



Le maillage pour tous

Eléonore GAUCI

Directeurs de thèse : Alain Dervieux et Frédéric Alauzet

Séminaire des doctorants Henri Lebesgue 2015
28-30 2015, Nantes



- But : Modéliser une **interaction fluide-structure**.

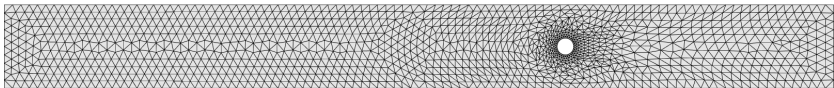
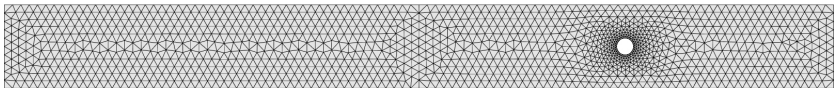


PRINCIPE DE LA SIMULATION NUMÉRIQUE :



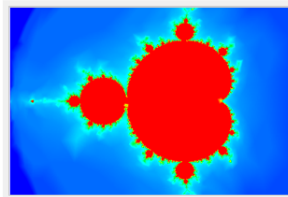
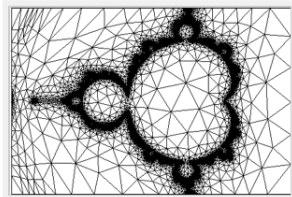
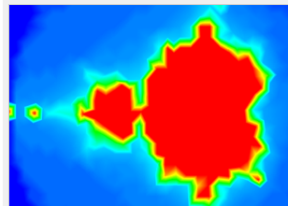
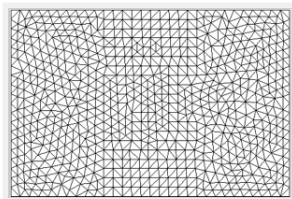
MAILLAGE :

- besoin de modéliser le mouvement
⇒ **besoin de déplacer le maillage.**



MAILLAGE

- besoin de capturer certains détails
⇒ **besoin d'adapter le maillage.**



1/ Généralités sur la simulation numérique

2/ L'ALE : une théorie de maillage mobile

3/ Théorie du maillage adaptatif

4/ Maillage adaptatif basé hessien

5/ Aperçu de de mon travail de thèse

Généralités sur la simulation numérique

Résoudre une EDP numériquement demande de discrétiser le problème continu :

- en temps
- en espace

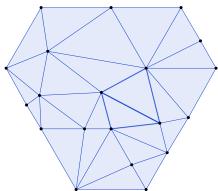


FIGURE: *conforme et non structuré*

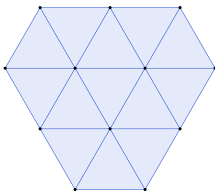


FIGURE: *conforme et structuré*

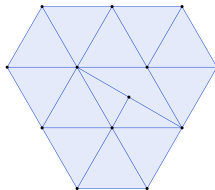


FIGURE: *non conforme*

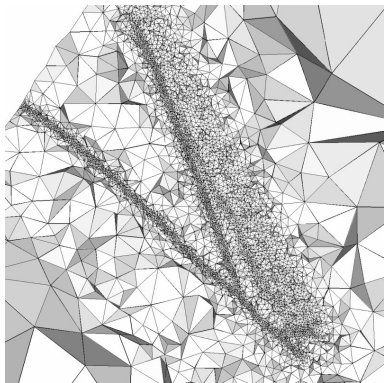


FIGURE: *maillage isotrope*

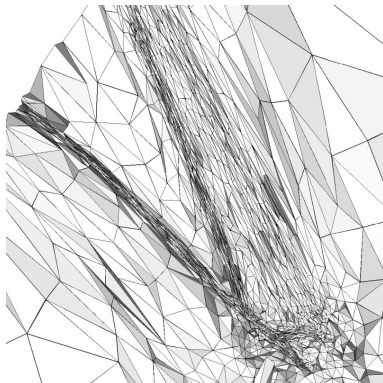


FIGURE: *maillage anisotrope*

- Maillage de calcul $\neq$ Maillage pour image de synthèse

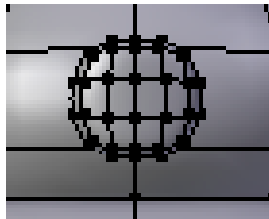
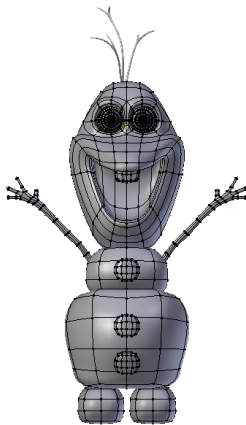


FIGURE: *Détails bouton*

FIGURE: *Célèbre personnage*

FIGURE: *Modélisation 3D*

- Difficultés du maillage

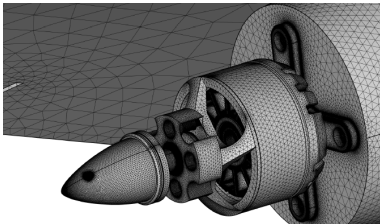


FIGURE: *Maillage de surface un solide complexe*

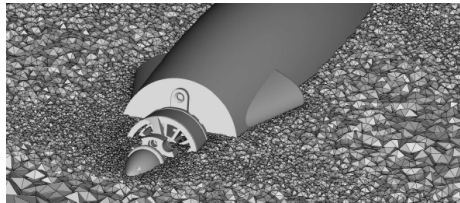


FIGURE: *Maillage du fluide autour d'un solide complexe*

EQUATION D'EULER

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla_x \mathcal{F}(W) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

où

$$\mathcal{F}(W) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} u + p \mathbf{e}_x \\ \rho \mathbf{u} v + p \mathbf{e}_y \\ \rho \mathbf{u} E + \mathbf{u} p \end{pmatrix}. \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}$$

ρ est la densité du fluide

p est la pression thermodynamique

E est l'énergie par unité de masse.

- **Résolution en utilisant les éléments finis ou les volumes finis**
 - Implémentation dans le code-maison (en C)

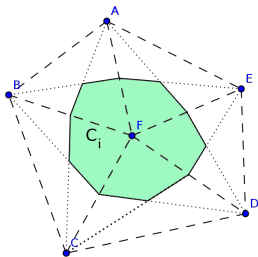


FIGURE: *En vert cellule duale type volumes finis 2d*

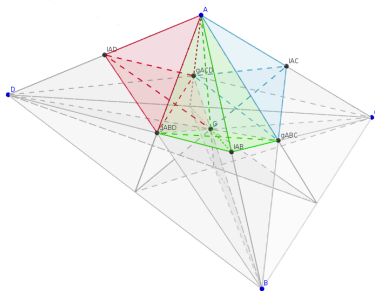


FIGURE: *en couleur "construction" cellule duale type volumes finis 3d*

SOLVEURS DE RIEMANN

- Rusanov

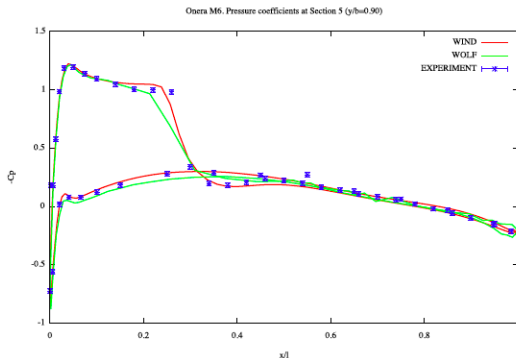
$$\Phi^{Rusanov}(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}, \sigma_{ij}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_j)}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij} + |\lambda_{ij}| \frac{\mathbf{W}_i + \mathbf{W}_j}{2}$$

où

$$|\lambda_{ij}| = \max(|\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}| + \mathbf{c}_i, |\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}| + \mathbf{c}_j).$$

- Roe
- HLLC

- par comparaison avec des données expérimentales.
- par comparaison avec d'autres codes.



L'ALE : une théorie du maillage mobile

Le cas d'une interaction fluide-structure, côté fluide

Approche Lagrangienne : mouvement rigide
On suit une particule fluide dans son mouvement.

$\neq$

Approche Eulérienne : mouvement fluide
On se place en tant qu'observateur à une position fixée.

La vitesse du solide n'est pas forcément la même que celle du fluide

Limite de l'approche *purement lagrangienne* : Quand l'écoulement devient complexe, la déformation induite du maillage impose un remaillage du domaine complet en respectant les interfaces

⇒ le remaillage intervient dans des temps très courts

Limite de l'approche *purement eulérienne* : ne permet pas de suivre efficacement les phénomènes à l'interface

⇒ On perd en précision

⇒ Combinaison des 2 méthodes = ALE

ALE : Arbitrairement lagrangienne-eulérienne

Principe :

- Déformer le domaine fluide $(\Omega_{t_n})_n$ à partir d'une configuration de référence Ω_{t_0} .
- Calcul de l'écoulement fluide sur $(\Omega_{t_n})_n$

$$\Omega_{t_{n+1}} = \{x_{n+1} = \phi_n(x_n, t_n), x_n \in \Omega_{t_n}\}$$

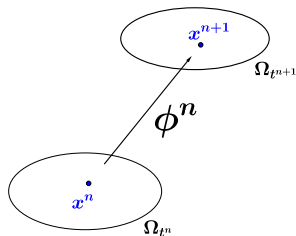


FIGURE: Transformation ϕ

Avantages :

- vitesse de déformation différente en général de celle du fluide
- suit le mouvement à l'interface (lagrangien près du solide)

Inconvénients :

Introduit des termes complémentaires liés au mouvement de maillage dans les EDP.

$$\Omega_t = \{x = \phi(\xi, t), \xi \in \Omega_{t_0}\}$$

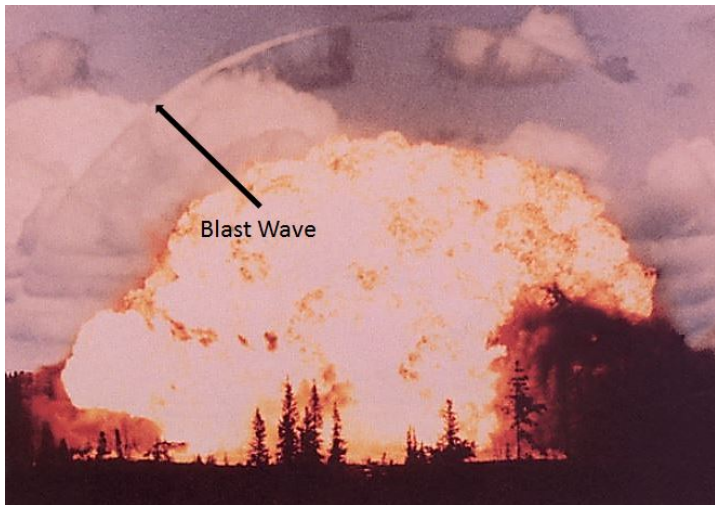
$$\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial \mathcal{J} W}{\partial t} + \nabla_x \mathcal{F}(W) = 0 \quad \text{in } \Omega_t$$

où

$$\mathcal{J}(\xi, t) = \det \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t)$$

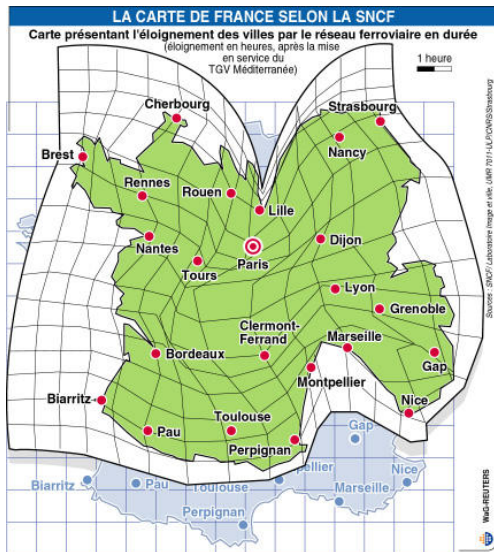
et

$$\mathcal{F}(W) = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{u} - \dot{\phi}) \\ \rho(\mathbf{u} - \dot{\phi})u + p\mathbf{e}_x \\ \rho(\mathbf{u} - \dot{\phi})v + p\mathbf{e}_y \\ \rho(\mathbf{u} - \dot{\phi})E + \mathbf{u}p \end{pmatrix}.$$



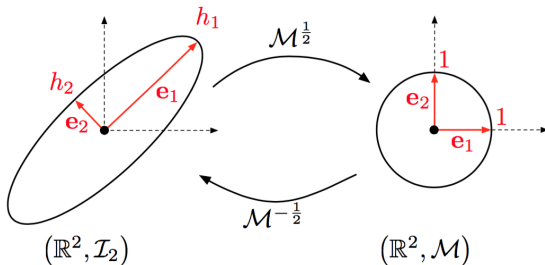


Théorie du maillage adaptatif



Question immédiate :

Trouver le maillage optimal $\mathcal{H}_{opt}$ de complexité N fixé tel
que $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{opt}}(u) = \min_{\mathcal{H}} ||u - \Pi_{\mathcal{H}} u||$



Métrie $\mathcal{M}$ (2D) : $\mathcal{M}(\mathbf{x}) = {}^t \mathcal{R}(x, y) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}(x, y)$

On peut obtenir en particulier :

- la complexité
- la distance entre 2 points

Question reformulée :

Trouver la métrique optimale $\mathcal{M}_{opt}$ de complexité N fixé
tel que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{opt}}(u) = \min_{\mathcal{M}} ||u - \Pi_{\mathcal{M}} u||$

On écrit l'erreur à l'aide de la métrique :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{L^1}}(u) = \frac{\sqrt{3}}{64} \det \mathcal{M}_{L^1}^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tr}(\mathcal{M}_{L^1}^{-\frac{1}{2}} H_u \mathcal{M}_{L^1}^{-\frac{1}{2}})$$

sous la contrainte : $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{L^1}) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathcal{M}_{L^1}(\mathbf{x}))} \, d\mathbf{x} = N.$

Le champ de métriques optimales $\mathcal{M}_{opt,L^1}(\mathbf{x})$ est donné par :

$$\mathcal{M}_{opt,L^1}(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_{L^1} \det(|H_u(\mathbf{x})|)^{-\frac{1}{5}} |H_u| \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_{L^1} = N^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} \det(|H_u|)^{\frac{2}{5}} \, d\mathbf{x} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

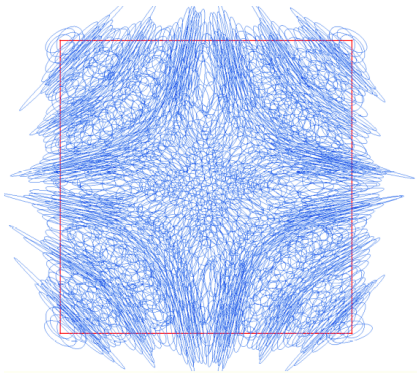


FIGURE: *Champ de métriques*

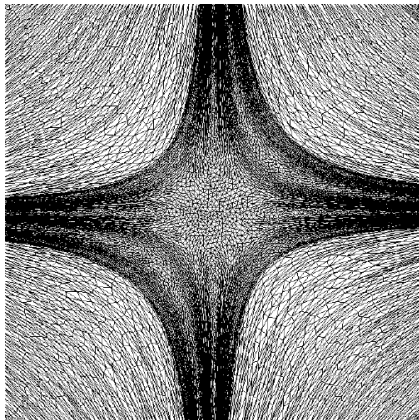
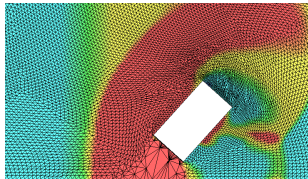
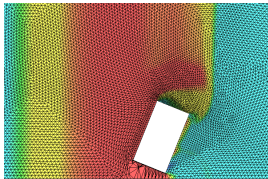
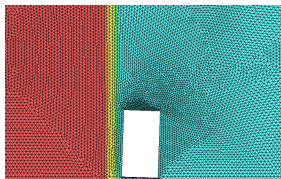


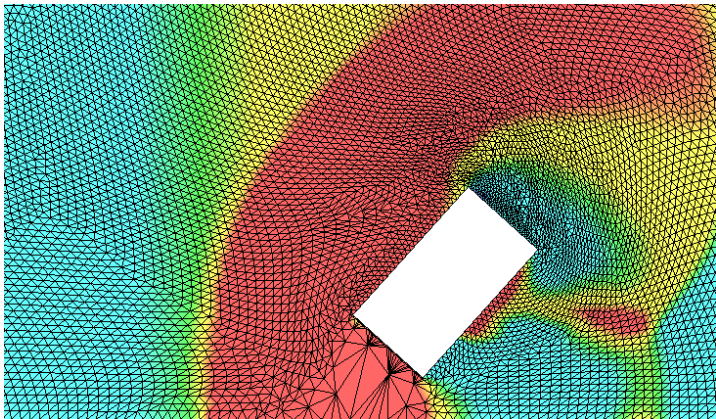
FIGURE: *Maillage adapté*

Maillage adaptatif basé hessien

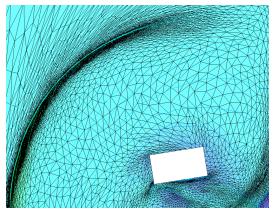
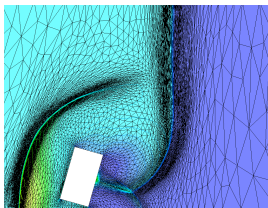
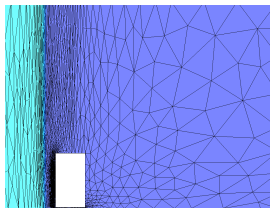
Une déformation appliquée à l'intervalle de temps en totalité n'est généralement pas valide :

- **maillage déformation-réparation**
- plusieurs déformations successives de maillages (point fixe instationnaire)





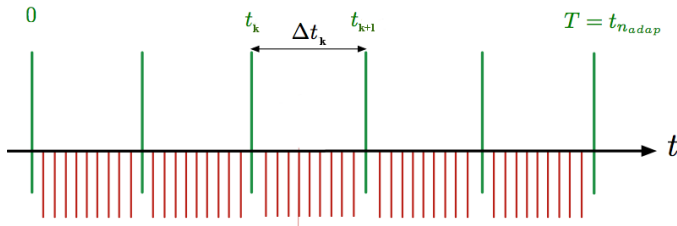
- maillage déformation-réparation
- **plusieurs déformations successives de maillages (point fixe instationnaire)**



Découper l'intervalle de temps en *sous-intervalles* séparés par des *étapes de redécoupages* à t_k :

$$[0, T] = [t_0 = 0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots [t_{kmax}, T]$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}] \Rightarrow \Omega_t = \{x = \phi_k(\xi, t), \xi \in \Omega_{t_k}\}$$



Sur $[t_k, t_{k+1}[$:

- On calcule la solution
- On évalue la métrique sur les Ω_{t_n} et on l'envoie sur Ω_{t_k} par ϕ
 $\tilde{\mathcal{M}}^k(\xi, t) = (\phi_k(\xi, t), t).$
- On calcule la métrique optimale sur Ω_{t_k} par intersection des métriques :

$$\tilde{\mathcal{M}}^k(\xi) = \cap_{t \in [t_k, t_{k+1}[} \tilde{\mathcal{M}}^k(\xi, t).$$

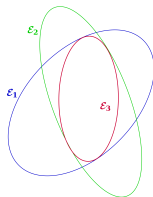
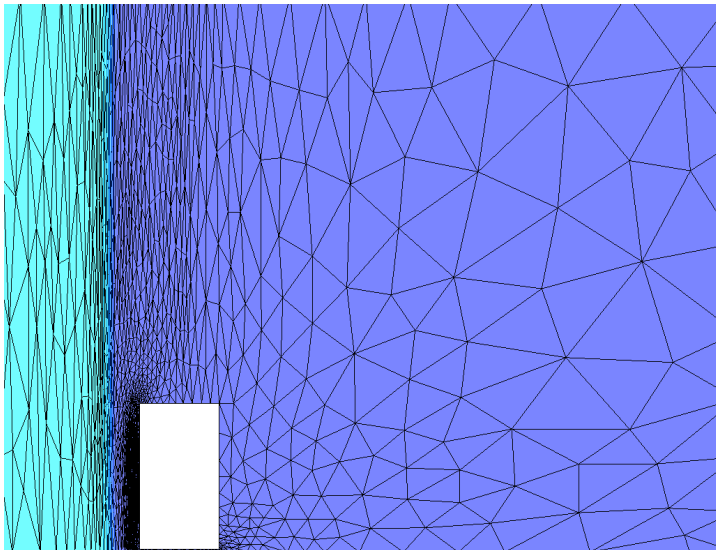


FIGURE: Intersection de 2 métriques

- On déforme le maillage obtenu sur tout l'intervalle : pour
 $t \in [t_k, t_{k+1}[$ $\tilde{\mathcal{M}}^k(\xi, t) = \phi_k(\tilde{\mathcal{M}}^k(\xi, t)).$



Aperçu de mon travail de thèse

- **But** : Mieux prendre en compte le système des EDP.

L'idée est donc de s'orienter vers

une adaptation de maillage *goal-oriented* (donc issue de la théorie du contrôle optimal) pour l'algorithme ALE de point fixe instationnaire.

- Remplacer le hessien par un critère de contrôle $\Rightarrow$ besoin d'une fonction coût g .

- Remplacer le hessien par un critère de contrôle $\Rightarrow$ besoin d'une **fonction coût** g .
- Optimiser le système en fonction de ce critère $\Rightarrow$ pour nous minimiser l'erreur $\delta j_h = |(g, W) - (g, W_h)|$

- Remplacer le hessien par un critère de contrôle $\Rightarrow$ besoin d'une **fonction coût** g .
- Optimiser le système en fonction de ce critère $\Rightarrow$ pour nous minimiser l'erreur $\delta j_h = |(g, W) - (g, W_h)|$
- On introduit la solution adjointe W^*

$$\left(\frac{\partial \Psi_{(h)}}{\partial W_{(h)}} \varphi_{(h)}, W_{(h)}^* \right) = (g, \varphi_{(h)})$$

- Remplacer le hessien par un critère de contrôle $\Rightarrow$ besoin d'une **fonction coût** g .
- Optimiser le système en fonction de ce critère $\Rightarrow$ pour nous minimiser l'erreur $\delta j_h = |(g, W) - (g, W_h)|$
- On introduit la solution adjointe W^*

$$\left(\frac{\partial \Psi_{(h)}}{\partial W_{(h)}} \varphi_{(h)}, W_{(h)}^* \right) = (g, \varphi_{(h)})$$

- On réécrit δj_h en fonction de la solution adjointe $\delta j_h \approx (W^*, \Psi_h(W) - \Psi(W))$

- Remplacer le hessien par un critère de contrôle $\Rightarrow$ besoin d'une **fonction coût** g .
- Optimiser le système en fonction de ce critère $\Rightarrow$ pour nous minimiser l'erreur $\delta j_h = |(g, W) - (g, W_h)|$
- On introduit la solution adjointe W^*

$$\left(\frac{\partial \Psi_{(h)}}{\partial W_{(h)}} \varphi_{(h)}, W_{(h)}^* \right) = (g, \varphi_{(h)})$$

- On réécrit δj_h en fonction de la solution adjointe $\delta j_h \approx (W^*, \Psi_h(W) - \Psi(W))$
- Afin de minimiser δj_h on utilise une estimation d'erreur *a priori*

- Remplacer le hessien par un critère de contrôle $\Rightarrow$ besoin d'une **fonction coût** g .
- Optimiser le système en fonction de ce critère $\Rightarrow$ pour nous minimiser l'erreur $\delta j_h = |(g, W) - (g, W_h)|$
- On introduit la solution adjointe W^*

$$\left(\frac{\partial \Psi_{(h)}}{\partial W_{(h)}} \varphi_{(h)}, W_{(h)}^* \right) = (g, \varphi_{(h)})$$

- On réécrit δj_h en fonction de la solution adjointe

$$\delta j_h \approx (W^*, \Psi_h(W) - \Psi(W))$$

- Afin de minimiser δj_h on utilise une estimation d'erreur *a priori*
- Trouver le champ de métriques optimales

MERCI

contact : [eleonore.gauci\[at\]inria.fr](mailto:eleonore.gauci@inria.fr)