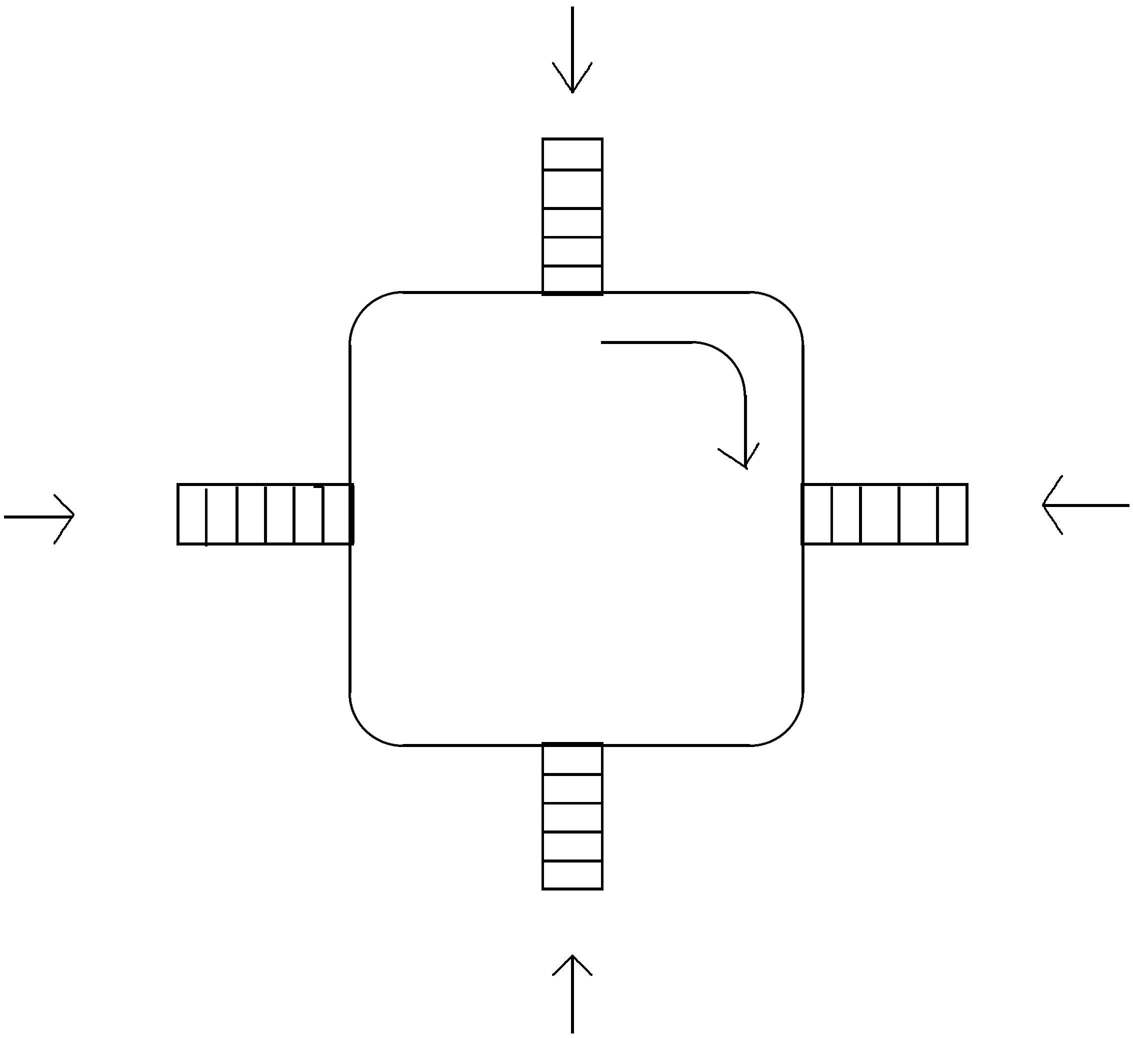
1 Analyse stochastique des anneaux à jetons



Je vais résoudre les exercices qui suiveront en classe.

Le modèle:

- (1) K stations: $i = 0, 1, ..., K - 1$.
- (2) Un cycle: la période entre l'arrivée du jeton à la station k, jusqu'à son arrivée suivante à cette station. C_n^k:= La durée du $n$ième cycle (de type k).
- (3) Processus d'arrivées à la station i: Poisson avec paramètre λ_i. Donc, le temps entre deux arrivées consecutives à la station i est exponentiellement distribué, et son espérance est $1/\lambda$.
- (4) Temps de transmission de paquets à la station i: i.i.d., distribués comme une variable aléatoire B^i dont l'espérance est b^i, le 2ième moment est $b_i^{(2)}$ et la transformée de Laplace est $B_i^*(s)$.
- (5) Temps de circulation du jeton D_n^i: le temps pour se déplacer de la station i à la station $i + 1$ (durant le cycle n). Peut être aléatoire. D_n^i sont i.i.d., distribués comme une variable aléatoire D^i dont l'espérance est d^i, le 2ième moment est $d^{(i,2)}$ et la transformée de Laplace est $D_i^*(s)$. Soit $D = D^0 + D^1 + ... + D^{K-1}$ avec l'espérance est d, le 2ième

moment $d^{(2)}$ et la transformée de Laplace $D^*(s)$.

- (6) Indépendence: Les processus d'arrivées, les temps de transmissions et de circulation du jeton sont indépendants.

- (7) Disciplines de service:

  - (7a) Limité le jeton reste dans la station i pendant la transmission de i paquets au plus. (S'il y en a moins à transmettre, le jeton la quitte avant).
  - (7b) "Gated" le jeton reste dans la station i pendant la transmission de tous les paquets présents à son arrivée.
  - (7c) "Exhaustive" le jeton reste dans la station i pendant la transmission de tous les paquets présents à son arrivée, et qui arrivent entre temps. Le jeton quite la station quand elle n'a plus de paquets à transmettre.

Définissons la charge:

$$\rho := \sum_{i=0}^{K-1} \lambda_i b_i.$$

<u>Calcul de $E[C]$</u>

Supposons que le système est stable et stationnaure. (On peut montrer que $\rho < 1$ est une condition nécessaire et suffisante de stabilité.) Alors

$$E[C^k] = \frac{d}{1-\rho}$$

et ne dépend pas de k.

<u>Preuve intuitive:</u>

(a) Première étape: montrons que la probabilité qu'un paquet est en train d'être transmis est égale à ρ.

Soit α_n la station à laquelle arrive le $n$ième paquet. Le processus d'arrivée est équivalent à un seul processus Poissonnien à taux λ, où α_n sont i.i.d. et la probabilité que $\alpha_n = i$ est

$$p_i = \mathrm{Prob}(\alpha_n = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}.$$

L'espérance du temps de transmission du $n$ième paquet est donc

$$b := \sum_i p_i b_i = \sum_i \frac{\lambda_i b_i}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda}.$$

On considère le temps de transmission comme un temps de service (à espérance b) dans une file d'attente.

On peut donc considerer une seule file d'attente effective, avec taux d'arrivée λ, et espérance de temps de servuce de b.

Soit $X = 1$ si un paquet est en train d'être servi, autrement $X = 0$. On a en général, pour des files G/G/1:

$$P(X = 1) = E[X] = \lambda b = \rho.$$

(b) Deuxième étape: Si un paquet n'est pas en train d'être transmis, alors le jeton est en train de circuler entre des stations. La probabilité de cela est

$$\frac{d}{E[C]}.$$

$$(a) + (b): \quad \frac{d}{E[C]} + \rho = 1, \quad \text{et donc} \quad E[C] = \frac{d}{1-\rho}.$$

Espérence du nombre de paquets

Considérons le régime “Gated”. A l'arrivée du jeton à la $k$ième station, l'espérance du nombre de paquets qu'il trouve Q^k, en régime stationaire, est

$$E[Q^k] = \lambda_k E[C] = \lambda_k \frac{d}{1-\rho}.$$

L'espérance de temps S^k pendant lequel la station k transmet de paquets (par cycle) est

$$E[S^k] = \lambda_k b_k E[C] = \lambda_k b_k \frac{d}{1-\rho}.$$

Explication: pour des arrivées Poissonniennes de taux λ_i, l'espérance du nombre d'arrivées dans un intervalle T est $\lambda_i T$. Comme on est dans le régime “Gated”, le nombre d'arrivées pendant un cycle est égal au nombre de paquets qu'on trouve à l'arrivée du jeton. Pour l'espérance du temps pendant lequel la station k transmet des paquets, on a

$$S^k = \sum_{i=1}^{Q^k} B_i^k,$$

où B_i^k sont i.i.d. distribués comme B^k, et ne dépendent pas de

Q^k. On utilise la loi de Wald:

$$E[S^k] = E[Q^k]E[B^k] = \lambda_k b_k \frac{d}{1-\rho}.$$

Analyse exacte

Méthode: Fonctions génératrices de probabilités et transformés de Laplace.

Définitions

- Soit X une variable aléatoire qui prend des valeurs entières. Soit
$$G(z) := Ez^X = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P(X = i).$$
$G(z)$ est la fonction génératrice de probabilités (FGP) de X. Elle est bien définie pour tout $|z| \leq 1$ car
$$|G(z)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |z|^i P(X = i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1, \qquad |z| \leq 1.$$
On comprendra $z^0 = 1$ pour tout z, y compris $z = 0$.

- Soit X une variable aléatoire. Soit

$$X^*(s) := E\exp(-sX) = \int_0^\infty \exp(-sx)P_X(dx).$$

$X^*(s)$ est sa <u>transformé de Laplace</u>. On l'utilise sur tout pour X qui prend des valeurs continues. Elle est bien définie pour tout $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ car pour ces s,

$$|X^*(s)| \leq \int_0^\infty |\exp(-s)|^x P_X(dx) \leq \int_0^\infty 1 P_X(dx) = 1.$$

Propriétés de FGP

$$G(0) = \sum_{i=0}^{\infty} 0^i P(X = i) = P(X = 0),$$

$$G(1) = \sum_{i=0}^{\infty} 1P(X = i) = 1.$$

$$\left.\frac{dG(z)}{dz}\right|_{z=1} = \left.\sum_{i=1}^{\infty} iz^{i-1} P(X = i)\right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{\infty} iP(X = i) = E[X].$$

D'une manière similaire on obtient:

$$G^{(k)}(0) := \left.\frac{dG(z)^k}{d^k z}\right|_{z=0} = k!P(X = k),$$

et

$$G^{(2)}(1) := \left.\frac{dG(z)^2}{d^2 z}\right|_{z=1} = E[X(X-1)],$$

$$G^{(k)}(1) := \left.\frac{dG(z)^k}{d^k z}\right|_{z=1} = E[X(X-1)...(X-k-1)], \quad k > 2.$$

Propriétés des transformés de Laplace.

$$X^*(0) = E\exp(0) = 1;$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dX^*(s)}{ds}\right|_{s=0} &= \left.\frac{dE\exp(-sX)}{ds}\right|_{s=0} = \left[E\frac{d\exp(-sX)}{ds}\right]_{s=0} \\
&= -\left.E[X\exp(-sX)]\right|_{s=0} = -E[X].
\end{aligned}$$

D'une manière similaire on obtient:

$$X^{(k)}(0) := \left.\frac{dX^*(s)^k}{d^k s}\right|_{s=0} = (-1)^k E[X^k].$$

Transformés et FPGs multi-dimensionelles

- Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_K)$ un vecteur aléatoire où X_i prend des valeurs entières. Soit

  $$G(z) := E\left[z_1^{X_1} z_2^{X_2} ... z_K^{X_K}\right], \qquad z = (z_1, ..., z_K).$$

  $G(z)$ est la *FGP multi-dimensionelle* de X.

- Soit X un vecteur aléatoire. Soit

  $$X^*(s) := E \exp(-s \cdot X) = \int_0^\infty \exp(-\sum_i s_i x_i) P_X(dx_1 dx_2 ... dx_K).$$

  $X^*(s)$ est la *transformé de Laplace multidimensionelle.*

Propriétés de FGP multi-dimensionelles

$$G(1, ..., 1) = 1;$$

$$G(z)|_{z_j=0, z_k=1, k\neq j} = \sum_{i=0}^{\infty} 0^i P(X_j = 0) = P(X_j = 0).$$

$$\left.\frac{\partial G(z)}{\partial z_l}\right|_{z=(1,..,1)} = \sum_{i=1}^{\infty} i z_l^{i-1} p(x_l = i)\Big|_{z_l=1} = \sum_{i=1}^{\infty} i P(X_l = i) = E[X_l].$$

D'une manière similaire on obtient:

$$\left.\frac{\partial^2 G(z)}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{z=(1,...,1)} = \begin{cases} E[X_i X_j] & i \neq j \\ \\ E[X_i(X_i - 1)] & i = j \end{cases}$$

Exemples

Ex (P1): Soit X une variable aléatoire Poissonnienne:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda z]^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}. \end{aligned}$$

Calculer les deux premiers moments de X à partir de $G(z)$.

<u>Ex. (P2):</u> Soit T une période aléatoire, avec espérance ET, deuxième moment $T^{(2)}$, et transformé de Laplace $T^*(s)$.
Considérons un processus d'arrivées Poissonnien avec taux λ qui est indépendant de T, et soit X le nombre de paquets qui arrivent pendant le temps T. Quelle est la FGP de X?

$$P(X = k|T) = e^{-\lambda T}\frac{[\lambda T]^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k|T)\right] \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda T}\frac{[\lambda T]^k}{k!}\right) \\
&= E\left(e^{-\lambda T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda T z]^k}{k!}\right) \\
&= E\left(e^{\lambda(z-1)T}\right) = T^*(\lambda(1-z)).
\end{aligned}$$

Calculer les deux premiers moments de X.

Ex. (P3): Considérons K processus Poissonniens indépendants avec taux $\lambda_i, i = 1, ..., K$. Soit T une période aléatoire qui ne dépend pas des processus Poissonniens, avec espérance ET, deuxième moment $T^{(2)}$, et transformé de Laplace $T^*(s)$.
Soit $X = (X_1, ..., X_K)$ le vecteur de nombre de paquets qui arrivent pendant le temps T. Quelle est la FGP de X? Quels sont les deux premiers moments de X?

Ex. (P4): Soit B_i, $i = 1, 2, ...$ des variables aléatoires i.i.d. avec espérance b, deuxième moment $b^{(2)}$, et transformé de Laplace $B^*(s)$. Soit X une variable aléatoire entière indépendante de B_i, avec espérance x, deuxième moment $x^{(2)}$, et une FGP $G(z)$. Quelle est la transformé de Laplace de

$$Y := \sum_{i=1}^{X} B_i?$$

Calculer les deux premiers moments de Y.

Définissons

Q_i^j:= le nombre de paquets dans la file j quand le jeton arrive à la file i.

$i \oplus j := (i + j) \ mod$ K.

$\mathcal{A}_j[T]$:= le nombre d'arrivées à la file j pendant un intervalle de temps de durée T.

$\mathcal{B}_i(x) := B_1^i + B_2^i + ... + B_x^i$, où B_n^i sont indépendants, distribués comme B^i, et indépendant de x.

<u>La dynamique du système:</u>

$$Q^j_{i\oplus 1} = \begin{cases} Q^j_i + \mathcal{A}_j[\mathcal{B}_i(Q^i_i) + D_i] & i \neq j \\ \\ \mathcal{A}_j[\mathcal{B}_i(Q^i_i) + D_i] & i = j \end{cases}$$

Soit:

$$F_i(\underline{z}) = E\left[z_0^{Q_i^0} z_1^{Q_i^1} \cdots z_{K-1}^{Q_i^{K-1}}\right]$$

On obtient:

$$\begin{aligned} F_{i\oplus 1}(\underline{z}) &= E\left[z_0^{Q^0_{i\oplus 1}} z_1^{Q^1_{i\oplus 1}} \cdots z_{K-1}^{Q^{K-1}_{i\oplus 1}}\right] \\ &= E\left[z_0^{Q_i^0 + \mathcal{A}_0[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]} \times z_1^{Q_i^1 + \mathcal{A}_1[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]}\right. \\ &\qquad \left. \times \cdots \times z_i^{\mathcal{A}_i[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]} \times \cdots \times z_{K-1}^{Q_i^{K-1} + \mathcal{A}_{K-1}[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]}\right] \end{aligned}$$

On va conditionner par $\underline{Q_i} = (Q_i^0, ..., Q_i^{K-1})$.

$$\begin{aligned} & E\left[z_0^{Q^0_{i\oplus 1}} z_1^{Q^1_{i\oplus 1}} \cdots z_{K-1}^{Q^{K-1}_{i\oplus 1}} \middle| \underline{Q}_i\right] \\ &= E\left[z_0^{Q_i^0 + \mathcal{A}_0[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]} \times z_1^{Q_i^1 + \mathcal{A}_1[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]}\right. \\ &\qquad \left. \times \cdots \times z_i^{\mathcal{A}_i[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]} \times \cdots \times z_{K-1}^{Q_i^{K-1} + \mathcal{A}_{K-1}[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]} \middle| \underline{Q_i}\right] \\ &= \prod_{j\neq i} z_j^{Q_i^j} E\left[\prod_{j=0}^{K-1} z_j^{\mathcal{A}_j[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]} \middle| \underline{Q}_i\right] \end{aligned}$$

La transformé de Laplace conditionnelle de $T_i := \mathcal{B}_i(Q_i^i) + D_i$ est:

$$\begin{aligned} T_i^*(s)\big|_{Q_i^i} &= E\left[e^{-s[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]}\,\middle|\, Q_i^i\right] = D_i^*(s)E\left[e^{-s\sum_{j=1}^{Q_i^i} B_j^i}\,\middle|\, Q_i^i\right] \\ &= D_i^*(s)E\left[\prod_{j=1}^{Q_i^i} e^{-sB_j^i}\,\middle|\, Q_i^i\right] = D_i^*(s)\prod_{j=1}^{Q_i^i} E\left[e^{-sB_j^i}\,\middle|\, Q_i^i\right] \\ &= D_i^*(s)\prod_{j=1}^{Q_i^i} B_i^*(s) = D_i^*(s)[B_i^*(s)]^{Q_i^i} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & E\left[z_0^{Q_{i\oplus 1}^0} z_1^{Q_{i\oplus 1}^1} \cdots z_{K-1}^{Q_{i\oplus 1}^{K-1}}\,\middle|\, \underline{Q}_i\right] \\ &= \prod_{j\neq i} z_j^{Q_i^j} E\left[\prod_{j=0}^{K-1} z_j^{\mathcal{A}_j[\mathcal{B}_i(Q_i^i)+D_i]}\,\middle|\, \underline{Q}_i\right] \\ &= \prod_{j\neq i} z_j^{Q_i^j} E\left[\prod_{j=0}^{K-1} z_j^{\mathcal{A}_j[T_i]}\,\middle|\, \underline{Q}_i\right] \\ &= \prod_{j\neq i} z_j^{Q_i^j} D_i^*\left(\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j(1-z_j)\right) B_i^*\left(\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j(1-z_j)\right)^{Q_i^i} \\ &= D_i^*\left(\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j(1-z_j)\right)\left\{z_0^{Q_i^0} z_1^{Q_i^1}\cdots y^{Q_i^i}\cdots z_{K-1}^{Q_i^{K-1}}\right\} \end{aligned}$$

où $y = B_i^*\left(\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j(1-z_j)\right)$.

On prend l'espérance des deux côtés, et on obtient:

$$(*)\quad F_{i\oplus 1}(\underline{z}) \;=\; D_i^*\left(\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j(1-z_j)\right)$$
$$\times F_i\left(z_0, z_1, ..., B_i^*\left(\sum_{j=0}^{K-1}\lambda_j(1-z_j)\right), ..., z_{K-1}\right).$$

<u>Ex (P5):</u> Pour chaque i et j, dériver (*) par rapport à z_j et substituer $z_k = 1, k = 0, ..., K-1$. On obtiendra K^2 équations pour calculer l'espérance des Q_i^j.

Processus d'arrivées de type Cruz

Un processus d'entrée est de type (σ, ρ) si pour tout $s \leq t$ la charge $A(s,t)$ (c'est à dire, la quantité d'information) qui arrive durant $[s,t]$ est bornée par:

$$A(s,t) \leq \rho(t-s) + \sigma.$$

ρ - borne sur le taux moyen d'arrivée,
σ - borne sur les déviations.

R. Cruz a montré que des éléments typiques de réseau (multiplexeurs, files d'attentes etc.) qui sont allimentés par des processus de type Cruz, ont les propriétés suivants:
(1) les processus de départ sont aussi de type Cruz,
(2) La taille de file d'attente et les temps d'attente sont *uniformément bornées.* On peut calculer les *meilleurs bornes.*

Cela permet à
- garantir aux usagers des bornes sur les délais,
- calculer les tailles nécessaires de files d'attentes qui garantissent des pertes zero.

Les réseaux ATM contiennent des éléments qui peuvent transformer les processus d'arrivées en des processus de type Cruz (le GCRA - Generic Cell Rate Algorithm, ou le Leaky Bucket).

Processus (σ, ρ) et les réseaux à jetons

Hypothèses:

- débit de transmission $= 1$ unité
- La *superposition* des processus d'entré sont (ρ, σ) et $\rho < 1$.
- Soit W_n^{out} la charge qui quite le système durant le $n$ième cycle. Soit W_n la charge présante dans le système au début du $n$ième cycle. Alors
$$W_n^{out} \geq W_n.$$

Nous définissons:

- d:= Le temps de propagation du jeton dans un cycle.
- $D(s,t)$:= la charge qui part durant $[s,t]$.
- t_n:= l'instant où le $n$ième cycle termine.
- $T_n = t_n - t_{n-1}$:= la durée du $n$ième cycle.
- $B_n = A(t_{n-1}, t_n) - \rho(t_n - t_{n-1})$:= la déviation du processus d'entrée par raport à la moyenne durant le $n$ième cycle.

Theorem:

Supposons que $W_0 = 0$. Alors

$$(i) \;\; W_n \leq \rho^n W_0 + \frac{\rho d}{1-\rho} + \sigma, \qquad \forall n,$$

$$(ii) \;\; T_n \leq \frac{d}{(1-\rho)^2} + \sigma, \qquad \forall n,$$

$$(iii) \;\; W(t) \leq \frac{\rho(2-\rho)d}{1-\rho} + \sigma, \forall t > 0.$$

Démonstration:

On montre d'abord que

$$W_n \leq \rho^n W_0 + \rho \sum_{i=1}^{n} \rho^{n-i} d + \sum_{i=1}^{n} \rho^{n-i} B_i \; , \; n \geq 1 \; .$$

On l'obtient en itérant:

$$\begin{aligned}
W_n &= W_{n-1} + A(t_{n-1}, t_n) - D(t_{n-1}, t_n) \\
&= W_{n-1} + \rho T_n + B_n - W_n^{out} \\
&= W_{n-1} + \rho(W_n^{out} + d) + B_n - W_n^{out} \\
&= W_{n-1} + \rho d + B_n + (\rho - 1) W_n^{out} \\
&\leq W_{n-1} + \rho d + B_n + (\rho - 1) W_{n-1} \\
&= \rho d + B_n + \rho W_{n-1}.
\end{aligned}$$

Comme le processus d'arrivée est (ρ, σ), on a que $B_n \leq \sigma$, mais aussi

$$\begin{aligned} B_{n-1} + B_n &\leq \sigma, \\ B_{n-2} + B_{n-1} + B_n &\leq \sigma \\ &etc... \end{aligned}$$

Et on peut montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^{n-i} B_i \leq \sigma.$$

On obtient (i).

Pour montrer (ii), on utilise:

$$T_n \leq W_{n-1} + A(t_{n-1}, t_n) + d.$$

L'analyse détaillée se trouve dans:

E. Altman, S. Foss, E. Riehl, S. Stidham, Sample path analysis of token rings, The Fundamental Role of Teletraffic in the Evolution of Telecommunications Networks, Proceedings of the 14th International Teletraffic Congress , Antibes Juan-les-Pins, France, June, pp. 811-820, 1994.

Il est accessible par WEB:
http://www.inria.fr:80/mistral/personnel/Eitan.Altman/lan.html