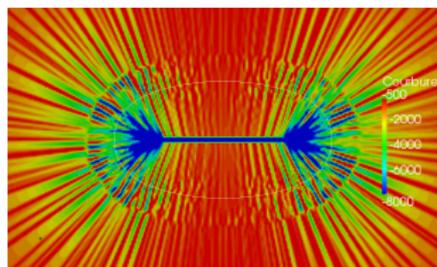


FIGURE : maillage fin

# Premières conclusions et objectifs

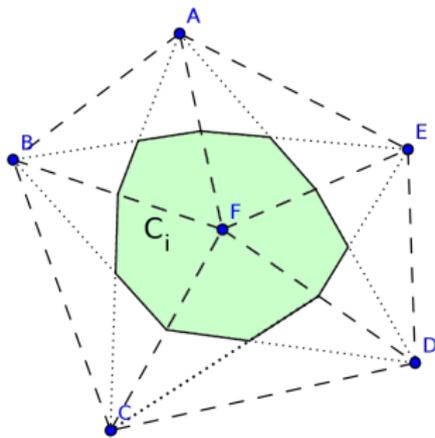
- Bonne convergence à l'ordre 2.
  - Mauvaise convergence des termes de capillarité.
- 
- Obtenir un schéma plus précis (schéma à l'ordre 3).
  - Proposer un critère d'adaptation basée sur l'erreur

Equation de convection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}u) - \nu \operatorname{div} \nabla u = 0,$$

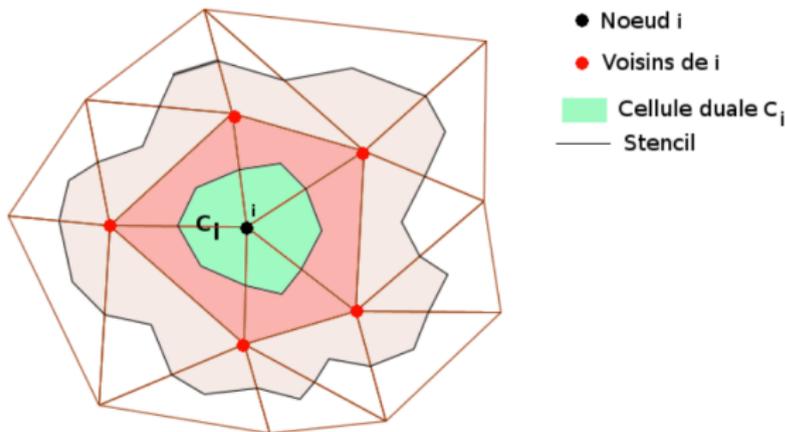
# Schéma CENO

- Discrétisation du domaine.
- Construction du maillage dual.
- Formule variationnelle.
- Obtention d'une équation discrétisée en temps et en espace



# Reconstruction quadratique [Harten]

- Définition du Stencil de reconstruction.
- Reconstruction de la solution par une fonction quadratique dans chaque cellule en utilisant une méthode de moindres carrés.
- Définition des flux numériques de flux (ici des flux de gradients centrés).



## Lemme

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \left[ c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] dx + \frac{1}{\Delta x} \left[ (\Gamma(x_{i+\frac{1}{2}}) - \Gamma(x_{i-\frac{1}{2}})) \right. \\ & \left. + (\phi(x_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(x_{i-\frac{1}{2}})) \right] = -v \frac{7}{24} u_i^{(4)} (\Delta x)^2 - c \frac{803}{7680} u_i^{(4)} (\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4) \end{aligned}$$

# Définition de la métrique

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(\mathbf{x})\Lambda(\mathbf{x})^t\mathcal{R}(\mathbf{x})$$

où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_\beta^2} \end{pmatrix}$$

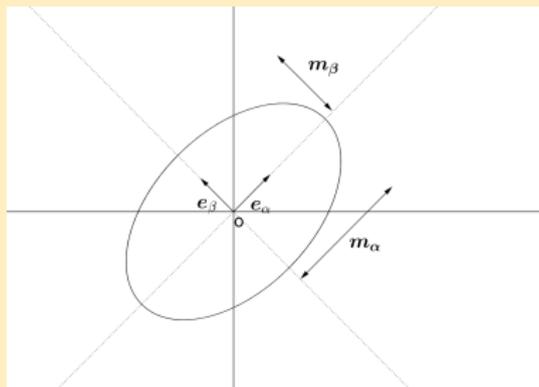


FIGURE : Boule unité

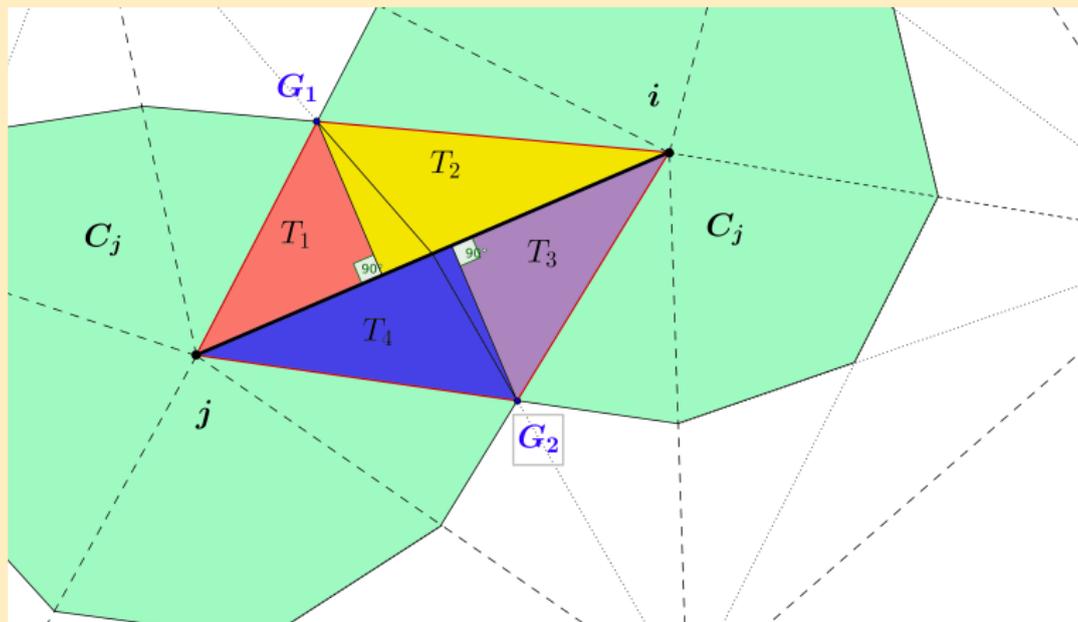


FIGURE : Analyse d'erreur

Pour la partie advection :

## Théorème 1

$$|\delta j| \approx |B(R_2^0 \pi_0 u - u, u_0^*)| \approx K \int_{\Omega} |\nabla u^*| |D^3 u(\delta x)^3| d\Omega$$

Et pour la partie diffusion :

## Théorème 2

$$|\delta j| \approx |B(R_2^0 \pi_0 u - u, u_0^*)| \approx K \int_{\Omega} |\nabla u^*| |D^4 u(\delta x)^2| d\Omega$$

Cette analyse d'erreur s'étend aux équations de Navier Stokes

$$\begin{cases} (\rho(\phi)\mathbf{U})_t + \operatorname{div}(\rho(\phi)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \nu\Delta\mathbf{U} = \rho(\phi)\mathbf{g} + \sigma\kappa\delta_\phi\mathbf{n} & \mathbf{(1)} \\ \operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0 \\ \phi_t + \mathbf{U} \cdot \nabla\phi = 0 & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Le théorème 1 nous donne une approximation de l'erreur de  $\mathbf{U}$  dans l'équation **(1)** à l'ordre 2.

Le théorème 2 nous donne une approximation de l'erreur de  $\phi$  dans l'équation **(2)** à l'ordre 3.

## Conclusion

- Schéma quadratique précis à l'ordre 2 en diffusion-convection.
- Analyse d'erreur en vue d'adaptation.

## Perspectives

- Modification de l'équation d'advection de Level Set à l'ordre 3.
- Mise en place du critère d'ordre 3 pour l'adaptation.

**Merci de votre attention !**