Théorie ergodique

B. CESSAC

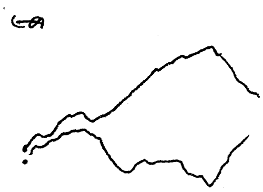
Université de Nice

I] Mesures

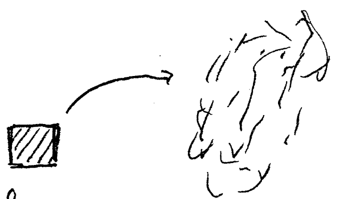
1) Point de vue "mesure"

- <u>Système chaotique</u> : Trajectoires typiques extrêmement complexes
  Difficiles à connaître (sauf dynamique symbolique)
  Pas d'équation explicite en général.

- <u>Sensibilité aux conditions initiales</u> : La plus petite erreur dans la condition initiale conduit à court terme à des trajectoires complètement différentes.



- <u>Expérience en physique</u> : La condition initiale est connue avec une précision limitée → Reproductibilité des expériences ?



volume
initial
→ incertitude
sur la C I

<u>Ex</u> : Gaz parfait. Déplacer un seul atome change complètement la trajectoire future <u>MAIS</u> le comportement . <u>moyen</u> . <u>macroscopique</u> est inchangé.

→ Substituer au point de vue "trajectoires" un point de vue "statistique".

μ_0 : Probabilité initiale

$\mu_0(A)$: Probabilité de tirer une condition initiale dans l'ensemble A.

<u>Hyp</u> : μ_0 a une densité $\qquad \mu_0(dx) = \rho(x)\,dx$

ρ_0 : fonction $\in L^1(dx)$

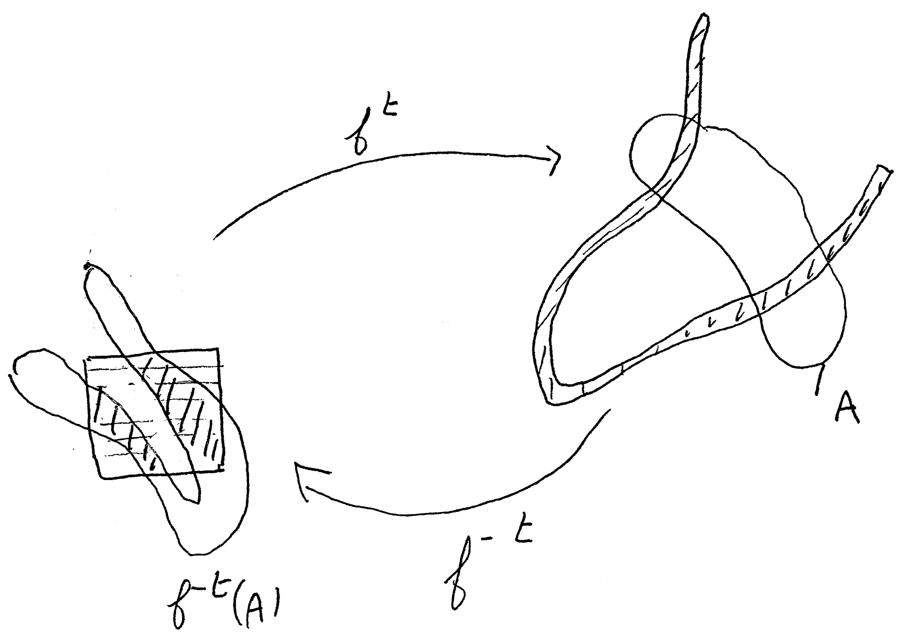
<u>pt de vue équivalent</u> : On tire N_0 conditions initiales avec la proba μ_0 et on étudie la "statistique des trajectoires" quand $N_0 \to +\infty$.

$$\rho_0(X) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \delta(X - X_0^i)\, P(X_0^i)$$

<u>Pb</u> Quelle est la probabilité qu'une trajectoire soit dans un ensemble A au temps t ?

$$\mu_t(A) \overset{\text{def}}{=} \text{Prob}\,(f^t(X) \in A) = \text{Prob}\left[X \in f^{-t}(A)\right] = \int_{f^{-t}(A)} \mu_0(dx) = \int_{f^{-t}(A)} \rho_0(x)\,dx$$

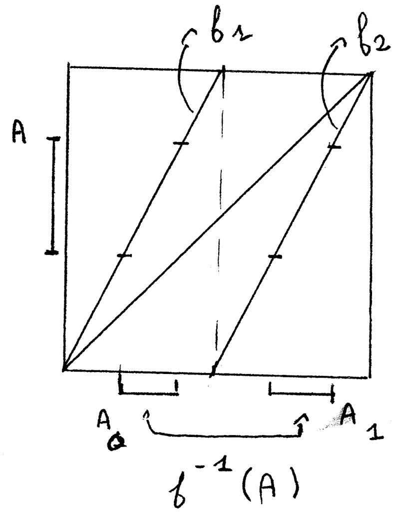
$$= \lim_{N_0 \to \infty} \frac{N_t(A)}{N_0}$$



$\underline{Ex\ 1}$ $x_{t+1} = 2x \mod 1$; $\mu_0(dx) = dx$ $\rho_0 = \Pi_{[0,1]}$

$f_1(x) = 2x$

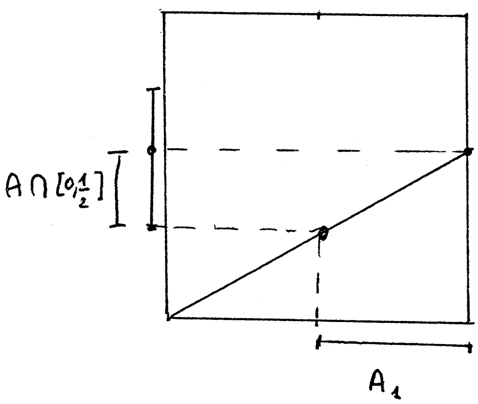
$f_2(x) = 2x - 1$



$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}\,(f(X) \in A) \\
&= \mathrm{Prob}(X \in A_0 \cup A_1) \\
&= \mathrm{Prob}(X \in A_0) + \mathrm{Prob}(X \in A_1) \\
&= \ell(A_0) + \ell(A_1) \\
&= \frac{1}{2}\ell(A) + \frac{1}{2}\ell(A) = \ell(A) \\
&= \mathrm{Prob}\,(X \in A)
\end{aligned}$$

(La mesure de Lebesgue est préservée ici).

$\underline{Ex\ 2}$ $x_{t+1} = \frac{1}{2} x$ $x \in [0,1]$ $\mu_0(dx) = dx$ $\rho_0 = \Pi_{[0,1]}$



$\forall A \subset [1/2, 1]$ $\mathrm{Prob}(f(x) \in A) = 0$

$A \cap [0, 1/2] \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}\,[f(X) \in A] = \mathrm{Prob}[X \in A_1] \\
&= \ell(A_1) = 2\,\ell\,(A \cap [0, 1/2])
\end{aligned}$$

$$\boxed{P\rho_0(y) = 2\,\rho_0(f^{-1}(y))\,\chi(y \in [0, 1/2])}$$

Opérateur de Perron - Frobenius

ρ_t : densité de μ_t
fonction $\in L^1$

$$\mu_t(A) = \int_A \rho_t(Y)\,dY$$

↳ ou $d\mu_0(x)$

$\hat{P}^t$: opérateur de P_F :

$$\boxed{\rho_t \overset{\text{def}}{=} \hat{P}^t \rho_0}$$

opérateur d'évolution de la densité

$$\mu_t(A) = \text{Prob}[f^t x \in A] = \text{Prob}[Y = f^t x \in A]$$

$$= \int_A \left[\int_{\Omega} \delta(Y - \Phi^t x)\rho_0(x)dx\right] dY = \int_A \rho_t(Y)\,dY$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{P}^t \rho_0(X) = \int_{\Omega} \delta(X - \Phi^t Y)\,\rho_0(Y)\,dY}$$

Ex $d=1$ $\quad A =]-\infty, y]$: $\mu_t(A) = \text{Prob}[f^t x < y] = F[y]$

$f \nearrow$ $\quad \longrightarrow \quad F_Y(y) = \text{Prob}[x < f^{-t} y] = F_X[f^{-t} y]$

$$\rho_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dx} F_X(f^{-t} y)\frac{d}{d} = \frac{\rho_X(f^{-t} y)}{f^{t\prime}(f^{-t} y)}$$

Cas général

$$\boxed{\hat{P}^t \rho_0(y) = \sum_{x = f^{-t}(y)} \frac{\rho_0(x)}{|\det Df^t(x)|}}$$

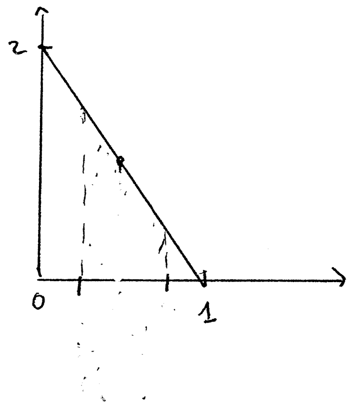
Ex 1

$$P\rho_0(y) = \rho_1(y) = \frac{1}{2}\rho_0(f_1^{-1}(y)) + \frac{1}{2}\rho_0(f_2^{-1}(y))$$

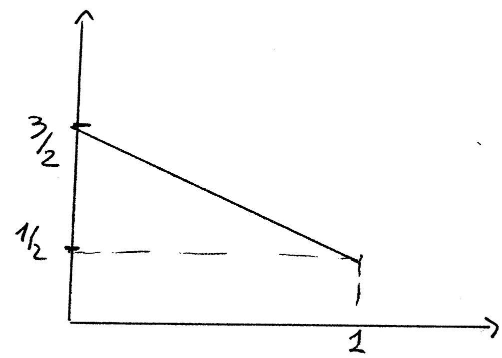
Donc si $\rho_0 = 1$ $\quad P\rho_0 = \rho_0$ densité invariante

Rq : $\rho_0(x) = -2x + 2$

$$\rho_1(y) = \frac{1}{2}\rho_0(f_1^{-1}(y)) + \frac{1}{2}\rho_0(f_2^{-1}(y))$$
$$= \frac{1}{2}\rho_0(y/2) + 1/2\,\rho_0\left(\frac{y+1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2\left(\frac{y}{2}\right)+2\right) + \frac{1}{2}\left(-2\left(\frac{y+1}{2}\right)+2\right)$$
$$= -y + 3/2$$



non invariante



Ex 3 : t continu, F autonome

Eq. de Liouville $\quad \partial_t \rho + \mathrm{div}(F\rho) = 0 \iff \partial_t \rho = \hat{L}\rho$

où $\hat{L} = -\mathrm{div}(F\,\cdot)$ opérateur de Liouville

$\Rightarrow$ On pose $\quad e^{-\hat{L}t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\hat{L})^n}{n!} t^n \quad ; \quad [e^{-\hat{L}t}, \hat{L}] = 0$

$e^{-\hat{L}t}.0 = 0$

$$e^{-\hat{L}t}(\partial_t \rho - \hat{L}\rho) = 0 = \partial_t(e^{-\hat{L}t}\rho)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\hat{L}t}\rho_t = \rho_0 \quad \Rightarrow$$

$$\rho_t = e^{+\hat{L}t}\rho_0$$

$$\boxed{\hat{P}_t = e^{Lt}}$$

Opérateur de Koopman

Soit A une observable. On définit l'opérateur de Koopman (opérateur d'évolution) comme :

$$\boxed{(U^t A)(X) = A(f^t X)}$$

C'est un opérateur linéaire. Par ailleurs soit

$$\langle A \rangle_t = \int_\Omega A(Y)\, \rho_t(Y)\, dY$$

la valeur, moyennée sur les trajectoires, de A, au temps t.

On a :

$$\langle A \rangle_t = \int_\Omega A(Y)\, \hat{P}^t \rho_0(Y)\, dY = \langle \hat{P}^t \rho_0, A \rangle = \langle \rho_0, \hat{P}^{+t} A \rangle$$

et

$$\langle A \rangle_t = \int_\Omega A(f^t X)\, \rho_0(X)\, dX = \int_\Omega (U^t A)(X)\, \rho_0(X)\, dX = \langle \rho_0, \hat{U}^t A \rangle$$

Donc $\boxed{U^t = \hat{P}^{+t}}$

Enfin :

$$\langle A \rangle_t = \int_\Omega A(f^t X)\, \rho_0(X)\, dX = \int_\Omega \left[\int_\Omega \delta(Y - f^t X)\, A(Y)\, dY \right] \rho_0(X)\, dX$$

direct

$$\boxed{A(f^t X) = \hat{P}^{+t} A(X) = \int_\Omega \delta(Y - f^t X)\, A(Y)\, dY}$$

Propriétés

* $(U^s \cdot U^t \cdot A)x = U^s(A(f^t x)) = A(f^{s+t} x) = U^{s+t} A(x)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U^s \circ U^t = U^{s+t}}$$

* $U^0 = I$

$\Rightarrow$ $\{U^t\}$ est un semi-groupe à ~~un~~ paramètre

De plus, si la dynamique est inversible ($\exists f^{-t}$ t.q. $f^t \circ f^{-t} = I$) alors:

* $\exists\, U^{-t}$, avec $U^{-t}A(x) = A(f^{-t}x)$ t.q. $U^{-t} \circ U^t = I$.

$\{U^t\}$ est alors un groupe à un paramètre

Pour $\hat{P}^t$ on doit se restreindre à l'espace des densités par rapport à une mesure invariante μ

(la même)

Def : Une mesure μ est invariante ssi $\forall A \in \mathcal{F}$, $\boxed{\mu(f^{-t}A) = \mu(A)}$

$\Leftrightarrow$ $\quad \text{Prob}[f^t(x) \in A] = \text{Prob}[X \in A]$

$\Leftrightarrow$ La probabilité (relativement à μ) d'occupation de A par les trajectoires du syst. dyn ne change pas avec le temps

Pour la densité : $\boxed{\hat{P}^t \rho = \rho}$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $\boxed{\begin{array}{l} \forall \varphi \text{ observable} \quad \langle \varphi \rangle_t = \langle \varphi \rangle_0 \\ \forall t \end{array}}$

$\Rightarrow$ ρ est un état propre de $\hat{P}$ avec la valeur propre 1.

Pour Liouville $\partial_t \rho = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} F\rho = 0}$

Th de Krylov - Bogolubov :

Si l'espace est compact et f continue, il y a au moins une mesure invariante

Exemples

1) **Pendule**

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \qquad F(X) = \begin{cases} y \\ -\sin x \end{cases} \qquad \operatorname{div} F = 0$$

$\rho = 1$ (Liouville) $\Rightarrow \partial_t \rho + \operatorname{div} F\rho = \partial_t \rho + \rho \operatorname{div} F = 0 \Rightarrow \rho$ invariante

Mais toute mesure uniforme sur une surface d'énergie constante est invariante $\quad \delta_E(X)$

$\rightarrow$ infinité de mesures invariantes

__Ex 2__ $\qquad x_{t+1} = \frac{1}{2} x_t \qquad \to \qquad \delta_0$ est invariante (singulière)

__Ex 3__ $\qquad x_{t+1} = 2x_t \pmod 1$

On a vu que la mesure de Lebesgue est invariante

__Mais__ il y en a une infinité d'autres. En effet la multiplication par 2 mod 1 est topologiquement équivalente au décalage à gauche de bit.

On définit une nouvelle proba μ_p t.q. $\mu_p\{0\} = p$; $\mu_p\{1\} = 1-p$.

En d'autres termes, au lieu de choisir les points initiaux avec proba uniforme, on les choisit avec proba μ_p. Si $A = [a_0 \cdots a_k]$ (cylindre) $a_i = \pm 1$

alors $\boxed{\mu_p[A] = p^{\alpha(A)} (1-p)^{\beta(A)}}$

$\alpha(A) =$ nombre de a_i égaux à 0
$\beta(A) =$ " " " à 1
$\alpha(A) + \beta(A) = 1$

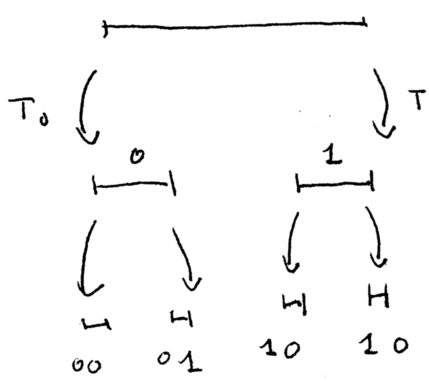
→ on définit ainsi une infinité de mesures (par chaque p) qui sont invariantes (mesures de Bernoulli)

$$f^{-1}(A) = [0 a_0 \cdots a_k] \cup [1 a_0 \cdots a_k]$$

$$\mu(f^{-1}(A)) = p \times \left(p^{\alpha(A)} (1-p)^{\beta(A)}\right) + (1-p)\left(p^{\alpha(A)} (1-p)^{\beta(A)}\right) = \mu(A)$$

Ces mesures sont singulières par rapport à Lebesgue (qui correspond à $p = 1/2$)

__Ex 4__



$T_0(x) = \frac{1}{3} x$

$T_1(x) = \frac{1}{3} x + 1/3$

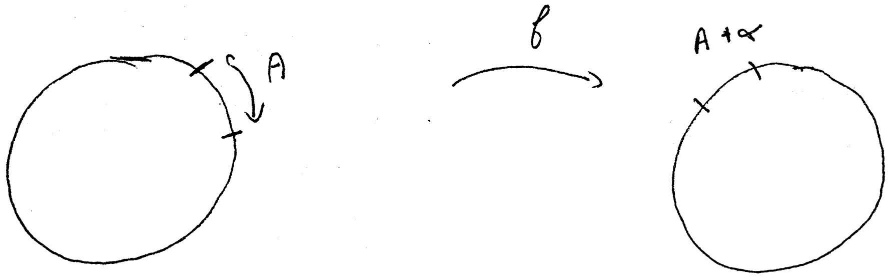
Mesure invariante sur le Cantor

→ singulière.

Ex 5 : Rotation sur le cercle

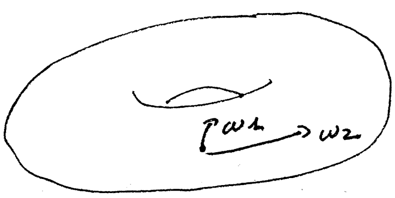
$x \longrightarrow x + \alpha \mod 1$

La mesure de Lebesgue est invariante :

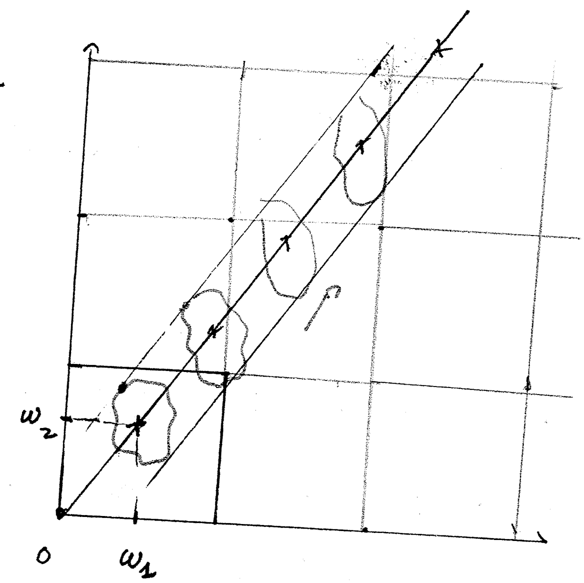


Ex 6 : Rotation sur le tore T^n

$\vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \vec{\omega}$ $\qquad \vec{\omega} = \{\omega_i\}_{i=1}^{N}$



$\Longleftrightarrow$



Rq : si $\exists\, p, q$ tq $\omega_1 p + \omega_2 q = 0 \mod 1$ $\Rightarrow$ droite intersecte un point du quadrillage $\Longleftrightarrow$ $\frac{\omega_2}{\omega_1} = p/q$ $\Rightarrow$ rationnel.

$\rightarrow$ rotation rationnelle $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \vec{m}$ $\quad \vec{\omega} \cdot \vec{m} = 0$

Ex 7 : "Chat d'Arnold"

$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \det f = 1 \Rightarrow$ preserve Lebesgue.

Système dynamique abstrait

Ω : espace de phase

$\mathcal{F}$: ensembles mesurables (tribu) :

* $\emptyset \in \mathcal{F}$
* $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
* $\{A_k\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \underset{k \text{ dénombr}}{\bigcap} A_k \in \mathcal{F}$

Ex tribu de Borel, engendrée par les ouverts

f^t : flot ou semi-flot

μ : invariante par f^t.

$(\Omega, \mathcal{F}, f^t, \mu)$ est appelé système dynamique abstrait

Def : On appelle endomorphisme sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ une application $f : \Omega \circlearrowleft$ surjective (pas nécessairement injective) t.q.

$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$

où $A \in \mathcal{F}$ et $f^{-1} A \in \mathcal{F}$

→ si f^t est un semi-flot on a un endomorphisme

Def : Si f^t est un flot on a un automorphisme.

Automorphisme et endomorphisme sont les objets de base de la théorie ergodique.

Mesures absolument continues – mesures étrangères

Def Une mesure μ_2 est absolument continue par rapport à μ_1 si

$\forall A \in \mathcal{A}$ $\quad \mu_1(A)=0 \Rightarrow \mu_2(A)=0 \quad (\mu_2 \ll \mu_1)$

Les ensembles "négligeables" sont les mêmes pour les 2 mesures, ou encore ces mesures "voient" le même type d'objets.

Ex $\quad dx$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$ ne voient pas les points.

δ_0 voit seulement le point 0 $\rightarrow$ étrangère à dx.

2 mesures sont dites étrangères si elles ne sont pas absolument continues i.e

$$\boxed{\exists A \text{ tq } \mu_1(A)=1 \text{ et } \mu_2(\bar{A})=1}$$

Ex 1: δ_0 et dx,

Ex 2 $\quad 2x \mod 1$

μ_p et $\mu_{1/2}$ sont étrangères pour $p \neq 1/2$

En effet soit $V_\alpha = \{x \in \Omega \mid \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} a_i = \alpha\}$ $\quad \{a_i\}$ codage binaire de x

Par le th. ergodique $\quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} a_i \rightarrow 1-p \quad$ p.s.

$\Rightarrow \mu_p(V_{1-p}) = 1 \quad$ donc pour $p \neq p'$

$$\mu_p(V_{1-p}) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{p'}(\bar{V}_{1-p}) = \mu_{p'}(V_{1-p'}) = 0$$

Rq: Soit $V_{m,n} = \{x \in \Omega \mid |\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - \alpha| < 1/n\}$ alors

$V_\alpha = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{j \geq 1} \bigcap_{m \geq j} V_{m,n} \quad (\forall n, \exists j, \forall m \geq j \; |\frac{1}{m}\sum a_i - \alpha| < \frac{1}{n})$

Rq : Partant de la mesure de Lebesgue on peut très bien tendre asymptotiquement vers une mesure singulière !! L'objet limite n'est pas "vu" par la mesure initiale.

(l'espace des mesures a.c. n'est pas fermé)

Théorème de Radon - Nikodym

Si $\mu_2 \ll \mu_1$ alors il existe unique (mod 0) fonction

$$\rho \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu_1) \quad t.q. \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \mu_2(B) = \int_B \rho \, d\mu_1$$

ρ est appelée dérivée de Radon - Nikodym ou densité de μ_2 / μ_1

On note $\boxed{\rho = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}}$

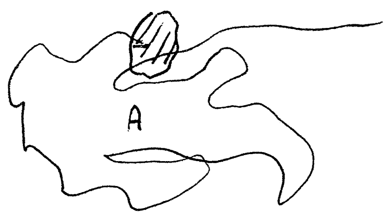
Rq : Dans ce sens là δ n'est pas une densité

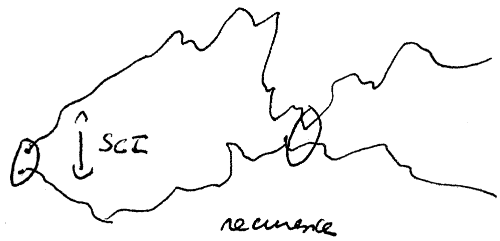
Théorème de récurrence de Poincaré

Soit μ une mesure invariante, $\forall A \in \mathfrak{F}$, μ presque tous les points de A reviennent dans A après un certain temps.

$\mu(A) > 0$

$$\boxed{\mu(\{x \in A \mid \forall t \quad T^t(x) \notin A\}) = 0}$$





SCI : 2 trajectoires initialement proches s'écartent localement exponentiellement vite sur un temps borné.

Recurrence : Elles reviennent arbitrairement près l'une de l'autre, infiniment souvent.

Soit $*)$ $\bar{A} \overset{\text{def}}{=} A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(\Omega \setminus A)\right)$; $T^{-n}(\bar{A}) \cap T^{-m}(\bar{A}) = \emptyset$; $\infty > \mu(\Omega) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}\bar{A}\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\bar{A}) \Rightarrow \mu(\bar{A}) = 0 \, *$

μ invariante

Exemple $2x \bmod 1$ A blocs de bit $\rightarrow$ Presque toute séquence issue de A repasse dans A

Pour presque toute séquence on a une infinité de sous-blocs de bit égaux à ceux de A, i.e. $\forall t, \exists T > t$ t.q. $f^t(x) \in A$, μ.p.t. x.

$M = \bigcap_{t=0}^{\infty} \bigcup_{T=t}^{\infty} f^{-t}(A)$; $\mu(f^{-t}A) = \mu(A) \Rightarrow \sum_{t=0}^{+\infty} \mu(f^{-t}A) \neq \infty$

$\Rightarrow \mu(M) \rightarrow 1$

par Borel Cantelli

Théorème de Birkhoff

Soit μ une mesure invariante, φ observable $\varphi \in L^1(\mathcal{M}, \mu)$

alors $\varphi_T(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \varphi(T^t x)$ existe pour μ-presque

tout x.

De plus $\boxed{\int \varphi_T(x)\, d\mu = \int \varphi\, d\mu}$

Rq : Si la limite existe on peut associer à la moyenne temporelle :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \varphi(f^t x) = \overline{\varphi}_{\cancel{x}}$$

une moyenne d'ensemble $\langle \varphi \rangle_{\cancel{x}} = \int_{\mathcal{M}} \varphi(\cancel{y})\, d\mu_{\cancel{x}}(\cancel{y})$ par le théorème de représentation de Riesz.

Pb : La moyenne dépend à priori du point initial x.

Ex : pendule $\qquad E(\cancel{x}) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2$ (energie)

L'énergie est constante sur les trajectoires $\Rightarrow \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} E(f^t x) = E(x)$

mais dépend du point initial.

Rq : on peut trouver des cas où la limite existe p. p. Δ. et néanmoins n'existe pas sur un ensemble partout dense de Ω.

Soit $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sur le tore.

2 valeurs propres $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ et vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ -(1-\lambda_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -(1-\lambda_2) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La droite $\begin{pmatrix} x \\ (\lambda_2 - 1)x \end{pmatrix}$ est invariante sur $\mathbb{R}^2$ et la courbe correspondante invariante sur le tore.

$\lambda_2 - 1$ est irrationnel $\Rightarrow$ la courbe est dense sur le tore

$$\forall X \in \gamma, \quad f^m X = \lambda_2^n X \to 0$$

Soit $\varphi = e^{2i\pi x}$ (analytique)

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \varphi(f^n X) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{2i\pi \lambda_2^n x} \to 1 = \bar{f}(x)$$

Par ailleurs $\langle f \rangle = \int f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 e^{2i\pi x}\,dx = 0$

Donc $\boxed{\bar{f}(x) \neq \langle f \rangle}$ sur un ensemble partout dense

Structure de l'ensemble des mesures invariantes :

Topologie faible* :

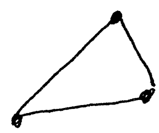
$\{\mu_n\}$ suite de mesures sur $\mathcal{M}$ compact.

def : $\mu_n \underset{w^*}{\longrightarrow} \mu \iff \forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}) \quad \int_{\mathcal{M}} \varphi \, d\mu_n \longrightarrow \int \varphi \, d\mu$

Prop : Si $\mathcal{M}$ est compact l'espace des mesures de Borel ~~est~~ convexe, compact pour w^*, non vide

Soit $\mathcal{M}_f(\mathcal{M})$ l'ensemble des mesures invariantes par f.

Prop : $\mathcal{M}_f$ est convexe, fermé, donc compact.



Th de décomposition ergodique

Toute mesure (de Borel) invariante par $f : \mathcal{M} \circlearrowleft$, $\mathcal{M}$ métrisable, compact, peut être décomposée comme suit. Il existe une partition (mod 0) de $\mathcal{M}$ en ensembles invariants $\mathcal{M}_\alpha$, $\alpha \in A$, A espace de Lebesgue, où chaque $\mathcal{M}_\alpha$ porte une mesure (de Borel) invariante μ_α, t.q., $\forall \varphi$

$$\int \varphi \, d\mu = \iint \varphi \, d\mu_\alpha \, d\alpha$$

$\boxed{\mu_\alpha \iff \text{états extrémaux}}$

Rq : Espace de Lebesgue $\rightarrow$ $d\alpha$ a une partie continue et une partie purement ponctuelle $\quad (d\alpha \sim dx + \sum \delta_{\alpha_i}(x))$

Ex 1 : $d\alpha = \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \Rightarrow \int \varphi \, d\mu = \beta_1 \int \varphi \, d\mu_1 + \beta_2 \int \varphi \, d\mu_2$

$\Rightarrow \mu_1 = \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2 \qquad \beta_1 + \beta_2 = 1$

décomposition de Choquet μ_1, μ_2 ergodiques

Ex 2 Pendule $\int \varphi \, dx = \int_E \left(\int_{E = \text{cste}} \varphi(x) \, dx \right) dE$

Mesures ergodiques

Def : Une mesure invariante est ergodique ssi tout ensemble f invariant a pour mesure 0 ou 1

$f^t(A) = A \quad \forall t \Rightarrow \mu(A) = 0$ ou 1

↳ tout ce que μ peut voir

↳ ce que μ ne voit pas.

Ex 1) $2x \bmod 1$ Ensembles invariants $[0,1]$, $\{0\}$, $\{1\}$

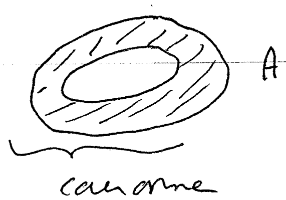
$\mu = leb$ $\quad 1 \quad 0 \quad 0$

$\rightarrow \mu$ est ergodique

2) $\frac{x}{2} \bmod 1$ Ensemble invariant $\{0\}$

$\mu = \delta_0$ $\quad 1 \quad$ ergodique

3) Pendule



A invariant

$leb(A) \neq 0, 1$ non ergodique

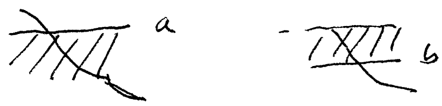
4) Mesures de Bernoulli pour $2x \bmod 1$

toutes ergodiques mais toutes étrangères.

Def 2 : Une mesure μ est ergodique ssi toute fonction f invariante est μ presque-sûrement constante

$$\forall \varphi, \quad \varphi(f^t x) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \text{ cste } \mu\text{.p.s.}$$

* $1 \Rightarrow 2$: φ invariante $\Rightarrow$ $C_a = \{ x \mid \varphi(x) < a \}$ est invariante $\Rightarrow$ $\mu(C_a) = 0$ ou 1, vrai $\forall a$ $\Rightarrow$ $\varphi =$ cste p.s. *



etc. ...

$2 \Rightarrow 1$: A invariant $\rightarrow$ χ_A est p.s. constante $\Rightarrow$ pour μ p.t. x $\chi_A = 0$ ou 1

$\Rightarrow \mu(A) = 0$ ou 1 *

Ex Pendule $\quad E(x)$ est f invariante mais pas cste.

Def 3 Une mesure est ergodique ssi $\forall \varphi \in L^1(\mathcal{M}, \mu)$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f(\varphi^t x) = \int \varphi(y)\, \mu(dy)$$

pour μ-presque-tout x.

La moyenne temporelle d'un point μ-typique égale la moyenne spatiale

* Birkhoff implique que la moyenne $\bar{\varphi}(x)$ existe p.s. Elle est f invariante $\Rightarrow$ cste p.s $\Rightarrow$ $\bar{\varphi}(x) = \int \varphi \, d\mu$

Rotation sur le cercle

$x \to x + \alpha \mod 1$, $\mu \to$ lebesgue

1) Si α est rationnel, $\alpha = p/q$ la rotation n'est pas ergodique

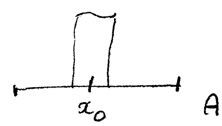
* $\varphi(x) = e^{2i\pi q x}$ est invariante $\varphi(fx) = e^{2i\pi q(x+p/q)} = \varphi(x)$

non constante et mesurable *

2) Si α est irrationnel, μ est ergodique

* A invariant, $\exists x_0$, t.q. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$, t.q.

$$\underbrace{\frac{\mu[A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[]}{2\delta}}_{\text{densité en } x_0 \text{ conditionnelle}} > 1 - \varepsilon$$



$\mu(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$
$= \rho(x_0) 2\delta \sim 2\delta$

$x_n = f^n x_0$ sont denses sur le cercle. En effet,

· les x_n sont distincts ($x_n = x_0 + n\alpha$, $x_m = x_0 + m\alpha \Rightarrow x_n - x_m = (n-m)\alpha \neq 0$
car α irrationnel).

$\Rightarrow$ suite infinie de points ... on peut extraire une sous suite convergente (S^1 compact)

i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n, m$ t.q. $|f^n x_0 - f^m x_0| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ définit un intervalle $[x_n, x_m]$ translaté par ε, qui preserve la distance $\Rightarrow$ découpe le tore en intervalle de longueur inférieure à ε *

orbite étant dense. $\exists N > 0$, $\forall x \in S^1$, $\exists x_n$ $(0 \leq n < N)$ t.q. $|x - x_n| < \delta$ $\Rightarrow$ les intervalles $]x_n - \delta, x_n + \delta[$ $n = 0 \dots N-1$ recouvrent M.

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu[A \cap]x_n - \delta, x_n + \delta[]}{2\delta} > 1 - \varepsilon \qquad (\mu \text{ invariante})$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) > 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \mu(A) \qquad \varepsilon \text{ arbitraire}$$

<u>Ex 2</u> <u>Rotation sur le tore</u> Si $\vec{m}\,\vec{\omega} \neq 0$ alors la translation est ergodique

* X invariante. Achet un serie de Fourier $X(x_1 \dots x_n) = \sum_{m_1 \dots m_n} X_{m_1 \dots m_n} e^{i 2\pi \vec{m} . \vec{x}}$

X invariante $\Rightarrow$ $X(\vec{x} + \vec{\omega}) = X(\vec{x}) \Rightarrow$

$$\sum_{m_1 \dots m_n} X_{m_1 - m_n} e^{i 2\pi \vec{\omega} . \vec{m}} e^{i \vec{m} . \vec{x}} = \sum_{m_1 \dots m_n} X_{m_1 \dots m_n} e^{i 2\pi \vec{m} . \vec{x}}, \quad \forall \vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad X_{m_1 \dots m_n} = e^{2\pi i \vec{\omega} . \vec{m}} X_{m_1 \dots m_n}$$

si $\vec{\omega} . \vec{m} \neq \vec{0}$ alors $X_{m_1 \dots m_n} = 0$ $\Rightarrow$ X p.s. constante.

<u>Ex 3</u> <u>chat.</u>

Plus généralement :

$\boxed{\text{Tout automorphisme du tore, } f(X) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } \det L = \pm 1 \text{ et } \lambda_i \text{ réelles, } \neq \pm 1 \text{ (hyperbolique) est ergodique (et mélangeant).}}$

Rq : a, b, c, d $\boxed{\text{entiers}}$

Soit $\chi_{m,n}(x,y) = \exp\left(2i\pi(mx+ny)\right)$ ("caractères")

$$\chi_{m,n}(f(x,y)) = \exp\left[2i\pi\left(m(ax+by)+n(cx+dy)\right)\right]$$

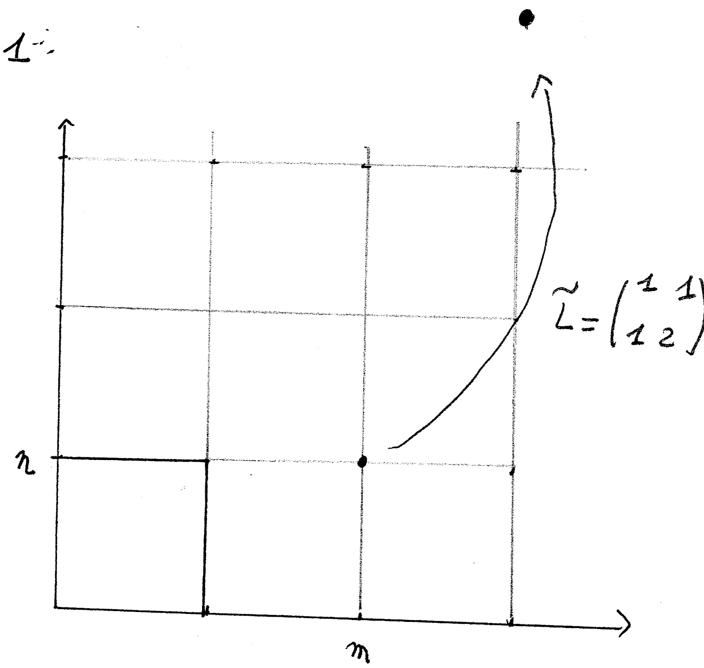
$$= \exp\left[2i\pi\left((am+cn)x+(bm+dn)y\right)\right] = \chi_{am+cn,\, bm+dn}(x,y) = \chi_{\tilde{L}\binom{a}{b}}$$

Si on identifie $\chi_{m,n}$ à (m,n) points du réseau $\mathbb{Z}^2$

alors $\chi_{m,n}(f(x,y)) \longrightarrow \chi_{\tilde{L}(m,n)}$ $\Rightarrow$ l'application induite par f agit sur le réseau par $\tilde{L}$.

$$\Rightarrow \chi_{m,n}(f^t(x,y)) \to \chi_{\tilde{L}^t(m,n)}$$

Comme les valeurs propres sont réelles, $|\lambda_i| \lessgtr 1$ (hyperbolique) il s'ensuit que l'orbite de tout point (m,n) sous $\tilde{L}$ explose sauf pour $m = n = 0$.



Soit $\varphi(x,y)$ invariante alors, comme

$$\varphi(x,y) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \varphi_{m,n}\,\chi_{m,n}(x,y)$$

on a :

$$\varphi(f(x,y)) = \sum_{m,n} \varphi_{m,n}\,\chi_{\tilde{L}(m,n)}(x,y) = \sum_{m,n} \varphi_{\tilde{L}^{-1}(m,n)}\,\chi_{m,n}(x,y) \Rightarrow \boxed{\varphi_{m,n} = \varphi_{\tilde{L}^{-1}(m,n)}}$$

qui n'est possible que si :

1) $\varphi_{m,n} = 0$ $\quad \forall (m,n) \neq 0,0$ $\Rightarrow$ φ constante

2) $\varphi_{m,n} = \text{cste}$ pour tous les points de l'orbite $\tilde{L}^t(m,n)$ mais $|\varphi_{m,n}| \xrightarrow[m^2+n^2\to\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ impossible $\vdash$ $\boxed{\text{ergodique}}$

Corollaire : Si E est discret, μ ergodique, la [illegible] de tout ensemble de mesure positive est tout l'espace, sauf un ensemble de mesure nulle.

$$* \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \chi_A(f^t x) = \mu(A) \qquad \forall x \in \mathcal{B} (\mathrm{mod}\ 0)$$

$\Rightarrow$ μ p.tout point x passe dans A et y reste un temps proportionnel à la mesure de cet ensemble (équidistribution asymptotique des trajectoires).

Soit $B = \bigcup_{n>0} T^{-n} A$, $\mu(A) > 0$, alors $T^{-1}(B) = B$ et

$$\mu(T^{-1}B) = \mu(B) \geqslant \mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(B) = 1 \qquad *$$

$\to$ Presque-tout point visite A.

$\to$ invariante $A \circlearrowleft$
$\to$ ergodique $B \to A$
} ex rotation rat. sur le tore

Prop (décomposition ergodique)

μ invariante n'est pas ergodique ssi $\exists\, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$ t.q. $\mu_1 \neq \mu_2$, et $\exists\, 0 < \lambda < 1$ t.q. $\mu = \lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$

$*$ μ non ergodique $\Rightarrow$ $\exists\, B$ invariant t.q. $0 < \mu(B) < 1$
avec $f^{-1}(B) = B$

$\forall A \in \mathcal{B}$, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \Rightarrow$

$$\mu(A) = \mu(B)\left(\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\right) + \mu(\bar{B})\left(\frac{\mu(A\cap\bar{B})}{\mu(\bar{B})}\right)$$

$$= \underbrace{\mu(B)\,\mu(A\,|\,B) + \mu(\bar{B})\,\mu(A\,|\,\bar{B})}$$

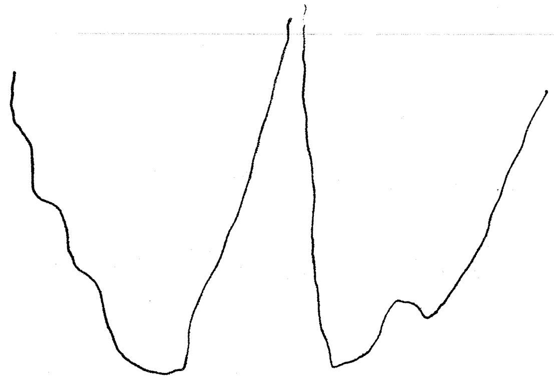
mesures conditionnelles à support disjoints $(B, \bar{B})$

On pose $\alpha = \mu(B)$; $\mu_1 = \mu(\cdot\,|\,B)$

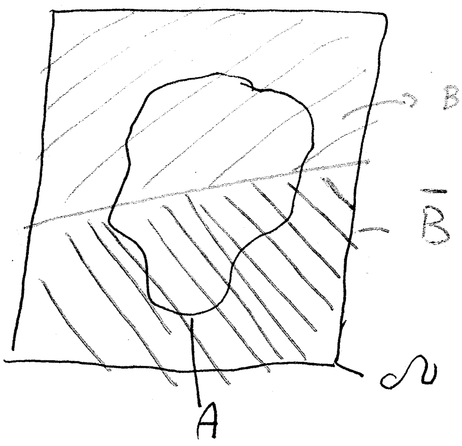
$\beta = \mu(\bar{B})$; $\mu_2 = \mu(\cdot\,|\,\bar{B})$

$\Rightarrow \mu = \alpha \mu_1 + \beta \mu_2$ μ_1, μ_2 invariantes

cf



décomposition sur les vallées.



<u>Corollaire</u>

Un système non ergodique $\Leftrightarrow$ décomposable i.e. on peut décomposer Ω en sous ensembles invariants Ω_i t.q. $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$

On voit en particulier que la moyenne temporelle dépend de X (ex : $\varphi = \chi_{\Omega_1}$)

<u>Th de décomposition</u> : L'espace des mesures invariantes est convexe, compact, et un simplexe, i.e. tout mesure admet une décomposition convexe en mesures <u>ergodiques</u> ~~qu~~ appelées états extrémaux ou état purs.

$\forall \mu \in \mathcal{M}(f), \quad \mu = \sum \alpha_i \mu_i + \int \mu_\alpha \, d\alpha$

$\mu_i \to$ [cpstes ergodiques] (classes d'équivalences)

(états extrémaux par Krein-Milman : un convexe compact d'un espace loc. convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux)

<u>Prop</u> : 2 mesures ergodiques μ_1, μ_2 distinctes sont <u>étrangères</u>

D'autre part si μ_1 est ergodique et $\mu_2 << \mu_1$ alors $\mu_1 = \mu_2$

* 2°

1) $\mu_1 \neq \mu_2$. Soit $A_i = \{ x \in M \mid \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \mu_i(A) \}$

alors $\mu_i(A_i) = 1$ par Birkhoff.

Mais $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \mu_1(A_1) = 1$ et $\mu_2(\bar{A}_1) = 1$

2) μ_1 ergodique $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) = \mu_1(A)$ μ_1 p.s.

$\mu_2 \ll \mu_1 \Rightarrow$ vrai aussi pour μ_2 p. tout x

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k x) \, d\mu_2 \underset{\substack{\text{th de} \\ \text{convergence} \\ \text{dominée}}}{=} \int \mu_1(A) \, d\mu_2 = \mu_1(A)$$

Mais :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_{k=1}^{n-1} \chi_A(T^k x) \, d\mu_2 = \mu_2(A) \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \ *$$

Ergodicité unique

On a vu qu'en général il existe plusieurs (une infinité) de mesures ergodiques, toutes étrangères. Dans certains cas, néanmoins, n'existe qu'une mesure invariante, qui est alors automatiquement ergodique.

Def : f^t est dit uniquement ergodique ssi il a une et une seule mesure invariante μ

μ est ergodique car sinon on pourrait trouver E, invariant, $0 < \mu(E) < 1$ t.q. $\mu(A|E) = \mu_1(A)$ invariante $\mu_1 \neq \mu$.

Th : les propriétés suivantes sont équivalentes

1) f est uniquement ergodique

2) $\bar{f} = \langle f \rangle$ pour tout x

3) $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \varphi(f^t x) \xrightarrow[\text{uniformément}]{} \langle \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C(\mathcal{M})$

Moyenne ergodique

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \varphi(f^t x) = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu$$

μ p.tout X si μ ergodique

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \int_\Omega \varphi(f^t x)\psi(x)\, d\mu = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu \int_\Omega \psi(x)\, d\mu}$$

Formulation équivalente d'ergodicité

En effet $\varphi = \chi_{A_1}$, $\psi = \chi_{A_2}$ A_1, A_2 invariants

invariance

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \int \chi_{A_1}(f^t x)\chi_{A_2}(x)\, d\mu = \int \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\, d\mu = \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$\underset{\text{th}}{=} \int \chi_{A_1}(x)\, d\mu \int \chi_{A_2}(x)\, d\mu = \mu(A_1)\mu(A_2)$$

$\Longrightarrow$ Pour $A_1 = A_2$ $\mu(A_1) = \mu^2(A_1) \Rightarrow \mu(A_1) = 0$ ou 1.

De plus, si A_1 et A_2 sont maintenant 2 ensembles quelconques

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \int \chi_{A_1}(f^t x)\chi_{A_2}(x)\, d\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \int_{f^t x \in A_1,\ x \in A_2} d\mu(x)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mu\left(f^{-t} A_1 \cap A_2\right) = \mu(A_1)\,\mu(A_2)}$$

Forme $\boxed{\text{faible}}$ d'indépendance statistique (en moyenne).

<u>Convergence vers l'équilibre</u>

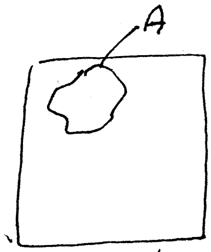
- $\mu_0 \ll \mu$ mesure initiale (hors équilibre)

$\uparrow$

$\boxed{\text{rare}}$

Ex : $\mu_0(B) = \mu(B \mid A)$

où A = ensemble de CI



↳ enceinte de gaz (espace de phase)

Mesure image à l'instant t :

$$\mu_t(B) = \mu_0(f^{-t} B) \quad (= \text{Prob}(f^t x \in B) \text{ relativement à } \mu_0)$$

Ergodicité $\Rightarrow$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mu_t(B) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \int_{\mathcal{M}} \chi_B(f^t x)\, d\mu_0$$

$$\mu_0 \ll \mu \Rightarrow \mu_0(dx) = g(x)\,\mu(dx)$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mu_t(B) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \int \chi_B(f^t x)\, g(x)\,\mu(dx) = \int \chi_B(x)\,d\mu \times \underbrace{\int g(x)\,d\mu}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mu_t(B) = \mu(B)} \to \neq \mu_t \to \mu$$

La suite de mesures μ_t converge en moyenne (Cesaro) vers μ. (très faible)

Mélange

Déf : Un système dynamique $(\mathcal{M}, \mathcal{T}, f, \mu)$ est mélangeant ssi $\forall\, \varphi, \psi \in L^2(\mathcal{M}, \mathcal{T}, \mu)$ on a :

$$\lim_{t \to \pm\infty} \underbrace{\int_{\mathcal{M}} \varphi(f^t x)\psi(x)\,d\mu}_{\langle \varphi(f^t \cdot)\psi \rangle} = \underbrace{\int_{\mathcal{M}} \varphi(x)\,d\mu}_{\langle \varphi \rangle} \underbrace{\int_{\mathcal{M}} \psi(x)\,d\mu}_{\langle \psi \rangle}$$

seulement si f est inversible.

$$\iff \boxed{\lim_{t\to\infty} \langle \varphi(f^t \cdot)\psi \rangle - \langle \varphi \rangle \langle \psi \rangle = 0}$$

On pose

$$\boxed{C_{\varphi\psi}(t) = \langle \varphi(f^t x)\psi(x) \rangle - \langle \varphi \rangle \langle \psi \rangle}$$
$$= \langle \varphi(x(t))\psi(x(0)) \rangle - \langle \varphi \rangle \langle \psi \rangle$$

fonction de corrélation.

Alors le mélange signifie que $\forall\, \varphi, \psi$

$$\boxed{C_{\varphi\psi}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0}$$

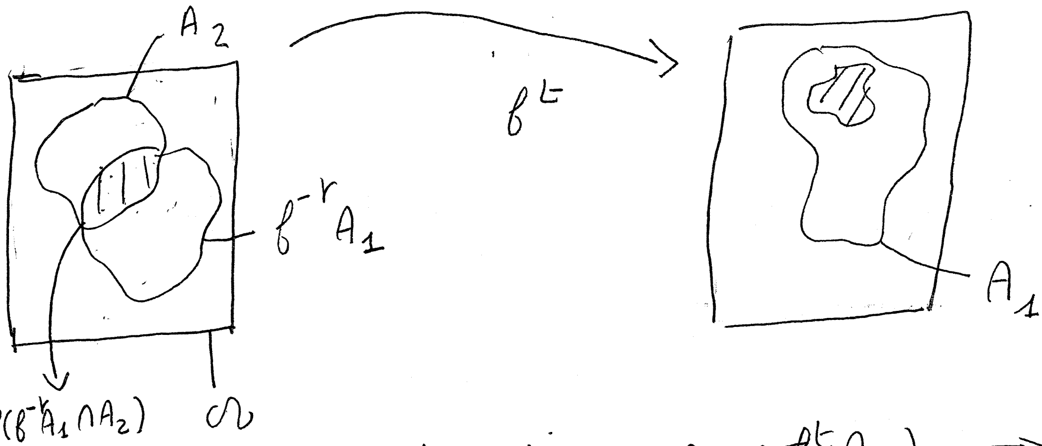
Pb : A quelle vitesse ?

En posant $\varphi = \chi_{A_1}$, $\psi = \chi_{A_2}$ il vient :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \mu(f^{-t}A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\cdot\mu(A_2)}$$

Interprétation

$$f^{-t}A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_2 \text{ et } f^t x \in A_1\}$$



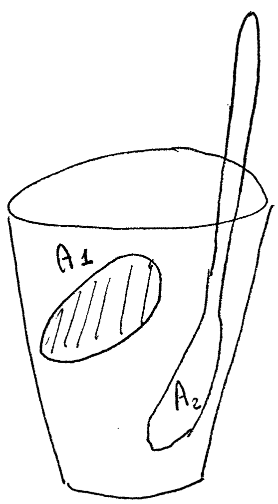
$$\frac{\mu(f^{-t}A_1 \cap A_2)}{\mu(A_1)} \Rightarrow \mu(A_2)$$

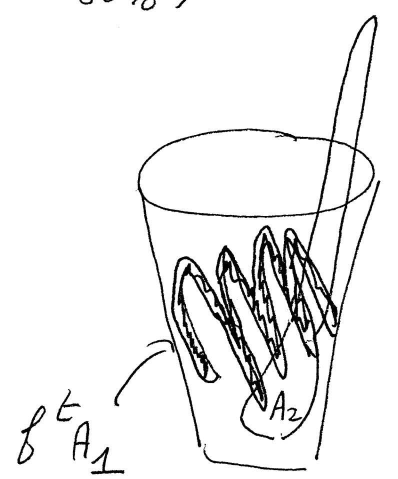
$$\Longleftrightarrow \quad \mu(T^{-t}(A_1 \cap f^t A_2)) = \mu(A_1 \cap f^t A_2) \longrightarrow \mu(A_1)\,\mu(A_2)$$

La proportion de pts de A_2 qui, au temps t ..., intersecte A_1 est proportionnelle à la mesure de A_2 lorsque $t \to \infty$

Ex : Ω : shaker, A_1 : goutte de gin (10 %) dans du martini (90 %)

A_2 : cuillère





Asymptotiquement la proportion de gin contenue dans A_2 est 10 %

$$\frac{\mu(f^t A_1 \cap A_2)}{\mu(A_2)} \longrightarrow \mu(A_1) = 10\,\%$$

Prop 1 :

Un système mélangeant est ergodique

$*$ A invariant $\Rightarrow \mu(T^{+t} A \cap \bar{A}) \longrightarrow \mu(A)\mu(\bar{A})$

$$\downarrow$$

$= \mu(A \cap \bar{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A)\mu(\bar{A}) = 0 \Rightarrow$

$\mu(A) = 0$ ou 1 $*$

La réciproque est fausse

Ex :

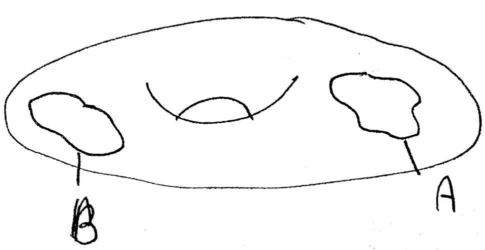
1) Rotation sur le cercle $\quad x \to x + \alpha \pmod 1$ $\quad \alpha$ irrationnel.

cette rotation est ergodique mais pas mélangeante

$\Rightarrow f^t A \cap B$ est tantôt vide, tantôt de mesure positive

$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \mu(f^t A \cap B)$ n'existe pas.

2) Rotation sur le tore



A "tourne" autour du tore sans changer de forme et sa trajectoire est dense sur le tore, mais la limite $\mu(f^t A \cap B)$ n'existe pas.

Ex de systèmes mélangeants

1) Schémas de Bernoulli

$$x_{n+1} = 2x_n \qquad (\text{mod } 1)$$

$$\mu([i]_T) = \mu([i_1 \cdots i_T]) = p^{\alpha([i]_T)} (1-p)^{\beta([i]_T)}$$

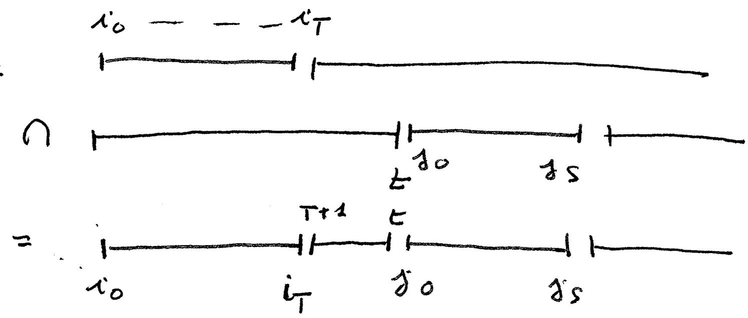
$\alpha \to$ nb de bits égaux à 0
$\beta \to$ " " à 1.

Soit $C = [i]_T$, $D = [j]_S$

$$C = [\underbrace{i_0 \cdots i_T}_{\text{fixé}} \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{inconnu}}) \; ; \; D = (\underbrace{j_0 \cdots\cdots j_S}_{} \cdots\cdots)$$

$$f^{-t} D = \bigcup_{\substack{x_i = 0,1 \\ i = 0 \cdots t}} (x_0 \cdots x_t \; j_0 \cdots j_S \cdots)$$

On suppose $t > S$ $\qquad C \cap f^{-t} D =$



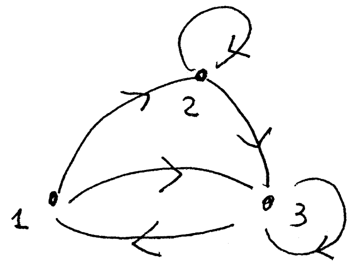
$$\mu(C \cap f^{-t} D) = \mu(C)\mu(D)\, \mu\Big(\bigcup_{\substack{x_n = 0,1 \\ n = T+1 \cdots t}} [x_{T+1} \cdots x_t]\Big) = \mu(C)\mu(D)$$

↑ indépendance + stationnarité

$\Rightarrow$ vrai $\forall t$

Ex 2 : Sous décalage de type fini $\leftrightarrow$ chaîne de Markov.

W : matrice de transition d'une chaîne de Markov



$W_{ij} \Rightarrow \text{Prob}(\overset{\text{colonne}}{j} \to \underset{\text{ligne}}{i})$

A_{ij} : matrice d'incidence

$A_{ij} = 1$ si la transition $j \to i$ est possible

$$A : \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

W : matrice stochastique $\qquad \sum_{i=1}^{N} W_{ij} = 1$

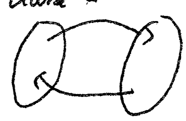
A définit une grammaire des séquences admissibles

Ex $\qquad$ 1 2 2 2 2 3 3 1 -- autorisée

$\overline{1\,1}$ $\qquad$ interdite

Hyp : A (resp. W) est irréductible, apériodique.

$\forall i,j \ \exists n / A^n(i,j) = 1$



$\Rightarrow$ Th de Perron-Frobenius :

$\exists! \ \lambda = 1$ et les autres valeurs propres sont de module < 1

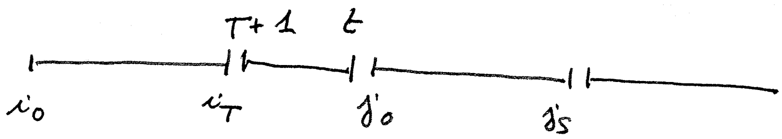
$\Rightarrow \ \forall P$, vecteur de proba initial $\qquad W^n P \xrightarrow[n \to \infty]{} P_\lambda$

vecteur propre associé à $\lambda = 1$

Dynamique $\rightarrow$ chaîne de séquences admissibles $\Longleftrightarrow$ processus

$C = i_0 \cdots i_T \qquad D = j_0 \cdots j_s$

$C \cap f^{-t} D =$



$$\mu(C \cap f^{-t} D) = \mathrm{Prob}\,[(i_0, i_1 \cdots i_T, x_{T+1} \cdots x_t\ j_0 \cdots j_s \cdots)]$$

$$= \sum_{\substack{x_r \\ r = T+1 \dots t}} p(i_0) W_{i_1 i_0} W_{i_2 i_1} \cdots W_{x_{T+1} i_T} W_{x_{T+2} x_{T+1}} \cdots W_{j_0 x_t} W_{j_1 j_0} \cdots W_{j_s j_{s-1}}$$

vecteur propre

$$= \underbrace{p(i_0) W_{i_1 i_0} W_{i_2 i_1} \cdots W_{i_T i_{T-1}}}_{\mu(C)} \ \underbrace{\frac{P_1(j_0)}{P_1(j_0)} W_{j_1 j_0} \cdots W_{j_s j_{s-1}}}_{\frac{\mu(D)}{P_1(j_0)}} \ \underbrace{\sum_{r = T+1 \dots t} W_{x_{T+1} i_T} W_{x_{T+1} x_T} \cdots W_{j_0 x_t}}_{W_{j_0 i_T}}$$

$$= \frac{\mu(C)\,\mu(D)}{P_1(j_0)} W^n_{j_0, i_T} \qquad n = t - T + 1$$

mais $\quad W^n_{j_0, i_T} = (W^n \vec{e}_{i_T})_{j_0} \xrightarrow[n \to \infty]{} P_1(j_0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu(C \cap f^{-t} D) \rightarrow \mu(C)\,\mu(D)}$$

Rq : Dans ce cas on a convergence de ~~toute~~ mesure initiale vers la mesure d'équilibre avec une vitesse donnée par la seconde v.p.

Ergodicité, mélange et projection

ergodicité

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \int \varphi(f^t x)\psi(x)\,d\mu = \int \varphi(x)\,d\mu \int \psi(x)\,d\mu$$

$$\iff \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \int U^t(\varphi(x))\,\psi(x)\,d\mu = \int \varphi(x)\,d\mu \int \psi(x)\,d\mu$$

$$\iff \boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \langle U^t\varphi, \psi\rangle = \underbrace{\langle \varphi, 1\rangle\langle 1, \psi\rangle}_{\text{projection}}}$$

mélange

$$\lim_{t\to+\infty} \int \varphi(f^t x)\psi(x)\,d\mu = \int \varphi(x)\,d\mu \int \psi(x)\,d\mu$$

$$\iff \boxed{\lim_{t\to+\infty} \langle U^t\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, 1\rangle\langle 1, \psi\rangle}$$

Convergence vers l'équilibre

Th: Soit $\boxed{\mu_0 \ll \mu}$; $\mu_t = f^{*t}\mu_0$ i.e.

$$\mu_t(A) = \mu_0(f^{-t}A)$$

alors $\mu_t(A) \longrightarrow \mu(A)$ $\quad \forall A \in \mathcal{F}$

: La distribution hors equilibre μ_0 tend vers la distribution d'équilibre pour $t \to \infty$.

$$* \quad \mu_t(A) = \int_\Omega \chi_A(f^t x)\, d\mu_0 = \int_\Omega \chi_A(f^t x)\, \underbrace{\frac{d\mu_0}{d\mu}(x)}_{\rho(x)}\, d\mu(x)$$

$$= \int_\Omega \chi_A(f^t x)\,\rho(x)\, d\mu(x) \longrightarrow \int \chi_A(f^t x)\, d\mu(x) \int \rho(x)\, d\mu(x)$$

$$= \mu(A) \quad *$$

Systèmes exacts

Def : Un système est exact si

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad (\mu(A) > 0) \qquad \lim_{t \to \infty} \mu(T^t A) = 1$$

* Partant de n'importe quel ensemble, aussi "petit" soit-il la dynamique finit par remplir "tout" l'espace (au sens de μ).

Rq : Une transformation inversible ne peut être exacte $\quad (\mu(T^t A) = \mu(A))$

Prop : exact $\Rightarrow$ mélangeant

Théorie spectrale

Soit μ invariante, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ l'espace des fonctions complexes de carré sommable relativement à μ i.e. $\int_\Omega |\varphi^2| d\mu$ existe. On définit sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ le produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi^*(x) \psi(x) d\mu(x)$$

et $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$

Soit $\hat{U}^t$ l'opérateur de Koopman (opérateur d'évolution), i.e. si A est une fonction mesurable :

$$\boxed{A(f^t x) = (\hat{U}^t A)(x)}$$

avec $(\hat{U}^t A)(x) = \int A(y)\,\delta(y - f^t x)\,dy$ et $\hat{U}^t = \hat{P}^{+t}$

Prop.

1) linéarité $\hat{U}^t(a\varphi + b\psi) = (a\varphi + b\psi)(f^t x) = a\varphi(f^t x) + b\psi(f^t x) = a\hat{U}^t\varphi + b\hat{U}^t\psi$

2) isométrie : $\langle \hat{U}^t\varphi, \hat{U}^t\varphi \rangle = \int \varphi(f^t\hat{x})\psi(f^t\hat{x})\,d\mu(\hat{x}) \underset{\text{invariance}}{=} \int \varphi(\hat{x})\psi(\hat{x})\,d\mu(\hat{x})$

$= \langle \varphi, \varphi \rangle$

3) Unitarité : Si f^t est inversible (automorphisme) alors $\hat{U}^{-t}$ existe et

$\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$

Donc :

$$\boxed{\text{Le groupe } \{\hat{U}^t\} \text{ (resp. le semi-groupe } \{\hat{U}^t\}) \text{ est unitaire (resp. isométrique) et préserve } L^2(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mu).}$$

Ex Systèmes hamiltoniens

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}$$

En particulier, si A ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\}$$

$$A(X(t+dt)) - A(X(t)) =: U^{t+dt} A(X) - U^t A(X) =: dU^t A(X)$$

$\Rightarrow$ $\{\hat{H}, \ \}$ est le générateur infinitésimal du groupe $\hat{U}^t$

On pose : $\hat{\mathcal{L}} = i \{\hat{H}, \ \}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{U}^t = e^{-i\hat{\mathcal{L}}t}}$$

Valeurs propres

t discret $\quad \hat{U}|h\rangle = \lambda|h\rangle \qquad |h\rangle \in L^2(\mathcal{M}, \hat{O}, \mu) = H$

Unitarité $\Rightarrow$ (isométrie) $\quad |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\omega}$

t continu $\quad \hat{U}^t|h\rangle = e^{i\omega t}|h\rangle$

Spectre ponctuel $\quad \Lambda d(\hat{U})$ (resp. $\Lambda d(\hat{U}^t)$)

Prop. $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle h_{\lambda_1}|h_{\lambda_2}\rangle = 0$

On note $\quad Hd(\hat{U}) =$ espace engendré par les vecteurs propres $|h_{\lambda_i}\rangle$

et $\quad H_c(\hat{U}) = H \setminus Hd(\hat{U})$

Ergodicité et mélange :

1) Un système est ergodique ssi 1 est valeur propre simple de $\hat{U}^t$.

2) Un système est mélangeant ssi $\forall f, g \in L_2(\mathcal{M}, \mu)$ on a

$$\lim_{t \to \infty} \langle \hat{U}^t f | g\rangle = \langle f|1\rangle\langle 1|g\rangle$$

où $|1\rangle$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 1.

3) Si le système est mélangeant, la seule valeur propre est 1

$*$

1) $U^t |1\rangle = 1(f^t x) = |1\rangle$ $\Rightarrow$ la fonction constante 1 est fonction propre avec valeur propre 1

f est ergodique ssi toute fonction invariante $(\varphi(f^t x) = U^t \varphi(x) = \varphi(x))$ est constante $\Rightarrow |\varphi\rangle = K|1\rangle$ $*$

2) voir définition $*$

3) $|f\rangle$ fonction de v.p. λ $\langle U^n f, f\rangle \to \langle f|1\rangle\langle 1|f\rangle \Rightarrow \lambda^n = \text{cste}$ $\forall n$ $\Rightarrow \lambda = 1$ $*$

<u>Exemple de spectre discret</u>

1) $x \longrightarrow x + \omega$ $\quad x \in S^1$

Soit $e_p(x) = e^{2i\pi p x}$ $\quad p \in \mathbb{Z}$

$$\hat{U} e_p(x) = e^{2i\pi p(x+\omega)} = e^{2i\pi p\omega} e_p(x)$$

$\Rightarrow e_p(x)$ est fonction propre de $\hat{U}$ avec valeur propre $e^{2i\pi p\omega}$

$\to$ spectre discret de $\hat{U}$.

De plus les $|e_p\rangle$ forment une base de $L^2(S,\mu)$ $\Rightarrow$ spectre purement ponctuel

<u>ergodicité</u> $\Longleftrightarrow$ $p\omega \notin \mathbb{Z}$ $\quad \forall p \neq 0$ $\Leftrightarrow$ ω irrationnel.

(1 valeur propre simple)

<u>Mélange</u> :

<u>non</u>.

2.) Systèmes hamiltoniens intégrables

$\exists$ un changement de variable canonique amenant aux variables action-angle.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \omega(J_i) \\ \dot{J}_i = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{tore } \mathbb{T}^n$$

$\Rightarrow$ spectre de Koopman purement discret valeurs propres $\omega_{\vec{m}} = \vec{m}.\omega$

et vecteurs propres $\{ e^{in\omega_{\vec{m}}} \}$ forment une base de $L^2(T^n)$

$\Rightarrow$ jamais mixing

ergodique ssi $\vec{\omega}.\vec{m} = 0 \Rightarrow \vec{m} = \vec{0}$ (incommensurabilité)

Remarque

Si M est ergodique

1) chaque valeur propre est simple.

2) l'ensemble des valeurs propres est un sous groupe du cercle $\{ |z| = 1 \}$

Th (Von Neumann)

$$\boxed{\text{Deux systèmes ergodiques à spectre discret sont isomorphes ssi ils ont le même spectre}}$$

$\Rightarrow$ classification complète de ces systèmes.

Spectre continu

Th Pour tout opérateur unitaire $\hat{U}$ il existe une suite de vecteurs h_i t.q.

1) A chaque h_i est associé un sous-espace $C(h_i) = \text{span}\{U^k h_i \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

t.q. $\forall h \in C(h_i)$

$$\boxed{\langle U^n h \mid h \rangle = \int \exp[2i\pi n \lambda] \, d\sigma_h(\lambda)}$$

valeur moyenne de $\exp 2i\pi n\lambda$ par la mesure σ_h

$\sigma_h \ll \sigma_{h_i}$

→ l'action de U devient la multiplication par $\exp 2i\pi\lambda$ sur S^1.

2) $C(h_i) \perp C(h_j)$ $i \neq j$ et $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} C(h_i)$

σ_h est appelée mesure spectrale de $C(h)$.

* $\sigma_h = \delta_\lambda$ si h est un vecteur propre (spectre ponctuel)
* Si $\sigma_h \ll$ Lebesgue le spectre correspondant est appelé absolument continu
* Si $\sigma_h \sim$ Lebesgue " " " " Lebesgue

dans ce cas $\langle \hat{U}^n h, \hat{U}^m h \rangle = 0$ $n \neq m$ et les vecteurs $\hat{U}^n h$ constituent une base orthogonale de $C(h)$

En effet $\langle \hat{U}^n h \mid \hat{U}^m h \rangle = \int \exp[2i\pi\lambda(n-m)] \, d\lambda = 0.$

* Si $\sigma_h \perp$ Lebesgue on a un spectre singulier continu pour $C(h)$.

Théorème de Stone

$$\hat{U}^t = \underbrace{\sum_n \hat{E}_n e^{i\omega_n t}}_{\text{partie ponctuelle}} + \underbrace{\int_{\sigma_c} d\hat{E}(\omega) e^{i\omega t}}_{\text{partie continue}}$$

où $\begin{cases} \sigma_c =]-\pi, \pi[& \text{si } t \text{ discret} \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\sigma_c = \mathbb{R}$ si t est continu

$\underline{\hat{E}_n}$: projecteur le sous-espace propre associé à la valeur propre $e^{i\omega_n t}$ $\quad (\hat{E}_n = |h_n\rangle\langle h_n|)$

$\underline{\hat{E}(\omega)}$: Projecteur associé à la partie continue du spectre.

$h \in C(h)$

$h \in H_c(\hat{U})$

$$\langle U^t h, h \rangle = \int \langle h | d\hat{E}(\omega) | h \rangle e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \langle h | d\hat{E}(\omega) | h \rangle = d\sigma_h(\omega) \quad \text{mesure spectrale.}$$

Cas particulier : Spectre de Lebesgue

On suppose :

* 1 seule valeur propre $\lambda = 1$

* Le spectre restant est continu, et $d\sigma_h$ est absolument continue / Lebesgue

Th de Von Neumann

$$\hat{U}^t = \hat{E}_0 + \sum_{e=1}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\psi_{e\omega}\rangle e^{i\omega t} \langle \psi_{e\omega}|$$

$\hookrightarrow$ vecteurs propres généralisés $\notin H$.

ce ne sont pas des fonctions

L : multiplicité du spectre de Lebesgue (nb de espaces $C(h_i)$)

Th : Un système dynamique à spectre de Lebesgue est mélangeant

(1 seule v.p + spectre continu).

* $\forall f, g \in H_c$, $\langle U^n f, g \rangle \longrightarrow 0$? ($\perp$ à $|1\rangle$)

Prenons $f = U^{i} h_j$, $g = U^k h_r$ alors

$$\langle U^n f, g \rangle = \langle U^{ni} h_j, U^k h_r \rangle = \langle U^{ni-k} h_j, h_r \rangle$$

si $j \neq r \Rightarrow 0$ car appartiennent à des espaces $\perp$

$j = r \Rightarrow \langle \hat{U}^{ni-k} h_j, h_j \rangle = 0$ si $ni \neq k$ *

$\Rightarrow \langle U^n f, g \rangle \to 0$ ($f, g \in H_c \Rightarrow \langle f|1\rangle\langle 1|g\rangle = 0$)

On a vu que l'action de f^t induisait une action sur les caractères $\chi_{p,q}$ par la relation :

$$\chi_{p,q}(f^t(x,y)) = \chi_{\tilde{L}^t(p,q)} = U^t\chi_{p,q}(x,y) \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En particulier :

$$\hat{U}\chi_{p,q} = \chi_{p+q,\,p+2q}$$

Par ailleurs la seule orbite finie de $\tilde{L}$ est celle du point $(0,0)$.
Donc sur $\mathbb{Z}^2$, l'action de $\tilde{L}$ laisse 0 invariant et déplace les points $(p,q) \neq (0,0)$ le long d'orbites sur $\mathbb{Z}^2$

L'espace de Hilbert $H(\mathbb{T}^2, \mu)$ admet pour base la base des caractères $\chi_{p,q}$ $\Rightarrow$ on peut décomposer $H - \{\chi_{0,0}\}$ en orbites de $\hat{U}$:
$C_1 \dots C_i \dots$ $i \in I$ t.q si $f_{i,0} \in C_i$ on a

$$C_i = \{ f_{i,n} \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad \text{avec } f_{i,n} = U^n f_i$$

$$\Rightarrow \quad H = \bigoplus_{i=1}^{I} C_i \oplus \vec{\chi}_{0,0}$$

et C_i possède une base orthonormée complète $\{f_{i,n}\}$.

I est l'ordre de multiplicité du spectre.

Opérateur de Perron-Frobenius

Opérateur de Koopman $\longrightarrow$ point de vue "observable"

Opérateur de Perron-Frobenius $\longrightarrow$ point de vue "densité" $\rho \in L^1(\mu)$

Rq : La mesure de référence est la mesure invariante μ $\longrightarrow$ densités relatives à μ.

Th :

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique abstrait, et P l'opérateur de Perron Frobenius alors :

a) f est ergodique $\iff$ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \langle P^t \rho, g \rangle = \langle \rho, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$

$\rho \in L^1$, $g \in L^\infty$

b) f est mélangeante $\iff$ $\lim_{t \to \infty} \langle P^t \rho, g \rangle = \langle \rho, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$

c) f est exacte ssi

$$\lim_{t \to \infty} \| P^t \rho - \langle \rho, 1 \rangle \| = 0 \qquad \rho \in L^1$$

Soit $\hat{U}$ unitaire sur H, hilbert séparable, complexe.

$\Lambda_d(\hat{U})$: spectre ponctuel de H . $|\lambda| = 1$ pour une isométrie

$|h_{\lambda_i}>$: vecteurs propre associé à la valeur propre . $e^{2i\pi\lambda_i}$

$H_d(\hat{U})$: espace engendré par les vecteurs propres

$H_c(\hat{U}) = H \setminus H_d(\hat{U})$

Soit $h \in H$, $b_n(h) = \langle U^n h, h \rangle$ $\quad -\infty < n < \infty$

Cette séquence est définie positive. En effet :

$$\sum_{k_1,k_2} c_{k_1}\bar{c}_{k_2}\, b_{k_1-k_2}(h) = \sum_{k_1,k_2} c_{k_1}\bar{c}_{k_2} \langle \hat{U}^{k_1-k_2} h, h \rangle$$

$$= \sum_{k_1,k_2} c_{k_1}\bar{c}_{k_2} \langle \hat{U}^{k_1}\hat{U}^{-k_2} h, h \rangle = \sum_{k_1,k_2} c_{k_1}\bar{c}_{k_2} \langle \hat{U}^{k_1}\hat{U}^{+k_2} h, h \rangle$$

$$= \sum_{k_1,k_2} c_{k_1}\bar{c}_{k_2} \langle \hat{U}^{k_1} h, \hat{U}^{k_2} h \rangle = \langle \sum_{k_1} c_{k_1}\hat{U}^{k_1} h, \sum_{k_2} c_{k_2}\hat{U}^{k_2} h \rangle$$

$$= \| \sum_k c_k \hat{U}^k h \| \geq 0$$

Th de Bochner – Khinchin

$\exists !$ mesure de Borel σ_h sur le cercle S^1 t.q.

$$b_n(h) = \int \exp[2i\pi n\lambda]\, d\sigma_h(\lambda)$$

$\sigma_h(\lambda)$ est appelée mesure spectrale du vecteur h.

Si $h = h_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_d(U)$ $\sigma_h(\lambda) = \delta(\lambda) \Rightarrow$

$$\langle \hat{U}^n h_{\lambda}, h_\lambda \rangle = \exp 2i\pi n\lambda$$

De même, $\forall h \in H_d(\hat{U})$ σ_h est discrète. En effet,

$$|h\rangle = \sum_{\lambda_i \in H_d} c_{\lambda_i} |h_{\lambda_i}\rangle \qquad \hat{U}^n|h\rangle = \sum_{\lambda_j \in H_d} c_{\lambda_j} e^{2i\pi n\lambda_j} |h\lambda_j\rangle$$

$$\langle \hat{U}^n h, h\rangle = \sum_{i,j} e^{2i\pi n\lambda_j} \bar{c}_{\lambda_j} c_{\lambda_i} \langle h_{\lambda_i} | h\lambda_j\rangle$$

$$= \sum_i e^{-2i\pi n\lambda_i} |c_{\lambda_i}|^e = \int e^{-2i\pi n\lambda} \sum |c\lambda_i| \delta_{\lambda_i}(\lambda)$$

Pour $h \in H_c(\hat{U})$ est continue

Soit $C(h) =$ fermeture de l'ensemble engendré par les combinaisons linéaires finies $\sum c_k \hat{U}^k|h\rangle$ $\rightarrow$ plus petit espace contenant h et invariant par $\hat{U}$ $\longrightarrow$ espace cyclique engendré par h.

<u>Th 1</u> : $C(h)$ est envoyé isomorphiquement sur $L^2(S^1, \sigma, d\sigma_h)$ en sorte que l'action de $\hat{U}$ devient la multiplication par $\exp(2i\pi\lambda)$

Si $\varphi \in L^2(S^1, \sigma, d\sigma_h)$ correspond à $h_1 \in C(h)$ alors

$\sigma_{h_1} \ll \sigma_h$ et $\dfrac{d\sigma_{h_1}}{d\sigma_h} = |\varphi|^e$. Pour $h_1 \in C(h)$ on a

$C(h_1) = C(h)$ ssi $|\varphi(\lambda)| > 0$ p.s. relativement à σ_h.

L'ensemble des mesures équivalentes $\sigma_{h_i} << \sigma_h$ est appelé type spectral de h.

Forme canonique de $\hat{U}$

$\exists$ une séquence de vecteurs h_i, $i = 1, 2 \ldots$ t.q. $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} C(h_i)$

1) $C(h_i) \perp C(h_j)$ $i \neq j$

2) $\sigma_{h_{i+1}} << \sigma_{h_i}$

3) $\forall h'_i$, $i = 1, 2 \ldots$ satisfaisant (1), (2) on a $\sigma_{h_i} \sim \sigma_{h'_i}$.

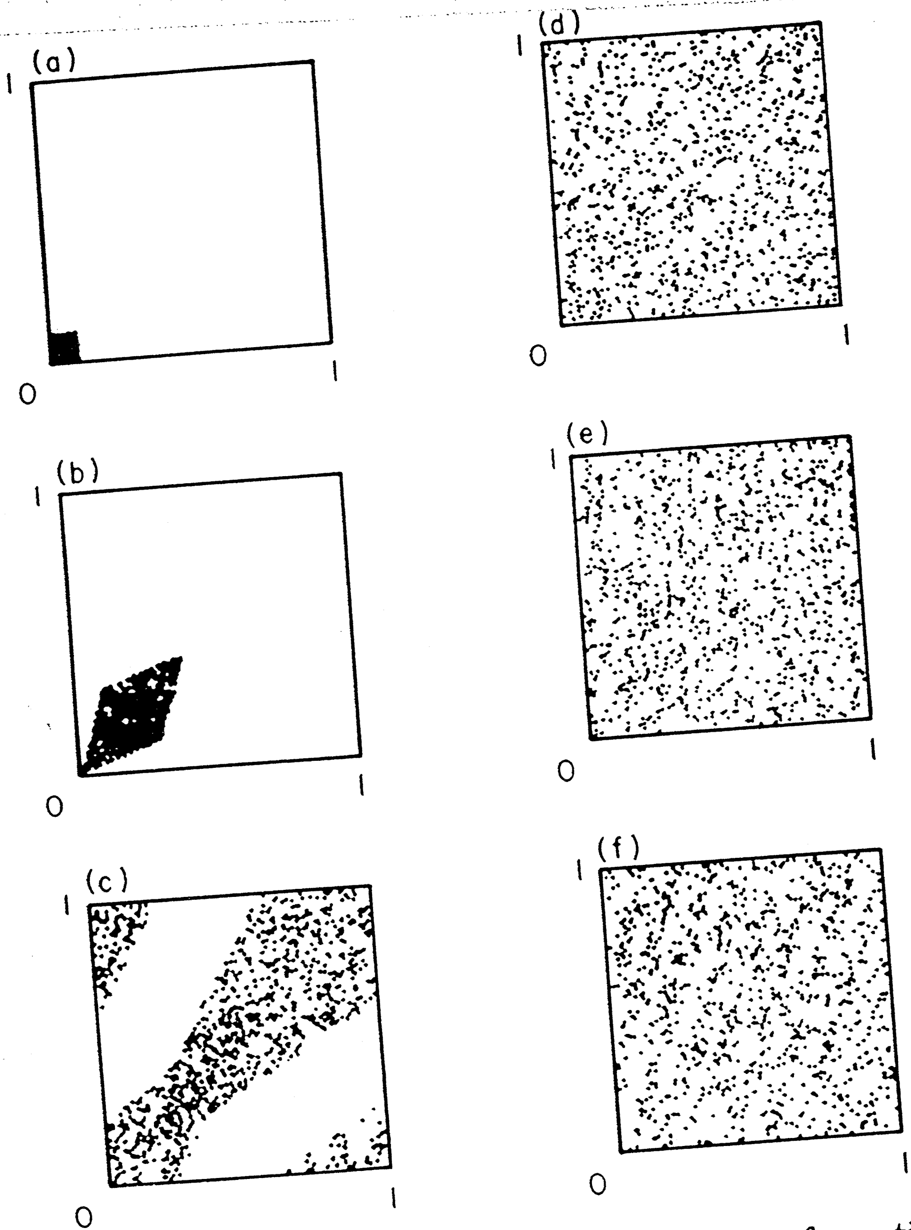


FIGURE 4.3.5. Successive applications of the exact transformation [equation (4.3.5)]. Note the rapid spread of the initial distribution of points throughout the phase space.

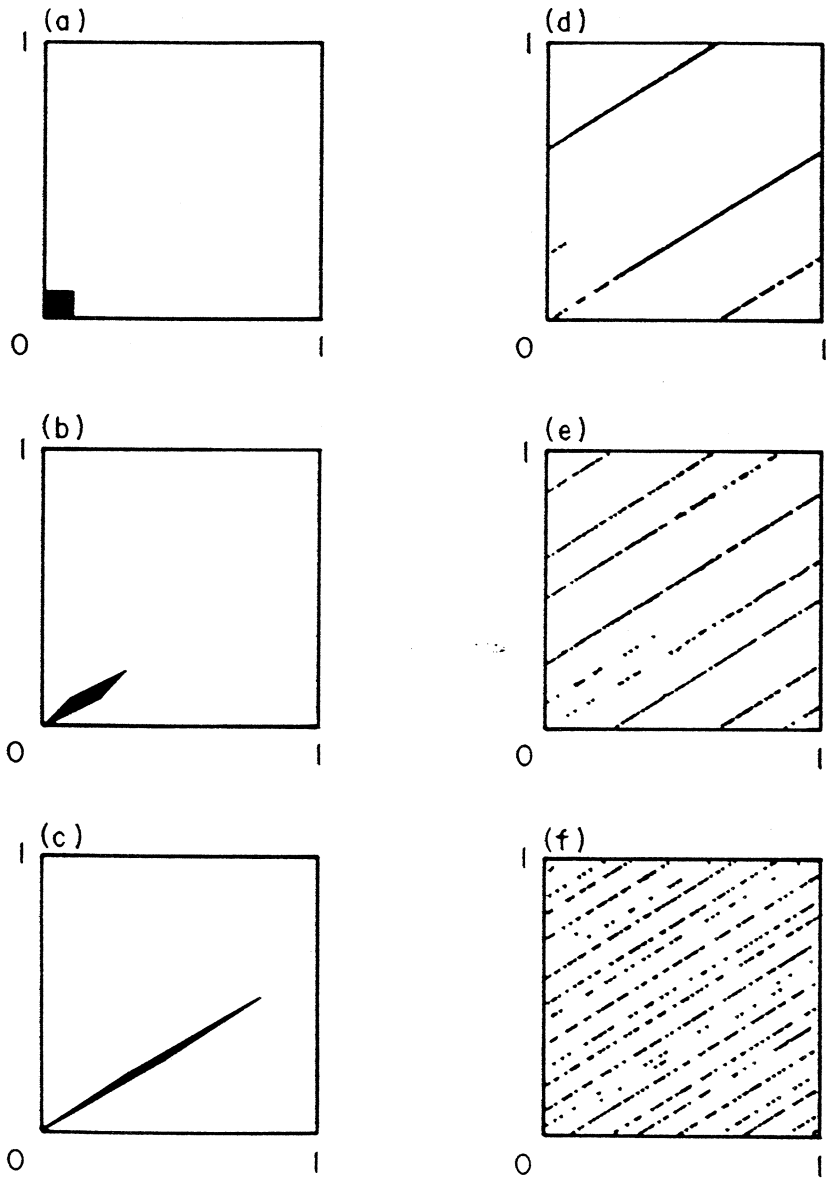


FIGURE 4.3.4. The effect of the mixing transformation (4.3.4) on the same ini distribution of points used in Figure 4.3.3.

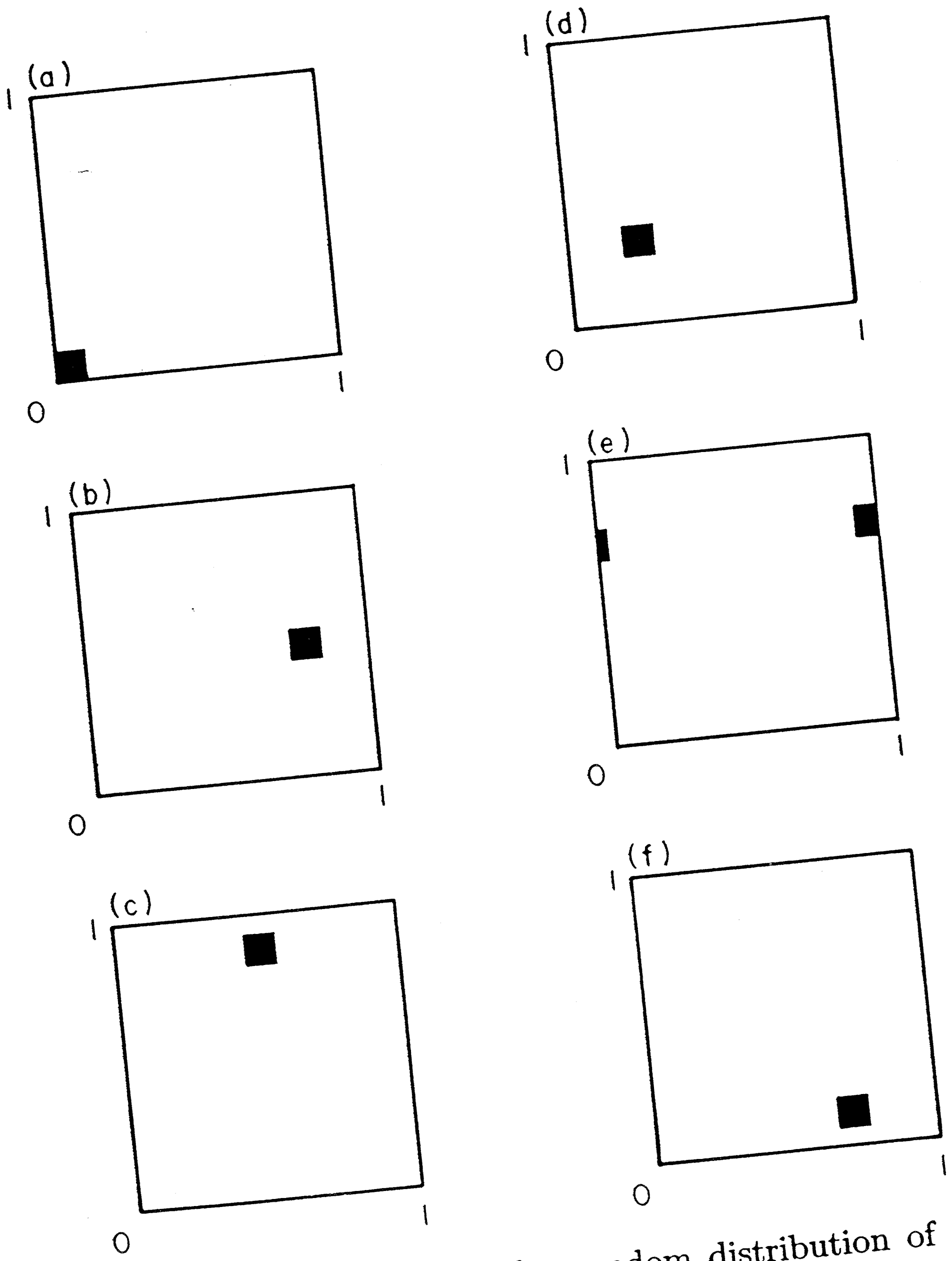


FIGURE 4.3.3. Successive iterates of a random distribution of 1000 points in $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ by the ergodic transformation (4.3.3). Note how the distribution moves about in the space $[0,1] \times [0,1]$.

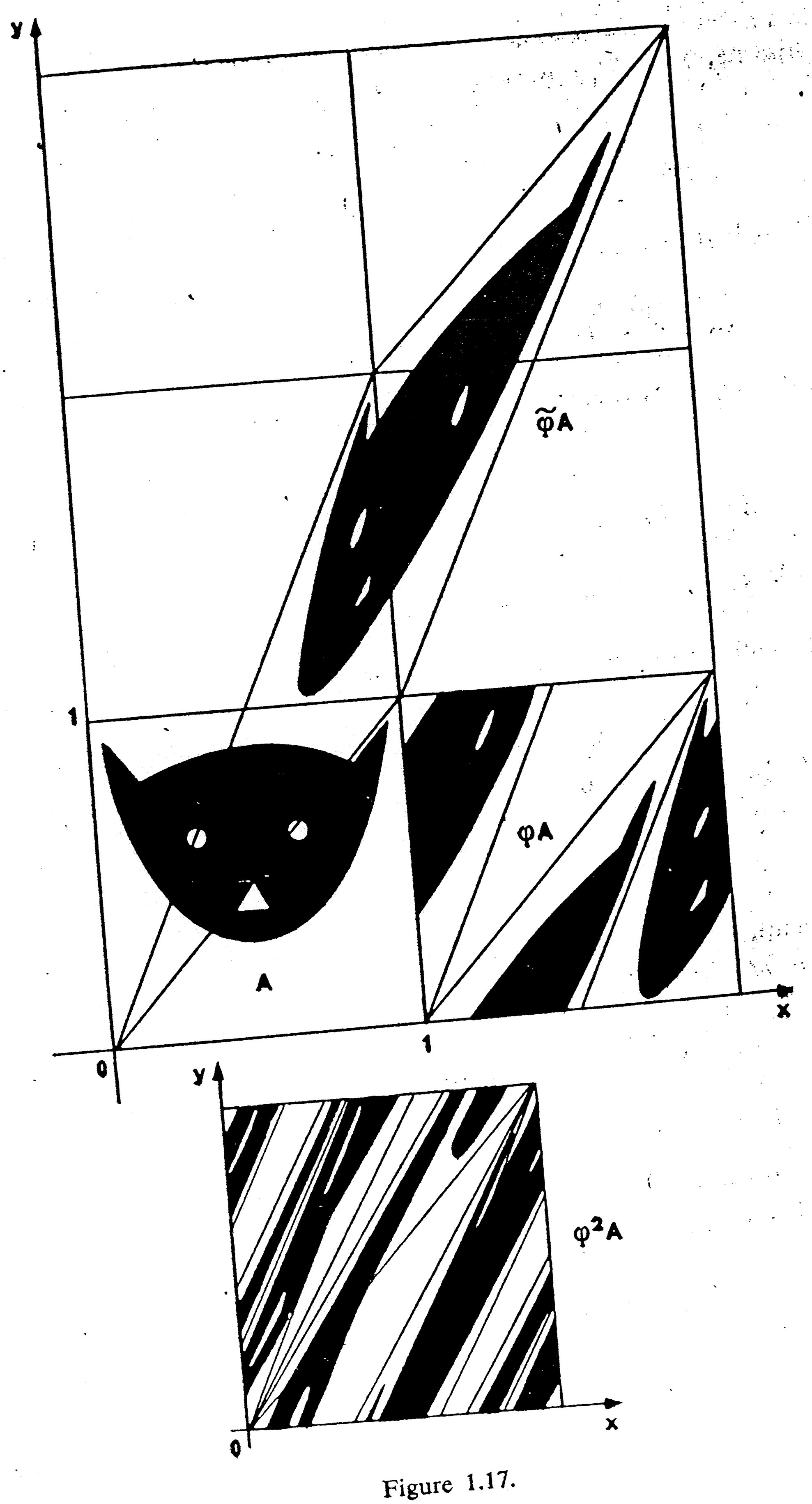


Figure 1.17.

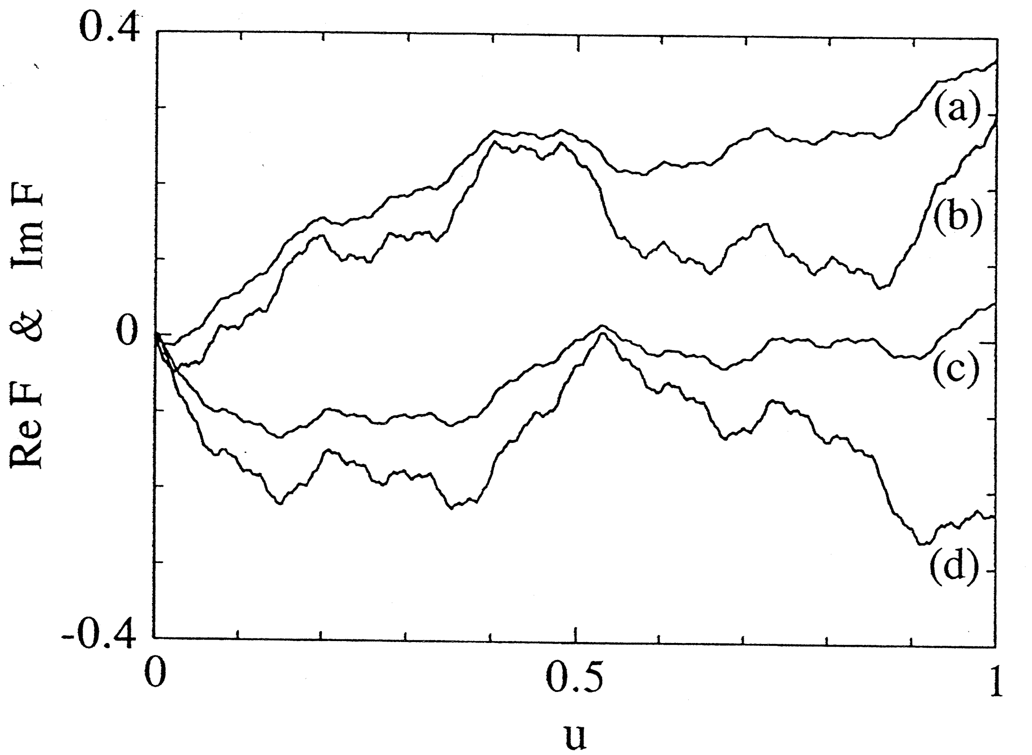


Figure 3.1 Cumulative function of the generalized eigenstate $\Psi_{\mathbf{l}\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega n)\Upsilon_{\mathbf{l}n}$ defined with the shift states $\Upsilon_{\mathbf{l}n}(x,y) = \exp[2\pi i\mathbf{l} \cdot \phi^n(x,y)]$ of the Arnold cat map $\phi(x,y) = (x+y, x+2y)$ (modulo 1). The cumulative function is defined by $F_{\mathbf{l}\omega}(s,u) = \int_0^s ds' \int_0^u du' \Psi_{\mathbf{l}\omega}(s'\mathbf{e}_s + u'\mathbf{e}_u)$ where $\mathbf{e}_s$ and $\mathbf{e}_u$ are the stable and unstable directions of this map (Arnold and Avez 1968). The figure depicts the cumulative function versus u for $\omega = 1$: Re $F_{\mathbf{l}\omega}$ at (a) $s = 0.5$, (b) $s = 1$; Im $F_{\mathbf{l}\omega}$ at (c) $s = 0.5$, (d) $s = 1$.