Classification des surfaces

Eléonore Gauci et Adrien Fontaine

sous la direction de Ludovic Rifford

11 mai 2012

Université Nice Sophia Antipolis

- **Objectif :** Classifier les surfaces orientables lisses
- **Outil :** Théorie de Morse

Définition

Une fonction de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ *est une fonction* C^∞ *dont tous les points critiques sont non dégénérés et les valeurs critiques correspondantes toutes distinctes.*

Définition

On appelle indice d'un point critique x de f la dimension du plus grand sous-espace de $\mathbb{R}^n$ sur lequel la matrice Hessienne est définie négative.

Morse, 1932

Lemme

Soit q un point critique non dégénéré de $f : M \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 3)$. Il existe un paramétrage ϕ par des coordonnées locales (X, Y) d'un voisinage $\phi(U)$ de q tel que :

$$f(\phi(X, Y)) = f(q) + g_i(X, Y)$$

$$\text{avec} \begin{cases} g_0(X, Y) = X^2 + Y^2 \text{ si l'indice est 0} \\ g_1(X, Y) = X^2 - Y^2 \text{ si l'indice est 1} \\ g_2(X, Y) = -X^2 - Y^2 \text{ si l'indice est 2} \end{cases}$$

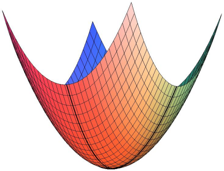


FIGURE: indice 0

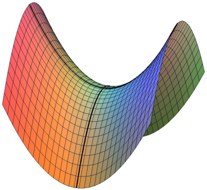


FIGURE: indice 1

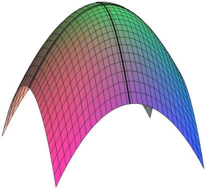


FIGURE: indice 2

Lignes directrices

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $k > \frac{n}{m} - 1$. On suppose que f est de classe C^k.
Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle.

Lignes directrices

- **But :** Démontrer l'existence d'une fonction de Morse sur M.
- La démonstration repose sur la notion de point focal.

Définition

Un point focal de M est un point de l'espace où les normales à M se rencontrent.

- Le théorème de Sard entraîne que l'ensemble des points focaux de M est de mesure nulle.

- On montre enfin que si p n'est pas un point focal de M alors la fonction :

$$\begin{array}{cccc} L_p & : & M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & q & \mapsto & \|\overrightarrow{pq}\|^2 \end{array}$$

  n'a pas de point critique dégénéré.
- On modifie enfin la fonction L_p de manière à ce que les valeurs critiques soient toutes distinctes.

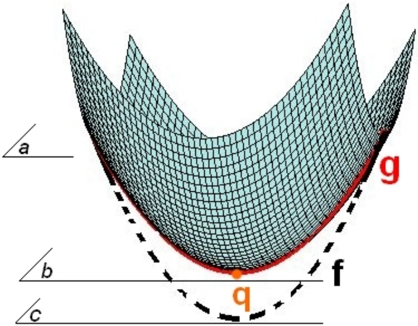
Lignes directrices

Proposition

Soit f une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés, q un point critique d'indice 0 de f et U un voisinage de q limité par la courbe de niveau $f(x) = a$.
Alors pour tout $b < a$ il existe une fonction g

- *dont tous les points critiques sont non dégénérés,*
- *ayant les mêmes points critiques que f avec même indice ,*
- *coincidant avec f hors de U et telle que $g(q) = b$.*

(On a bien évidemment un résultat similaire pour des points critiques d'indice 1 ou 2)


a
b
c
g
f
q

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse et $a < b$ deux valeurs régulières. On note :

$$V(a) = f^{-1}(a) = \{x \in M, f(x) = a\}$$

$$M(a) = f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in M, f(x) \leq a\}$$

$$W(a, b) = M(b) \backslash Int(M(a)) = f^{-1}([a, b]) = \{x \in M, a \leq f(x) \leq b\}$$

Lignes directrices

Proposition

Si $a < b$ sont deux valeurs régulières telles que la fonction de Morse f n'ait pas de valeur critique comprise entre a et b, alors on a :

1. $V(a)$ *est homéomorphe à* $V(b)$
2. $M(a)$ *est homéomorphe à* $M(b)$
3. $W(a, b)$ *est homéomorphe à* $V(a) \times [a, b]$

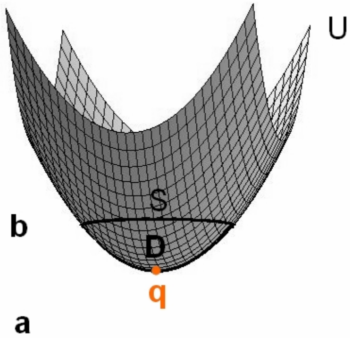
Lignes directrices

Proposition

Si q est un point critique d'indice 0, alors

1. $M(a)$ *est homéomorphe à* $M(b) - D$ *où D est un disque (de dim 2)*
2. $V(a)$ *à* $V(b) - S$*, S bord du disque D.*

(On a un résultat similaire pour un point critique d'indice 2)


U
S
b
D
q
a

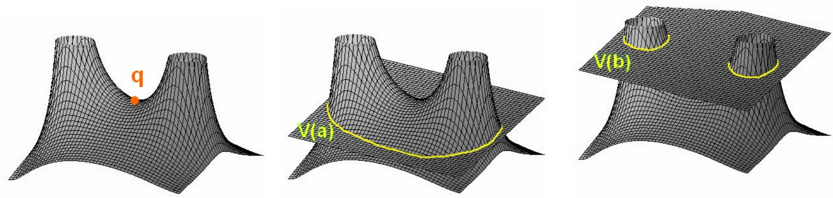
Lignes directrices

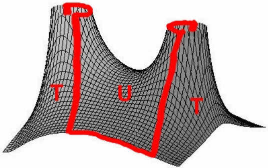
Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

Proposition

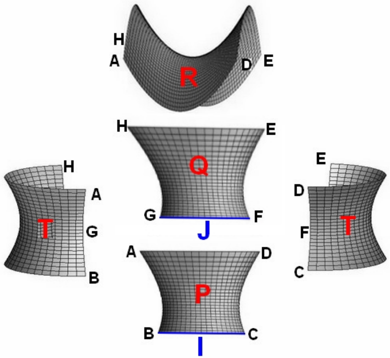
Soit f une fonction de Morse, a et b deux valeurs régulières de f entre lesquelles il n'y a qu'une seule valeur critique $f(q)$ avec q point critique d'indice 1, alors

1. *$M(b)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M(a)$ un rectangle.*
2. *la transformation de $V(a)$ en $V(b)$ dépend de la différence du nombre de composantes connexes entre $V(a)$ et $V(b)$.*


q
V(a)
V(b)



$$U = R \cup Q \cup P$$



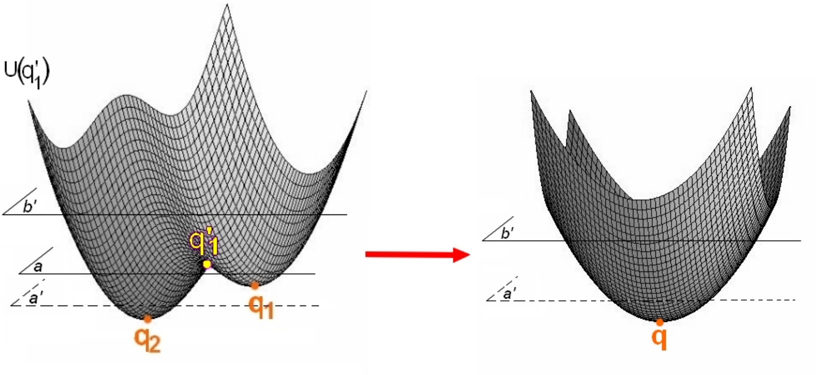
Lignes directrices

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

Proposition

Il existe une fonction de Morse g ayant mêmes points critiques que f, avec même indice, et deux niveaux $c < d$ tels que :

1. - $M(c) = g^{-1}(]-\infty, c])$ *contient* $n(0)$ *points critiques d'indice* 0 *et* $n(0) - 1$ *points critiques d'indice* 1
   - $M(c)$ *homéomorphe à un disque.*
2. - $M'(d) = g^{-1}([d, +\infty[)$ *contient* $n(2)$ *points critiques d'indice* 2 *et* $n(2) - 1$ *points critiques d'indice* 1
   - $M'(d)$ *homéomorphe à un disque.*
3. $W(c, d) = g^{-1}([c, d])$ *contient* $n(1) - n(0) - n(2) + 2$ *points critiques d'indice* 1.


U(q'1)
b'
a
a'
q'1
q2
q1
b'
a'
q

Lignes directrices

Définition

On appelle T_n le tore à n trous. Plus précisément :

- *T_0 désigne la sphère,*
- *T_1 le tore,*
- *et on obtient T_n, $n \geq 2$ en enlevant un disque au tore et à T_{n-1}, puis en recollant ces derniers le long du bord de ces disques.*

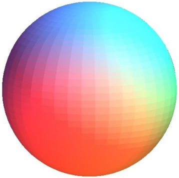


FIGURE: T_0

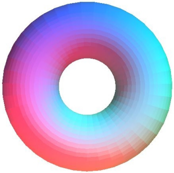


FIGURE: T_1

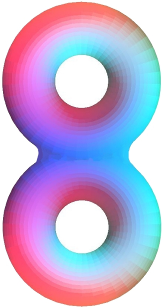


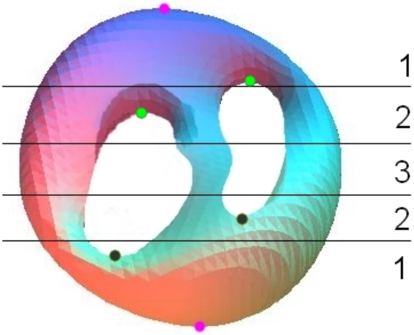
FIGURE: T_2

Théorème

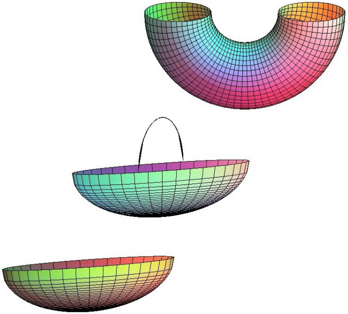
Soit

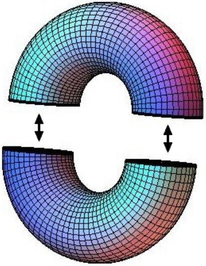
- *M une surface lisse compacte, connexe et orientable*
- *et f une fonction de Morse sur M ayant un point critique d'indice 0, un point critique d'indice 2 et j points critiques d'indice 1.*

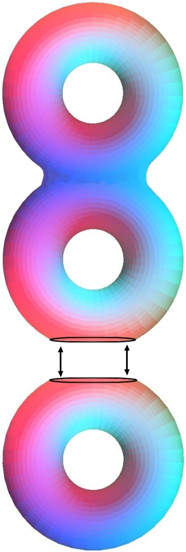
Alors j est pair, et M est homéomorphe à T_n où $j = 2n$.



- point critique d'indice 0 ou 2
- point critique d'indice 1 séparant
- point critique d'indice 1 reliant







Merci de votre attention !