1 Introduction aux réseaux de Petri

Les réseaux de Petri sont un modèle pour les systèmes dans lesquels il existe des *flots contrôlés*. Ces flots peuvent concerner des objets concrets (par exemple : pièces détachées, périphériques,..) ou abstraits (messages, entiers,...). Dans le cas le plus général nous parlerons de *flots d'information*.

A l'origine les travaux de Petri (années 60) portaient sur la *transmission et la transformation de l'information*. La théorie des réseaux (General Net Theory) a été créée par Carl Adam Petri pour décrire de façon précise ces phénomènes.

Dans ce cours, nous aborderons cette théorie surtout au travers d'exemples. Nous insisterons sur les possibilités de modélisation et nous étudierons quelques techniques d'analyse. Ces modélisations peuvent porter sur *différents niveaux d'abstraction*. Nous étudierons plus spécialement le modèle dit “place/transition”.

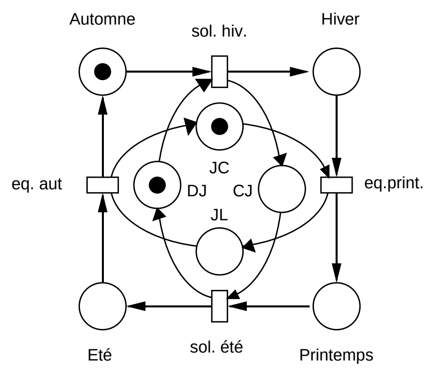

FIG. 1 – Système événement-condition : les 4 saisons

1.1 Exemples d'introduction

Les quatre saisons : Exemple de système événement-condition

Les quatre-saisons sont modélisées figure 1. Cet exemple nous permet d'introduire les notions suivantes :

- Condition (condition) → maintien (holding)
- Événement (event) → occurrence (occurrence)

préconditions ⟶ occurrence ⟶ postconditions

Evénements coïncidents

Retour sur l'automatisme (1)

Nous reprenons l'exemple d'automatisme (1) du chapitre précédent (voir figure 2).

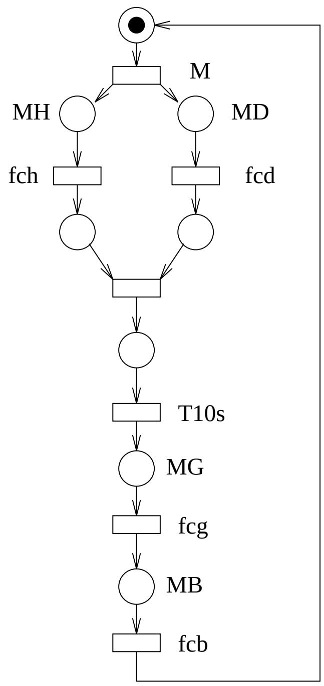

FIG. 2 – Automatisme (1) : Réseau de Petri.

Producteur-consommateur : Exemple de réseaux de places et transitions

Cet exemple nous permet d'introduire un modèle plus général qui travaille sur les entiers.

- places (places) → marques(tokens)
- transitions (transitions) → franchissement (firing)

Système de production : Exemple de réseau à marques distinguées

- places : composantes passives
- transitions : composantes actives

Programme non séquentiel : réseau contrôlé par son environnement

- partie commande,
- partie opérative

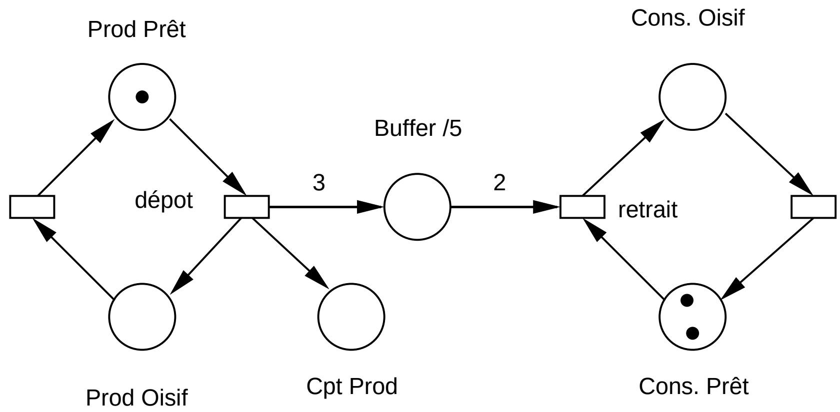

FIG. 3 – Réseau de Places et Transitions

1.2 Définitions de base

Un réseau (net) :

Définition 1. *Un réseau est un triplet* $N =< P, T; F >$ *où*

- P ensemble non vide de p-éléments
- T ensemble non vide de t-éléments
- F relation de flot sur N : $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible N désigne également l'ensemble $P \cup T$. Soit $x \in P \cup T$:

- preset x : ${}^{\circ}x = \{y \in P \cup T | \; yFx\}$
- postset x : $x^{\circ} = \{y \in P \cup T | \; xFy\}$

réseau pur, réseau simple

2 Réseaux de Places et de Transitions (P/T nets)

2.1 Définitions

Définition 2 (P/T net). *Un réseau place transition est un 4-uplet* N *tel que*

$N =< P, T; pre, post >$ et

- P ensemble de places
- T ensemble de transitions
- $pre, post : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$ poids (weight)
  - $pre(p, t)$ pour un arc entrant sur t
  - $post(p, t)$ pour un arc sortant de t

Définition 3 (Marquage). *Un marquage est une application* $M : P \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

Définition 4 (Réseau marqué). *Un réseau marqué* $R =< N; M_0 >$ *est un couple réseau, marquage.*

$M_0 : P \longrightarrow \mathbb{N}$ est dit marquage initial.

2.2 Représentation graphique

- places $\leftrightarrow$ cercles
- transitions $\leftrightarrow$ rectangles
- poids $\leftrightarrow$ entiers associés aux arcs

2.3 Évolutions

Définition 5. *Une transition t est validée pour M (M-enabled)* `ssi`

$$\forall p \in^{\circ} t : M(p) \geq pre(p, t).$$

On note $M \underset{\longrightarrow}{t}$ le fait que t soit validée pour M [1].

Définition 6 (Franchissement). *Une transition validée pour* M **peut être** *franchie (firing of the transition) . Elle conduit au marquage* M' *tel que*

$$(\forall p)\ M'(p) = M(p) - pre(p, t) + post(p, t).$$

On note[2] $M \xrightarrow{t} M'$.

Définition 7 (Ensemble des marquages accessibles). *L'ensemble des marquages accessibles (Reachability set) de* $R =< N; M >$ *est le plus petit ensemble* $A(N; M)$ *tel que :*

- $M \in A(N; M)$ et
- si $M' \in A(N; M) \wedge \exists t : M' \xrightarrow{t} M''$ alors $M'' \in A(N; M)$.

Définition 8 (Graphe des marquages accessibles). *Le graphe des marquages accessibles du réseau marqué* $R =< N; M >$*, noté* $GMA(R)$*, est le graphe orienté* **fini** $< \mathcal{V}, \mathcal{A} >$ *ayant pour ensemble des sommets* $\mathcal{V}$ *l'ensemble des marquages accessibles* $A(R)$ *et pour ensemble d'arcs* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des triplets* $< M, t, M' >$ *tels que* $< M, t, M' > \in \mathcal{A}$ *ssi* $M \xrightarrow{t} M'$.

Noter que le $GMA(R)$ n'est pas défini si l'ensemble des marquages accessibles n'est pas fini.

[1] On trouve dans les livres la notation $M(t >$ qui est pré-LaTeXienne

[2] $M(t > M'$ également.

Construction du GMA

Il faut trouver une construction qui garantisse qu'on n'oublie aucun marquage et aucune transition. Pour l'instant nous supposons que $A(R)$ est fini. Dans ce cas, les algorithmes proposés terminent.

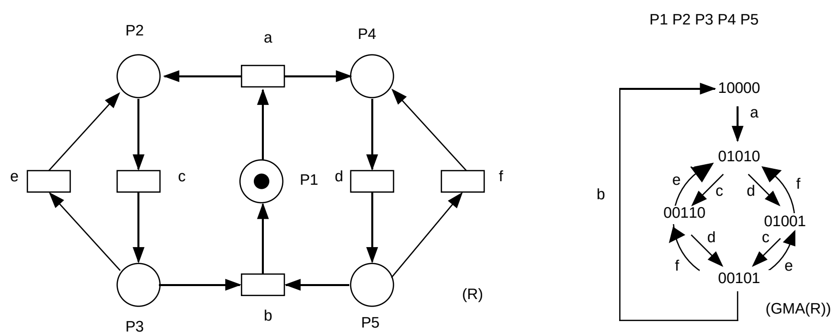

FIG. 4 – Graphe des marquages accessibles

Parcours en largeur :

```
gmaConstr(in $R$ :rdp, out $G$ :gma)
debut
    var $A$ : set //marquages a analyser
    let $R = < N, m >$
    $G.\mathcal{A} \leftarrow \emptyset$ ; $G.\mathcal{V} \leftarrow \emptyset$
    $A \leftarrow \{R.m\}$
    tant que $A \neq \emptyset$ faire
        let $M \in A$
        $A \leftarrow A \setminus \{M\}$
        $G.\mathcal{V} \leftarrow G.\mathcal{V} \cup \{M\}$
        pour tout $t \in N.T$ faire
            si $M \xrightarrow{t} M'$ alors
                si $M' \notin G.\mathcal{V}$ alors
                    $A \leftarrow A \cup \{M'\}$
                fin si
                $G.\mathcal{A} \leftarrow < M, t, M' >$
            fin si
        fait
    fait
fin
```

Exercice : Appliquer l'algorithme au réseau figure 4. Montrer que le GMA de la figure est bien solution.

Définition 9 (Ensemble des séquences de franchissement). *L'ensemble des séquences de franchissements du réseau marqué $R =< N; M >$, noté $SEQ(R)$, est le plus petit sous ensemble de T^* tel que :*

- $\lambda \in SEQ(R) \wedge M \xrightarrow{\lambda} M$,
- $t \in SEQ(R)$ si $\exists M' : M \xrightarrow{t} M'$,
- $s.t \in SEQ(R)$ si $s \in SEQ(R) \wedge \exists M', M'' : M \xrightarrow{s} M' \wedge M' \xrightarrow{t} M''$.

3 Quelques propriétés des P/T nets

Les places peuvent représenter des ressources, le nombre de marques dans une place étant le nombre d'exemplaires de cette ressource. Les transitions peuvent représenter des actions, le franchissement d'une transition correspondant à la réalisation de cette action.

3.1 Propriétés des marquages

Définition 10 (Couverture). M *couvre* M' `ssi` $\forall p \in P : M(p) \geq M'(p)$

Si $\neg(M$ couvre $M') \wedge \neg(M'$ couvre $M)$ alors M et M' sont *incomparables*.

Borne

Définition 11 (Place bornée). $p \in P$ *est bornée dans* R `ssi`

$$(\exists k \in \mathbb{N})\ (\forall M' \in A(R)) : M'(p) \leq k$$

La borne de p dans R est le plus petit entier k vérifiant la propriété précédente.

Définition 12. $P' \subseteq P$ est borné dans R `ssi` $(\forall p \in P')$ p est bornée dans R

Définition 13 (Réseau marqué borné). R est borné `ssi` P est bornée dans R

Définition 14. *Un réseau marqué est dit binaire (safe nets)* `ssi`

$$\forall p \in P : \text{ borne de } p = 1.$$

3.2 Propriétés des franchissements de transitions

Propriété de monotonie

$$(\forall s \in SEQ(R))\ (\forall M, M' \in A(R)) :$$
$$\text{si } M \xrightarrow{s} M' \text{ alors } (\forall M'' \geq M)$$
$$\left(\exists!\ M''' : M'' \xrightarrow{s} M''' \wedge (M''' \geq M') \wedge ((M''' - M') = (M'' - M))\right)$$

Définition 15 (Séquence répétitive). $s \in T^*$ *est une séquence répétitive dans* R *ssi* $M \underset{\longrightarrow}{s} \implies M \underset{\longrightarrow}{s*}$

Si de plus $M \xrightarrow{s} M$ alors s est dite séquence répétitive stationnaire.

Propriété : s est répétitive dans R ssi

$$(\forall M, M') : M \xrightarrow{s} M' \implies M' \geq M$$

Définition 16 (Quasi-vivacité). t *est quasi-vivante pour* M *dans* $< N, M >$ *ssi*

$$(\exists s \in SEQ(< N, M >))\ (\exists M') : M \xrightarrow{s} M' \wedge M' \underset{\longrightarrow}{t}$$

Définition 17 (Vivacité). t *est vivante dans* $R =< N, M >$ *ssi*

$$(\forall M' \in A(R)) : t \text{ est quasi-vivante pour } M' \text{ dans } < N, M' >$$

Conséquence : t peut être franchie un nombre infini de fois.

Définition 18. $R =< N, M >$ *est vivant ssi* $(\forall t \in T) : t$ *vivante dans* R.

Blocages (deadlocks) :

$$M \text{ est un blocage ssi } (\forall t \in T)\ \neg M \underset{\longrightarrow}{t}$$

Exercice : rechercher le graphe des marquages accessibles du réseau Fig.5. Mettre en évidence le blocage.

Autres propriétés :

Equité (fairness) ; Problèmes de famine (starvation)

Exercice : rechercher le graphe des marquages accessibles du réseau Fig.6. Constater qu'il est vivant et borné. Mettre en évidence une famine.

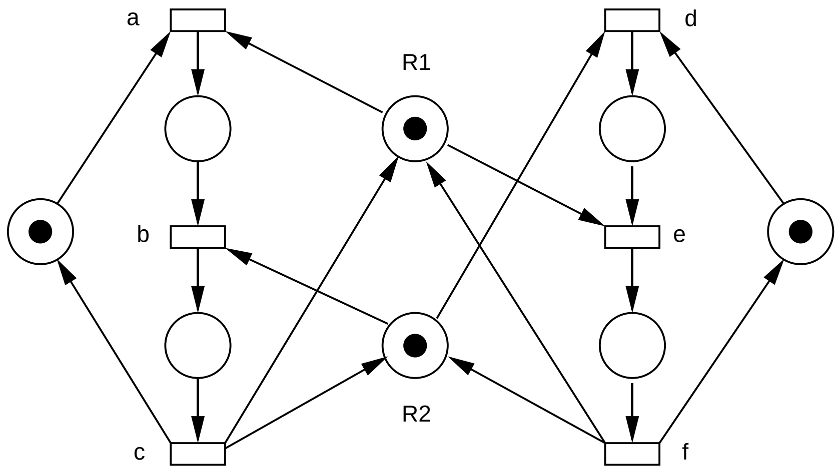

FIG. 5 – Réseau avec blocage

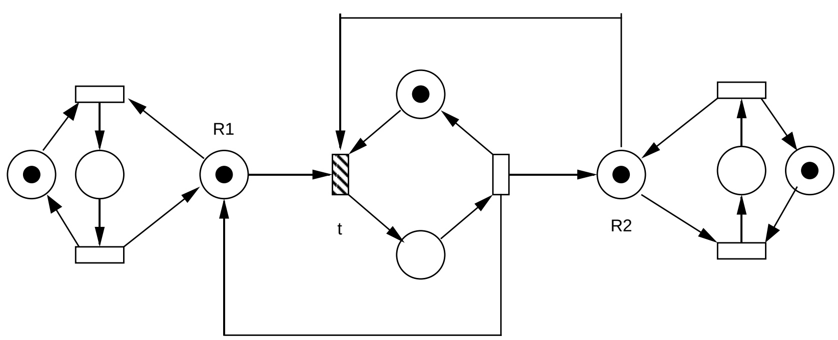

FIG. 6 – Réseau avec famine

4 Analyse des propriétés des Réseaux de Petri

Il existe des méthodes dynamiques qui sont basées sur l'étude de toutes les évolutions possibles et des méthodes statiques qui exploitent la structure du réseau. En pratique on essaie de combiner les deux.

4.1 Analyse par le graphe des marquages

Pour un réseau borné, partant du marquage initial, on peut générer les marquages de façon exhaustive, à condition que ce nombre ne soit pas trop grand.

Pour savoir si un réseau est borné, il existe un algorithme (Karp et Miller) qui permet de conclure. Nous ne l'étudierons pas dans le détail, par contre il a été programmé et pourra être utilisé.

La génération des marquages accessibles doit se faire d'une manière systématique, afin de ne pas perdre de marquages ou de transitions. Le graphe des marquages peut être généré par un parcours en largeur (étudié en section 2.3) ou en profondeur (voir en TD).

Borne : Il est clair que si on arrive à construire ce graphe, le réseau est forcément *borné*.

Vivacité : En ce qui concerne la vivacité il y a un théorème applicable aux réseaux bornés :

pour un réseau R borné, t est vivante dans R `ssi` elle est franchissable dans toute *composante fortement connexe pendante* du graphe des marquages accessibles.

4.2 Analyse statique basée sur l'algèbre linéaire

Définitions

Matrice d'incidence : Pour un réseau $N =< P, T, pre, post >$, la matrice d'incidence **C** est définie par :

$$\mathbf{C} \in \mathbb{Z}^{|P| \times |T|} \texttt{ telle que } \mathbf{C}(p,t) = post(p,t) - pre(p,t).$$

- dimensions de **C** : $\dim(\mathbf{C}) = (|P|, |T|)$
- image de **C** : $R_{\mathbf{C}} = \{M \in \mathbb{Z}^{|P|} | \ \exists s \in \mathbb{Z}^{|T|} : \mathbf{C}.s = M\}$
- noyau de **C** : $N_{\mathbf{C}} = \{s \in \mathbb{Z}^{|T|} | \ \mathbf{C}.s = 0\}$
- rang de **C** : $\text{rang}(\mathbf{C}) = \dim(R_{\mathbf{C}})$

Marquage : au marquage $M \in \mathbb{N}^P$, on associe un vecteur $\mathbf{M} \in \mathbb{N}^{|P|}$.

Séquence de franchissements : Pour une séquence $s \in T^*$ on définit son image commutative $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^{|T|}$ par

$$(\forall t \in T) \ \mathbf{s}(t) = \#s_t \text{ nb d'occurrences de } t \text{ dans } s$$

L'image commutative s est représentée par un vecteur $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^{|T|}$.

Propriétés

Équation fondamentale :

$$M \xrightarrow{s} M' \implies \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{C}.\mathbf{s}$$

Accessibilité : $A(N, M_0) \subseteq R_{\mathbf{C}}$

Flots :

- p-flots : $N_{\mathbf{C}^\top}$
- t-flots : $N_{\mathbf{C}}$

Semi-Flots : idem, mais les composantes sont dans $\mathbb{N}$.

Invariants linéaires de places :

$$\text{pour } R =< N, M_0 > \text{ et } \mathbf{f} \in N_{\mathbf{C}^\top}\ \mathbf{f}^\top.\mathbf{M} = \mathbf{f}^\top.\mathbf{M}_0 \text{ (invariant)}$$

Composantes répétitives stationnaires : s composante répétitive stationnaire $\Longrightarrow$ s est un t-semi-flot.

À partir des invariants linéaires de places, on peut déduire des propriétés de bornes (voir les TD).