

Estimation d'erreur a posteriori et adaptation de maillage pour le problème du thermistor



Claire CHAUVIN*, Christophe TROPHIME*, Pierre SARAMITO*

* Grenoble High Magnetic Field Laboratory
CNRS, 25 avenue des Martyrs, Grenoble
claire.chauvin@grenoble.cnrs.fr

† Laboratoire Jean Kuntzmann
Grenoble

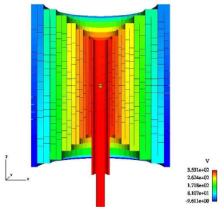


1. Conception et analyse d'aimants à haut champ [1]

- Champ magnétique $\mathbf{b}$ et densité de courant $\mathbf{j}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \quad \mathbf{j}(x) &= \sigma(u) \nabla \phi(x), \\ \forall x \in \omega, \quad \mathbf{b}(x) &= \mu \int_{\Omega} \mathbf{j}(y) \wedge \nabla G(x, y) dy, \end{aligned}$$

- Optimisation de la géométrie avec les contraintes mécaniques et thermiques pour un champ **stable et homogène**.
- Estimation de l'erreur numérique sur $\mathbf{b}$?



ϕ dans un coupe d'aimant 3D.

Validation et Vérification du modèle [2]

- Validité et propriétés du modèle décrivant le phénomène physique.
- Analyse de sensibilité.
- Existence et régularité des solutions.
- Estimations a priori et a posteriori.
- Critères d'erreur sur $\mathbf{b}$.

4. Estimateurs a posteriori

Recherche d'un estimateur η tel que $\|u - u_h\|_{H^1} + \|\phi - \phi_h\|_{H^1} \lesssim \eta \lesssim h^p$.

- Estimateur théorique [5] en fonction de résidus.
- Estimateur de Kelly de u défini sur un élément K par [6]:
$$\eta_K^2(u) = \frac{h}{24} \int_{\partial K} \left[\kappa(u_h) \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}} \right]^2 ds \quad \Rightarrow \text{ordre de cvg } \gamma$$
- Comparaison de $\gamma + 1$ avec λ solution de [3]:

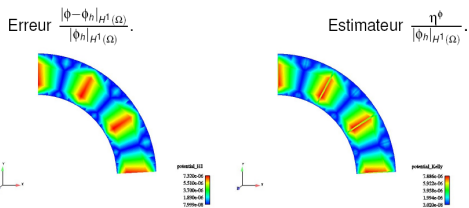
$$(1) \quad \frac{\|u_{h_{n-1}} - u_{h_{n-2}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{h_n} - u_{h_{n-1}}\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{(h_{n-2}/h_{n-1})^{\lambda-1}}{1 - (h_n/h_{n-1})^{\lambda}}$$

$\Rightarrow$ Validation de l'estimateur de Kelly.

$\Rightarrow$ Contrôle de la convergence de l'erreur selon γ et λ .

$\Rightarrow$ Si $\phi \in H^s$, $s > 1$, alors $u \in H^s$ [7].

5. Comparaison avec une sol. analytique pour σ et κ cstes.



	Q_1			Q_2			Q_3		
	rel. err.	λ	γ	rel. err.	λ	γ	rel. err.	λ	γ
ϕ	1.99	1.97	0.84	2.97	2.95	2.73	3.99	3.51	2.85
u	2.00	2.00	0.98	2.98	2.54	2.49	3.96	2.41	2.96

Ordres de convergence pour ϕ et u et différents degrés d'éléments finis,

calculés selon trois méthodes. rel. err. = $\frac{\|u - u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$.

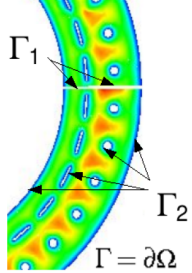
Références

- [1] C. Trophime et al., *Magnetic Field Homogeneity Optimization of the Giga-NMR Resistive Insert*, IEEE Trans. Appl. Supercond., **16**(2), 1509–1512, 2005.
- [2] I. Hlaváček et al., *Uncertain Input Data Problems and the Worst Scenario Method*, Elsevier, 2004.
- [3] C. Bernardi et al., *A model for two coupled turbulent fluids. Part III: numerical approximation by finite elements*, Numer. Math., **98**, 33–66, 2004.
- [4] C. Chauvin et al., *A posteriori estimates and adaptive FEM for the thermistor problem*, en préparation.
- [5] W. Allegretto et al., *A posteriori error analysis for FEM of thermistor problems*, Int. J. Numer. Anal. Model., **3**(4), 413–436, 2006.
- [6] D.W. Kelly et al., *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method - Part I: Error analysis*, Int. J. Num. Meth. Engrg., **19**, 1593–1619, 1983.
- [7] C. Bernardi et al., *A model for two coupled turbulent fluids. Part I: analysis of the system*, Studies in mathematics and its applications, D. Cioranescu and J. L. Lions eds, **13**, 69–102, 2002.

2. Problème du thermistor

Trouver $(\phi, u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que:

$$(C) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u) \nabla \phi) = f & \text{in } \Omega, \\ -\operatorname{div}(\kappa(u) \nabla u) = \sigma(u) |\nabla \phi|^2 & \text{in } \Omega, \\ \phi = \phi_0 & \text{on } \Gamma_1, \\ -\sigma(u) \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_2, \\ u = u_w & \text{on } \Gamma_2, \\ -\kappa(u) \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_1. \end{cases}$$



- $\Omega, \omega \subset \mathbb{R}^2$, $\omega \cap \Omega = \emptyset$.
- σ et κ bornées, Lipschitz-continues dans $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Résultat d'existence de solutions

- Dirichlet homogène pour u , et relèvement sur ϕ .
- Après transposition ($u \leftarrow \theta$):
(FVQ_h) : Trouver $\theta_h \in V_h$ et $\phi_h \in V_h$ t.q.

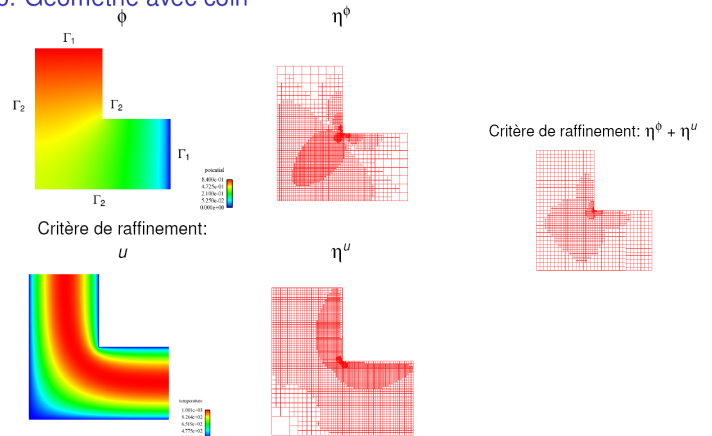
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \theta_h \cdot \nabla \zeta_h dx &= \lambda \int_{\Omega} \tau(\theta_h) |\nabla \phi_h|^2 \zeta_h dx, \quad \forall \zeta_h \in V_h \\ \int_{\Omega} \tau(\theta_h) \nabla \phi_h \cdot \nabla \psi_h dx &= \int_{\Omega} f \psi_h dx, \quad \forall \psi_h \in V_h \end{aligned}$$

- $\exists (\theta, \phi) \in H^s(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ solutions de (FVQ), avec $0 < s < 1/2$. [3]

Supposons $h < h_0$. Alors le problème discret (FVQ_h) admet toujours une solution qui vérifie les estimations [4]:

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|_{H^s(\Omega)} &\leq C \left(1 + h^{2-s-\frac{s}{2}} |\log h|^{1-\frac{1}{2}} \right) \|\tau(\theta_h) |\nabla \phi_h|^2\|_{L^1(\Omega)} \\ \|\phi_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

6. Géométrie avec coin



Conclusion et perspectives

- Étude numérique d'un critère fiable et efficace d'estimation de l'erreur a posteriori pour le problème du thermistor [4,8].
- L'adaptation de maillage cible la singularité. Limitation par l'utilisation de quadrangles.
- Suite: Évaluation de l'erreur a posteriori sur le champ magnétique $\mathbf{b}$ par une approche de type contrôle optimal [9].

[8] W. Bangerth, R. Hartmann et G. Kanschat, *deal.II — a General Purpose Object Oriented Finite Element Library*, ACM Trans. Math. Software, **33**(4), 2007.

[9] R. Becker et R. Rannacher, *A feed-back approach to error control in finite element methods: basic analysis and examples*, East-west J. Num. Math., **4**, 237–264, 1996.