

HABILITATION A DIRIGER LES RECHERCHES.

présentée par

M. Bruno CESSAC

Systèmes dynamiques de grande taille et mécanique statistique.

Soutenue le 13 septembre 2002 devant le jury composé de

M.	Michel LE BELLAC, Université de Nice	Rapporteur
M.	Ricardo LIMA, CNRS, Centre de Physique Théorique, Marseille	Rapporteur
M.	Yi-Cheng ZHANG, Université de Fribourg	Rapporteur
M.	Philippe BLANCHARD, Université de Bielefeld	Examineur
Mme	Flora KOUKIOU, Université de Cergy-Pontoise	Examinatrice
M.	Jean-Pierre PROVOST, Université de Nice	Examineur

à l'INSTITUT NON-LINÉAIRE DE NICE

A véro,

A Ariane,

A mes parents,

A ma soeur,

A ma famille.

Et à tous mes maîtres.

Remerciements

Je suis tout d'abord particulièrement reconnaissant aux rapporteurs et à chacun des membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer mon travail.

Je remercie de même mes nombreux amis de l'INLN pour leurs conseils, et leur soutien. Je pense tout particulièrement à J.A. Sepulchre, J.L. Meunier, G.L. Lippi, G. Batrouni, ainsi qu'à C. Taggiasco, toujours là pour rendre service, et qui m'a sauvé après le “crash disk” de ma machine.

Depuis que j'ai commencé mon travail de recherche un certain nombre de personnes m'ont profondément influencé et m'ont beaucoup apporté, non seulement du point de vue scientifique, mais aussi sur le plan humain. Je pense tout particulièrement à M. Samuelides, mon directeur de Thèse, et à Ph. Blanchard, qui m'a accueilli en post-doc et qui m'a toujours soutenu depuis.

Je suis également reconnaissant à tous mes autres collaborateurs, Bernard Doyon, Mathias Quoy, Emmanuel Daucé, Olivier Moynot, Michel Benaïm, Tyll Krüger, Jacques-Alexandre Sepulchre, Jean-Louis Meunier, Stéphane Rolandez, Dima Volchenkov, Emmanuel Fitoussi, Sandra Sequeira, pour le travail passionnant que nous avons effectué ensemble, et pour l'enrichissement qu'ils m'ont apporté.

Enfin, je remercie mon épouse, ma fille, et ma famille, pour tout le bonheur qu'elles m'apportent, et sans qui ma vie, même avec la Recherche, serait bien vide.

Table des matières

1	Introduction.	11
1.1	Cadre général et notations.	12
1.2	Structure du manuscrit.	20
2	Dynamiques de réseaux de neurones additifs aléatoires.	23
2.1	Cadre général.	23
2.2	Dynamique spontanée.	24
2.2.1	Modèle.	24
2.2.2	Résultats préliminaires.	26
2.2.3	Équations dynamiques de champ moyen.	28
2.2.4	Fonctionnelle génératrice.	28
2.2.5	Hypothèse de Chaos local.	33
2.2.6	Régime stationnaire des équations de champ moyen.	35
2.2.7	Relations avec le système de dimension finie.	36
2.2.8	Relations avec les verres de spins.	39
2.2.9	Approche cavitaire.	41
2.2.10	Grandes déviations.	42
2.2.11	Conclusions.	43
2.3	Apprentissage.	44
2.4	Développements récents	46
3	Annexe A	53
4	Criticalité auto-organisée et systèmes dynamiques.	55
4.1	Cadre général.	55
4.1.1	Préambule.	55
4.1.2	Historique non-exhaustif et problèmes ouverts.	57
4.2	Le modèle de Zhang.	65
4.2.1	Modèle.	65
4.2.2	Avalanches	67
4.2.3	Définition du système dynamique.	69
4.2.4	État stationnaire.	71
4.2.5	Grandeurs macroscopiques moyennes.	74
4.2.6	Propriétés générales du système dynamique.	75
4.2.7	Équations de transport.	79
4.2.8	Exposants de Lyapunov et transport.	83
4.2.9	Sensibilité aux conditions initiales, variétés instables, stables.	86
4.2.10	Système de Fonctions Itérées.	91
4.2.11	Dynamique Symbolique	95

4.3	Développements et conclusion.	96
4.3.1	Singularité de Lee-Yang.	96
4.3.2	Formalisme thermodynamique.	99
4.3.3	Conclusion.	104
5	Annexe B	113
6	Nouvelles perspectives.	115
6.1	Transport d'information dans un réseau d'unités chaotiques.	115
6.2	Corrélations d'échelles dans des systèmes hiérarchiques.	116
6.3	Zéros de Lee-Yang et systèmes dynamiques.	116
6.4	Conclusion générale.	117
7	Annexe C.	119
7.1	Curriculum vitae de Bruno CESSAC.	119
7.2	Publications.	121
7.3	Conférences internationales.	122
7.4	Séminaires récents (depuis 1998).	123

Avant propos.

J'ai débuté le métier de chercheur avec Manuel Samuelides lors d'un stage de DEA sur le thème "Propriétés génériques des dynamiques de réseaux neuromimétiques". Ce stage m'avait été présenté comme un préalable à un projet à très long terme ayant pour but de : "stocker de l'information sur un attracteur étrange" (voir le chapitre 2). Il est ainsi des phrases magiques qui génèrent des vocations. Ce fut pour moi l'occasion d'avoir plusieurs "révélations" qui ont par la suite guidé mes orientations de recherche.

M. Samuelides m'avait demandé d'étudier un article de H. Sompolinsky et ses collaborateurs [1], traitant de la dynamique de réseaux de neurones chaotiques. Pendant les cours de DEA j'avais découvert d'une part la richesse des systèmes dynamiques, et notamment la beauté du chaos. J'avais d'autre part été fasciné par la puissance de la mécanique statistique, qui permettait, non seulement d'étudier les systèmes physiques, mais également d'analyser des systèmes biologiquement inspirés, tels les réseaux de neurones à la Hopfield [2], ces derniers étant en définitive des verres de spins. Je m'étais alors plongé dans la littérature des verres de spins et des systèmes désordonnés, et même si je m'étais quelque peu noyé dans cette profusion d'idées fondatrices, de techniques complexes et de résultats parfois très abstraits, j'avais au moins compris que la problématique se ramenait, à un moment ou l'autre, à calculer une énergie libre.

L'article de Sompolinsky et ses collaborateurs mêlait les deux aspects : systèmes dynamiques chaotiques et systèmes de grande taille désordonnés. Il proposait un modèle de réseaux de neurones à couplages aléatoires, mais non symétriques. Le modèle exhibait alors différents comportements, dont notamment un régime chaotique (pour plus de détails, voir le chapitre 2). J'eus alors une grande déception. Je découvrais avec stupeur que la sacro-sainte distribution de Gibbs, que je considérais comme point de départ de toute étude d'un système à grand nombre de degré de liberté, cette distribution de Gibbs que j'avais, depuis la licence, reçue comme l'un des dix commandements, n'était pas appropriée pour l'étude du modèle de Sompolinsky et ses collaborateurs. En particulier, l'absence de symétrie dans l'interaction entre neurones formels, propriété naturelle dans les systèmes biologiques mais pas en physique, rendait caduque la notion d'énergie et tout ce qui en découlait.

Cependant, la méthode d'analyse développée par les auteurs était complètement issue de la physique statistique et de la théorie des champs, venant en droite ligne de l'intégrale de Feynman et des travaux de Sompolinsky et Zippelius [3] sur la dynamique des verres de spins. Elle permettait d'obtenir des résultats hautement non triviaux sur la dynamique du modèle, lorsque le nombre de neurones tendait vers l'infini (limite "thermodynamique"). *Il semblait donc que les techniques de la mécanique statistique pouvaient être adaptées pour étudier des systèmes dynamiques sortant de son cadre d'étude habituel.* Ce fut pour moi une première révélation.

Au cours de ma thèse je développais l'étude d'un modèle généralisant celui de Sompolinsky et col. en mêlant des techniques de systèmes dynamiques, physique statistique, et probabilités. Je découvris par ailleurs des liens intéressants avec les verres de spins. Un résumé des résultats obtenus est présenté dans le chapitre 2. En apprenant les techniques nécessaires j'eus une autre révélation. Lisant le célèbre article de revue d'Eckmann et Ruelle [4], je vis réapparaître la distribution de Gibbs, sous une forme plus générale que celle que l'on m'avait enseignée en licence, et utilisée notamment dans le cadre des systèmes "chaotiques" (systèmes hyperboliques). Il semblait donc que les idées initiées par Boltzmann et Gibbs avaient des échos dans un cadre beaucoup plus large que la physique, notamment dans des systèmes dynamiques non hamiltoniens, même si un travail d'adaptation était nécessaire.

Cette fascination pour l'adaptation des concepts et techniques de la mécanique statistique aux systèmes dynamiques a été le fil conducteur de mon activité de recherche depuis lors. C'est elle qui a inspiré mon travail post-doctoral sur les réseaux de neurones (chapitre 2), puis sur les systèmes critiques auto-organisés (chapitre 4). C'est encore elle qui guide les différentes directions de recherche que j'explore maintenant (voir chapitre 6), même si je me détourne désormais quelque peu de la limite thermodynamique pour m'intéresser aux effets de taille finie. Ce manuscrit raconte l'histoire de cette fascination.

Chapitre 1

Introduction.

Le progrès scientifique est un bel exemple de phénomène collectif avec des interactions “spatio-temporelles” à longue portée. D’une part, il se construit sur un ensemble de concepts préexistants, dans un cadre plus ou moins bâti, avec son ensemble de postulats implicites ou explicites, ses notations, conventions, etc ..., qui guident mais aussi contraignent la pensée, l’amenant à se développer dans certaines directions plutôt que d’autres. Il s’appuie alors, dans un domaine donné, sur un savoir précédemment acquis au cours d’une histoire remontant parfois à plusieurs millénaires (et d’autres fois à quelques années seulement). En ce sens, l’histoire d’une discipline (scientifique ou autre) est contingente et corrélée à l’histoire qui la précède sur des temps qui peuvent être très longs. D’autre part, si le progrès scientifique peut résulter du travail de quelques spécialistes développant tel ou tel aspect technique, il est également souvent le fruit d’interactions entre disciplines parfois lointaines. Un exemple actuel et flagrant est l’avancée fulgurante de la médecine et des biotechnologies, qui n’aurait pu se faire sans l’avènement de la technologie électronique, informatique, du laser, de l’imagerie, etc ... technologies elles-mêmes conséquences de la mécanique quantique. Il y a en particulier un transfert transversal des sciences dites dures vers les autres disciplines scientifiques. Ce transfert s’accélère, et de plus en plus, les concepts et techniques développés en mathématiques et physique sont appliqués à des disciplines aussi lointaines que la sociologie, l’économie, etc ...

Cette tendance se manifeste notamment par le développement de ce qu’on appelle de manière encore assez vague les “systèmes complexes”. Le nombre de scientifiques (physiciens en particulier) travaillant dans ce domaine va sans cesse croissant, et l’on assiste à l’éclosion de nombreuses revues, sites Web, conférences, programmes de recherche etc ..., consacrés à ce sujet. Ceci traduit à mon sens un besoin clair et qui ira toujours croissant : la nécessité d’interactions transversales pour équilibrer la prolifération de spécialistes aux compétences toujours plus pointues et au langage nécessairement toujours plus ésotérique. Malheureusement, signe de la jeunesse du domaine, et conséquence de sa transversalité, l’étude des systèmes complexes manque encore de fondements théoriques, de définition précises¹ et d’un cadre mathématique adéquat. Par ailleurs, ces systèmes, dans de nombreux cas composés d’unités élémentaires interagissant de façon “complexe” (non linéaire, non symétrique, avec délais etc ...), exhibent un comportement collectif dit “émergent” que l’on pourrait caricaturer par la maxime : “le tout est plus que la somme des parties”. Le système acquiert de ce comportement collectif des caractéristiques nouvelles non réductibles à la superposition du comportement des unités le constituant. A contrario il n’hérite pas nécessairement de toutes les propriétés de ces unités. Cela est particulièrement vrai pour les propriétés mathématiques des équations décrivant le système. Celles-ci résultent souvent d’approximations, de moyennes sur un ensemble d’unités etc ..., qui leur font perdre la structure mathématique que l’on pouvait avoir au niveau d’une unité. Par exemple, la dynamique d’un neurone est le résultat de mécanismes complexes faisant intervenir des ions sodium,

1. Il reste encore en particulier à trouver un consensus sur la définition même de la complexité.

potassium, calcium, ainsi que de pompes à ions et canaux ioniques associés à des molécules aux propriétés spécifiques. Il est possible que cette dynamique soit descriptible, au niveau le plus fin, par une équation de Schrödinger. Cette remarque est néanmoins de peu d'utilité puisqu'on ne sait pas écrire cette équation, puisque même si l'on savait l'écrire on ne saurait pas la résoudre, et enfin puisque même si on savait le faire, la quantité d'informations en découlant serait beaucoup trop importante pour les besoins qu'on peut avoir de la description dynamique du neurone. De fait, les équations différentielles de Hodgkin-Huxley, par exemple, décrivent avec une grande précision cette dynamique en mimant le comportement des espèces ioniques et en incluant des termes phénoménologiques associés aux transferts d'ions. Elles n'ont clairement pas la structure d'une équation de Schrödinger et ont des propriétés mathématiques complètement différentes. De même les modèles de réseaux de neurones formels mimant le comportement d'une assemblée de neurones communiquant par des synapses ne sont usuellement pas décrits par des équations de Hodgkin-Huxley couplées, mais par des équations simplifiées avec des propriétés différentes, etc Ainsi, de manière générale, le processus de modélisation qui vise à capturer certaines caractéristiques jugées essentielles et en élimine d'autres considérées comme "détails", peut également avoir pour conséquence de changer la structure mathématique des objets considérés.

Il découle de cet ensemble de remarques qu'il n'y a à l'heure actuelle (à ma connaissance) pas de méthode générale pour analyser les systèmes complexes et la stratégie d'étude doit souvent faire "feu de tous bois" (simulations numériques, adaptation de méthodes mathématiques ou d'idées et concepts de la physique etc . . .). Néanmoins, dans de nombreux cas, on a finalement à traiter de systèmes dynamiques, constitués (en général) d'un grand nombre d'unités, interagissant (en général) de façon non linéaire. La théorie des systèmes dynamiques et la théorie ergodique s'avèrent alors des outils précieux et féconds, permettant souvent de jeter des bases théoriques préliminaires à l'analyse de tel ou tel problème. Par ailleurs, la mécanique statistique peut s'avérer un moyen efficace pour extraire les comportements macroscopiques ou mésoscopiques émergents. Néanmoins, il faut noter que le cadre mathématique de la mécanique statistique concerne des systèmes dans lesquels la dynamique microscopique a une structure particulière, puisque définie via un hamiltonien (équations de Schrödinger pour la mécanique quantique, équations de Hamilton pour la mécanique classique, dynamique hamiltonienne bruitée etc . . .) ou, faisant intervenir l'énergie comme fonction de Lyapunov² pour les systèmes dissipatifs. Les modèles apparaissant dans le cadre des systèmes complexes n'ont en général pas cette structure. Il convient donc d'adapter les techniques de la mécanique statistique à leur étude.

Dans les chapitres suivants, on montre différents exemples de systèmes complexes pour lesquels la théorie des systèmes dynamiques et la théorie ergodique d'une part, la mécanique statistique et la théorie des probabilités d'autre part, et enfin (dernier mais pas le moindre) la simulation numérique se marient avantageusement pour donner une analyse relativement fine de leur comportement.

1.1 Cadre général et notations.

Je donne ici les principales notions et notations que l'on rencontrera dans le mémoire. J'ai cependant, dans l'ensemble, préféré introduire les définitions et la terminologie mathématique au fur et à mesure de leur utilisation, en notes de bas de page pour ne pas alourdir le texte (et en surchargeant ainsi parfois le bas de page . . .). Le corollaire en est quelques redites qui ne dérogent pas au principe zéro de l'enseignement: répéter pour instruire.

Je me suis par ailleurs efforcé d'homogénéiser les notations. Mais il s'agissait d'un délicat problème d'optimisation sous contraintes, puisqu'il fallait aussi que ces notations soient cohérentes avec les articles présentés en annexe. Or, ces dernières, dépendant du contexte et de l'histoire du sujet, sont, par essence, contingentes.

2. Par définition, une fonction de Lyapunov décroît dynamiquement, et elle est bornée inférieurement. L'énergie dans un système mécanique dissipatif est donc une fonction de Lyapunov.

Les systèmes dynamiques auxquels on s'intéressera dans ce mémoire sont du type³ :

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}_\gamma[\mathbf{x}(t)] \quad (1.1)$$

où $\mathbf{x}$ est un point de $\mathbb{R}^N$, représenté par un vecteur de composantes x_k , $k = 1 \dots N$. $\mathbf{F}_\gamma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction dépendant d'une famille de paramètres $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma_1, \dots, \gamma_{p_N})$. Les applications $\mathbf{F}_\gamma$ que l'on considérera contractent en général le volume dans l'espace des phases. Il n'y a en général *pas* de fonction de Lyapunov jouant le rôle d'une énergie, et pas de quantité dynamiquement conservée. Dans tous les cas que nous considérerons, on pourra restreindre l'espace de phase à un ensemble compact $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On notera $\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_\gamma^t(\mathbf{x})$ où $\mathbf{F}_\gamma^t$ est l'itéré t-ième de $\mathbf{F}_\gamma$ et $x_k(t)$ la k i-ème composante de $\mathbf{x}(t)$. La trajectoire (future⁴) de (1.1) issue de la condition initiale $\mathbf{x}$ sera notée $\tilde{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^\infty$, et de même $\tilde{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x_k(t)\}_{t=1}^\infty$. La trajectoire de $\mathbf{x}$ (resp. la trajectoire de x_k) tronquée au temps T sera notée $\tilde{\mathbf{x}}_T$ (resp. $\tilde{x}_{k,T}$).

On s'intéressera au comportement de (1.1) pour N (arbitrairement) grand. On montrera en particulier qu'étudier la limite $N \rightarrow \infty$ peut donner des indications précieuses sur le système de dimension finie. A contrario, dans cette limite, on peut avoir émergence de comportements particuliers (comportement "critique" dans le chapitre 4 par exemple), qui peuvent être anticipés par l'analyse du système de taille finie. Par analogie avec la mécanique statistique nous appellerons cette limite, "limite thermodynamique", même s'il faut bien prendre conscience de quelques différences essentielles.

- Comme on l'a dit plus haut, en physique l'énergie (le hamiltonien) joue un rôle dynamique essentiel. Par ailleurs, en mécanique statistique, les fluctuations des quantités physiques étudiées sont caractérisées par une distribution de probabilité: la distribution de Gibbs. Si l'on peut obtenir cette distribution sans référence à la dynamique, en invoquant simplement le second principe et en ajoutant des contraintes (quantités conservées en moyenne) correspondant à un choix d'*ensemble* (énergie moyenne fixée, nombre de particules moyen fixé, etc ...), il est également possible de produire un système dynamique *stochastique* (dynamique de Glauber, Métropolis, dynamique de Langevin, etc ...), admettant, à taille finie, une unique mesure invariante (eq. (1.5)) et ergodique (eq. (1.6)) qui est la distribution de Gibbs. Pour ce faire, le système dynamique doit satisfaire à certaines contraintes: dynamique de descente le long du gradient d'énergie pour la partie déterministe; dynamique hamiltonienne bruitée, chaîne de Markov et principe de bilan détaillé pour les probabilités de transition dans la dynamique de Glauber, etc ...

A contrario, le système dynamique (1.1) n'admet, sauf cas particulier, *pas* de fonction de Lyapunov, sa dynamique est non hamiltonienne et il n'y a pas de fonction jouant le rôle d'une énergie. Par ailleurs, la dynamique (1.1) est *déterministe*. La théorie ergodique a néanmoins pour objet l'étude des systèmes dynamiques déterministes d'un point de vue probabiliste, la source d'"aléa" étant le choix des conditions initiales. Ce point de vue est particulièrement fécond pour l'étude de systèmes "chaotiques" (plus exactement les systèmes hyperboliques dont la définition est donnée plus bas). Il est alors possible de mettre en évidence des mesures de probabilités remarquables qui sont une extension formelle de la distribution de Gibbs [5, 6, 7], où la fonction qui remplace l'énergie dans l'exponentielle est une fonction dynamiquement pertinente. Il y a malheureusement peu d'exemples de systèmes dynamiques "physiques" où l'on sait construire et utiliser ce type de mesure (voir cependant les livres de P. Gaspard [8], B. Dorfmann [9] et les références incluses⁵).

3. Nous nous restreignons ici à des systèmes à temps discret bien que ce ne soit pas une restriction fondamentale.

4. A noter que la trajectoire passée n'est définie que si $\mathbf{F}$ est inversible.

5. Mon rêve inachevé est qu'on puisse un jour ajouter le modèle de Zhang (chapitre 4) à cette liste.

- La mécanique statistique rigoureuse définit mathématiquement la limite thermodynamique dans des systèmes classiques ou quantiques, à partir de la distribution de Gibbs à volume fini (construction de Dobrushin-Lanford-Ruelle notamment) [10]. Il n'existe, à ma connaissance, pas de théorie générale aussi avancée pour des systèmes dynamiques du type (1.1). Il y a par contre tout un attirail de méthodes que l'on peut utiliser pour étudier cette limite dans un problème donné. Ce mémoire en présente quelques-unes.

La dimension p_N du vecteur des paramètres, γ , pourra dépendre de N . Les paramètres sont fixés au cours de l'évolution. On étudiera néanmoins dans la partie 2.3 un cas d'évolution lente des paramètres, couplée à la dynamique rapide (1.1). Par ailleurs, on envisagera le cas où γ est un vecteur *aléatoire* de loi spécifiée. γ étant fixé au cours de l'évolution, on parlera d'*aléa* ou de *désordre gelé* pour reprendre la terminologie de la physique statistique des systèmes désordonnés.

Lorsque γ est aléatoire on notera par la suite sa loi de probabilité $P_\gamma^{(N)}$. Elle dépend en général de paramètres Γ (par exemple moyennes et variances si γ est un vecteur gaussien). On appellera les paramètres γ paramètres *microscopiques*, puisqu'ils régissent la dynamique (1.1). Par ailleurs, les paramètres Γ , définissant la loi de probabilité de γ , seront appelés paramètres *macroscopiques*.

On note que $P_\gamma^{(N)}$ dépend de N , ce qui peut poser des problèmes si l'on souhaite définir la loi limite lorsque $N \rightarrow \infty$ (cf. chapitre 2). Dans ce cadre, il est alors utile de se donner un espace et une probabilité de référence $\mathbf{P}$ indépendante de N . On rappelle qu'en théorie des probabilités [11] on se donne un espace de référence, ou espace probabilisé⁶ $(\Omega', \mathcal{F}, \mathbf{P})$ où Ω' est l'univers, $\mathcal{F}$ une σ -algèbre contenant les ensembles mesurables, et $\mathbf{P}$ une probabilité. On note ω un point de Ω' . Une variable aléatoire X est une fonction mesurable⁷ de $X : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$. Par la suite la notation $X(\omega)$ désignera donc une *réalisation*⁸ de la variable aléatoire X . La loi⁹ de X , P_X , est donnée par :

$$P_X(\mathcal{B}) = \mathbf{P} \{ \omega \mid X(\omega) \in \mathcal{B} \} \quad (1.2)$$

où $\mathcal{B}$ est un ensemble mesurable. On peut procéder de même pour définir la loi d'une famille de variables aléatoires. Ainsi la loi de γ sous $\mathbf{P}$, $P_\gamma^{(N)}$ est donnée par :

$$P_\gamma^{(N)}(A) = \mathbf{P} \{ \omega \mid \gamma(\omega) \in A \} \quad (1.3)$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^{p_N}$, et la moyenne de toute fonction g , $P_\gamma^{(N)}$, intégrable est donnée par :

$$\int_{\mathbb{R}^{p_N}} g(y) dP_\gamma^{(N)}(y) = \int_{\Omega'} g(\gamma(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) \quad (1.4)$$

Noter que dans les membres de gauche des équations (1.3), (1.4), la dépendance en N est dans le vecteur γ , mais pas dans la loi de probabilité $\mathbf{P}$.

On cherche maintenant à avoir une description qualitative et quantitative de la dynamique (1.1). Cette description peut se faire de différentes façons et à plusieurs niveaux.

6. Pour pouvoir utiliser des techniques du type grandes déviations [12] il est de plus nécessaire de demander que $(\Omega', \mathcal{F}, \mathbf{P})$ soit un espace *métrisable* (il existe une distance), *séparable* (il existe un ensemble dénombrable dense) et *complet* pour cette distance (les suites de Cauchy convergent dans Ω'). Un tel espace est aussi appelé espace *polonais*.

7. L'image réciproque par X d'un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (en général un borélien) est mesurable

8. J'aime assez l'analogie suivante. D'un point de vue numérique on peut voir ω comme le *germe* du générateur aléatoire, X est le morceau de code qui génère la valeur d'une réalisation à partir du germe, et $\mathbf{P}$ est la probabilité de tirer un germe donné: elle est par exemple uniforme sur un intervalle entier si l'on utilise les techniques classiques associant au germe le numéro du process, ou bien l'heure convertie en entier.

9. Plus correctement les probabilistes emploient la terminologie "loi de X sous $\mathbf{P}$ ".

Caractérisations topologiques. On s'intéresse ici essentiellement à une caractérisation en termes de trajectoires. Même si la dimension du système (1.1) est grande, un certain nombre de résultats de la théorie des systèmes dynamiques peuvent être utilisés pour en analyser la dynamique. Une première étape est d'extraire des éléments caractéristiques de la dynamique tels qu'attracteurs ou répulseurs, séparatrices, orbites homoclines, etc... Évidemment on est rapidement limité mais on peut parfois répondre à un certain nombre de questions préliminaires tels l'unicité¹⁰ ou la stabilité de points fixes, par exemple, en utilisant des théorèmes généraux (existence de fonction de Lyapunov, propriété de contraction, théorèmes de génécité, spectre de matrices aléatoires, etc...). On en donne plusieurs exemples dans les chapitres suivants. Dans le cadre où l'on se place, la dynamique admet un ou plusieurs attracteurs¹¹. Il est alors naturel de se focaliser sur les propriétés topologiques du ou des attracteurs¹², puisqu'ils caractérisent la dynamique asymptotique. Les attracteurs tels que points fixes, cycles, tores, ont des caractéristiques topologiques évidentes.

Il existe par ailleurs des attracteurs plus complexes tels les attracteurs dits "étranges". Il y a plusieurs définitions de "l'étrangeté" d'un attracteur, et elles ne sont pas toutes équivalentes. Il semble néanmoins y avoir maintenant un consensus plus ou moins général sur la nécessité d'avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Celle-ci est bien souvent liée à une autre notion fondamentale, dont découlent un certain nombre de propriétés essentielles, celle d'*hyperbolicité*. $\mathcal{A}$ est (uniformément) hyperbolique s'il a les propriétés suivantes¹³. Il existe $0 < \lambda < 1 < \mu$ et une constante C tels que, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}$:

- (i) Il existe deux sous-espaces $\mathcal{E}^s(\mathbf{x}), \mathcal{E}^u(\mathbf{x})$ appelés respectivement sous-espace *stable* et sous-espace *instable*, qui forment une décomposition invariante de l'espace tangent à $\mathbf{x}$: $\mathcal{T}_{\mathbf{x}} = \mathcal{E}^s(\mathbf{x}) \oplus \mathcal{E}^u(\mathbf{x})$ et $D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^t \mathcal{E}^s(\mathbf{x}) = \mathcal{E}^s(\mathbf{F}^t(\mathbf{x}))$ (resp. $D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^t \mathcal{E}^u(\mathbf{x}) = \mathcal{E}^u(\mathbf{F}^t(\mathbf{x}))$), $\forall t > 0$ où $D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$ est l'application dérivée en $\mathbf{x}$. Par ailleurs, l'angle entre les deux sous espaces est borné loin de 0.
- (ii) $D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$ est *contractante* sur $\mathcal{E}^s(\mathbf{x})$: Si $\mathbf{v}$ est un vecteur de $\mathcal{E}^s(\mathbf{x})$:

$$\|D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^t \mathbf{v}\| \leq C\lambda^t \|\mathbf{v}\|, \forall t > 0$$

- (iii) $D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$ est *dilatante* sur $\mathcal{E}^u(\mathbf{x})$: Si $\mathbf{v}$ est un vecteur de $\mathcal{E}^u(\mathbf{x})$:

$$\|D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{-t} \mathbf{v}\| \leq C\mu^{-t} \|\mathbf{v}\|, \forall t > 0$$

La propriété d'hyperbolicité correspond à la propriété physique de chaos fort¹⁴ (sensibilité aux conditions initiales).

On note que dans la définition la constante C est indépendante de $\mathbf{x}$. Plus généralement, on définit la notion d'hyperbolicité *non uniforme*, où la constante C dépend notamment de $\mathbf{x}$, ce qui a des

10. L'existence d'au moins un point fixe est assurée par le théorème de Brouwer lorsque $\mathbf{F}$ est continue [13].

11. Il existe de nombreuses définitions, non équivalentes d'un attracteur [4, 14, 15, 16, 17]. Elles associent cependant toutes les notions d'*attractivité* et d'*indécomposabilité*. Voici une définition possible [13]. Un attracteur est un ensemble compact $\mathcal{A}$ ayant les propriétés suivantes.

- (i) Attractivité. Il existe un ouvert $\mathcal{U} \supset \mathcal{A}$ et un temps t_0 tel que $\mathbf{F}^{t_0}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{A} = \bigcap_{t=0}^{\infty} \mathbf{F}^t(\mathcal{U})$
- (ii) Indécomposabilité. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ et $\forall \epsilon > 0$ il y a une chaîne $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$ et une suite d'instantan $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 1$ tels que la distance entre $\mathbf{F}^{t_i}(\mathbf{x}_{i-1})$ et $\mathbf{x}_i$ n'est jamais supérieure à ϵ .

A noter que la propriété (i) implique l'invariance par $\mathbf{F}$.

12. Une notion plus générale est celle d'ensemble *non errant*. Un point $\mathbf{x}$ est non errant si pour tout ouvert $\mathcal{U} \ni \mathbf{x}$ il y a un temps $t_0 > 0$ tel que $\mathbf{F}^{t_0}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. L'ensemble des points non errants est fermé et invariant. Il contient les points d'accumulation des trajectoires passées et futures de tous les points de Ω (ensembles α -limite et ω -limite). Il contient donc les attracteurs, les répulseurs, etc...

13. Dans les définitions suivantes on suppose que $\mathbf{F}$ est un difféomorphisme.

14. Par opposition au chaos faible qui est caractérisé par une entropie topologique positive. Ces deux notions ne sont pas équivalentes.

conséquences importantes (en particulier l'angle entre $\mathcal{E}^s(\mathbf{x}), \mathcal{E}^u(\mathbf{x})$ n'est plus borné loin de 0). Les systèmes que l'on étudiera n'ont à priori pas de raison d'être uniformément hyperboliques. Le bon cadre mathématique pour les étudier est alors la théorie de Pesin [18, 19] qui a permis de généraliser un certain nombre de résultats au cas non uniformément hyperbolique. Nous en utilisons plusieurs dans ce mémoire.

On démontre alors un certain nombre de propriétés topologiques remarquables caractérisant la dynamique complexe sur des ensembles hyperboliques: existence de variété stable (resp. instable) localement tangente aux espaces $\mathcal{E}^s(\mathbf{x})$ (resp. $\mathcal{E}^u(\mathbf{x})$) (voir section 4.2.9); lemme de poursuite (shadowing lemma) permettant de comprendre *pourquoi* on peut simuler correctement sur un ordinateur un système dynamique ayant la sensibilité aux conditions initiales *malgré* les erreurs numériques; densité des orbites périodiques instables conduisant notamment à des formules de trace; structure de produit local permettant de construire notamment des partitions remarquables, dites partitions de Markov, utilisées dans la dynamique symbolique (voir section 4.2.11); stabilité structurelle (ou robustesse dans la variation des paramètres); théorème de décomposition spectrale, etc ... (voir [13] pour une vue encyclopédique du sujet.) Une notion clef est celle d'orbite dense. On dira que la dynamique est *topologiquement transitive* sur $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe une orbite dense sur $\mathcal{A}$. Elle est *minimale* sur $\mathcal{A}$ si et seulement si *toutes* les orbites sont denses. Enfin, elle est *topologiquement mélangeante* si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{A}$, $\exists T \equiv T(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) > 0$ tel que $\mathcal{O}_1 \cap \mathbf{F}^t \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$, $\forall t \geq T$ [13].

La caractérisation topologique est plus aisée lorsqu'il est possible de produire une dynamique symbolique. Nous en donnons un exemple dans le chapitre 4.

Caractérisations statistiques. Ici, on s'attache plutôt aux propriétés statistiques de la dynamique. Ce terme a plusieurs sens dans notre cadre.

Notion d'état. D'une part, on veut étudier la statistique des trajectoires dans l'espace de phases. L'objet naturel est alors une mesure de probabilité sur Ω . Comme on va le voir, il y a alors une correspondance entre les mesures de probabilités sur Ω et la notion d'*état* en physique statistique. L'état initial, caractérisant la façon dont le système est préparé, (resp. la façon dont les conditions initiales sont choisies) est une mesure de probabilité, $\mu^{(0)}$, sur Ω . De même l'état à l'instant t , résultant de l'action de la dynamique sur $\mu^{(0)}$ est la mesure $\mu^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{*t} \mu^{(0)}$ donnée par :

$$\mu^{(t)}[\mathcal{A}] = \mu^{(0)}[\mathbf{x} \mid \mathbf{F}^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}] = \mu^{(0)}[\mathbf{F}^{-t}(\mathcal{A})]$$

où $\mathcal{A}$ est un ensemble mesurable de Ω .

La statistique des trajectoires dans la dynamique asymptotique ("sur" l'attracteur) est caractérisée par une mesure *invariante* c'est-à-dire:

$$\mu(\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A}) \tag{1.5}$$

où $\mathcal{A}$ est un ensemble mesurable (un borélien) de Ω . La notion correspondante en mécanique statistique est celle de *phase*. Une phase est en effet une mesure de Gibbs à volume infini¹⁵, invariante par translation sur le réseau. Cette invariance correspond à l'invariance par translation dans le temps (1.5).

Le théorème de Krylov-Bogoliubov [13] établit qu'un système dynamique défini par une application $\mathbf{F}$ continue sur un espace de phase compact admet au moins une (et en général une infinité de) mesures

15. Pour une définition mathématique de cette notion voir notamment [10]

invariantes. On établit par ailleurs que l'ensemble des mesures invariantes est convexe, et compact pour la topologie faible¹⁶[13].

Cet ensemble a par ailleurs, par le théorème de Choquet, une structure de simplexe. Plus précisément, le théorème de Choquet permet d'établir que pour toute mesure invariante μ , il existe une partition (modulo les ensembles de mesure nulle) de Ω en sous-ensembles invariants Ω_α , $\alpha \in A$, où chaque X_α porte une mesure invariante μ_α telle que la moyenne de toute fonction ϕ relativement à μ se décompose comme:

$$\int \phi d\mu = \int \int \phi d\mu_\alpha d\alpha$$

La mesure $d\alpha$ est une mesure sur A qui contient une partie absolument continue et une partie purement ponctuelle. L'ensemble des mesures μ_α correspond à des *points extrémaux*, c'est-à-dire que μ_α , $\alpha \in A$, n'admet pas de décomposition convexe non triviale du type $\mu_\alpha = a\nu_1 + (1-a)\nu_2$, avec ν_1, ν_2 invariantes et $a \neq 0, 1$ [13]. Les points extrémaux de ce simplexe sont appelées mesures ou composantes *ergodiques*. La propriété d'extrémalité est en particulier équivalente aux propriétés: (1) tout ensemble $\mathbf{F}$ invariant est de μ_α mesure 0 ou 1; (2) toute fonction $\mathbf{F}$ invariante est μ_α presque sûrement constante; (3) On a égalité entre la moyenne temporelle et la moyenne relativement à μ_α pour μ_α presque toute trajectoire (voir la propriété (1.6) ci-dessous).

Les mesures ergodiques jouent le rôle des *phases pures* en mécanique statistique et le théorème de Choquet peut se traduire comme: une phase est un mélange (convexe¹⁷) de phases pures. Un exemple simple est la décomposition de l'état de Gibbs pour le modèle d'Ising. A basse température tout état se décompose en une combinaison linéaire convexe de la phase + et de la phase -. Noter que deux mesures ergodiques sont toujours étrangères¹⁸, donc qu'elles ne voient pas les mêmes ensembles (les configurations de spins donnant une aimantation négative sont de mesure nulle relativement à la phase pure +.).

Il est naturel de demander que l'état asymptotique soit une mesure ergodique. La définition de l'ergodicité la plus utilisée en physique, qui découle de la définition précédente et du théorème de Birkhoff¹⁹, est la suivante: une mesure μ est ergodique, si pour μ presque toute condition initiale $\mathbf{X}$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \phi(\mathbf{x}(t)) = \int \phi d\mu \quad (1.6)$$

où ϕ est une fonction de $L^1(d\mu)$. La propriété (1.6) est malheureusement assez pauvre quant aux indications qu'elles nous donne sur la dynamique. Plus précisément, on montre qu'un système dynamique sur un espace compact a au moins une mesure ergodique, et en a en général une infinité [13]. Par

16. On dit qu'une suite de mesures μ_n converge faiblement vers une mesure μ lorsque $n \rightarrow \infty$ si, pour toute fonction ϕ continue sur Ω :

$$\int_{\Omega} \phi d\mu_n \rightarrow \int \phi d\mu$$

17. Une combinaison linéaire d'états doit rester une probabilité.

18. Deux mesures μ_1, μ_2 sont *étrangères* s'il existe un ensemble mesurable A tel que $\mu_1(A) = 1$ et $\mu_2(\bar{A}) = 1$, où $\bar{A}$ est le complémentaire de A . Cela signifie intuitivement que μ_1 et μ_2 ne "voient" pas les mêmes ensembles (la mesure de Lebesgue ne voit pas l'ensemble de Cantor). Deux mesures sont, a contrario, absolument continues si $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu_1(A) = 0 \Rightarrow \mu_2(A) = 0$. Le théorème de Radon-Nikodym établit alors qu'il existe une unique fonction (modulo les événements de μ_1 mesure nulle), $\rho \in L^1(d\mu_1)$ telle que $\forall B \in \mathcal{F}$, $\mu_2(B) = \int_B \rho d\mu_1$. ρ est appelée *densité* de μ_2 par rapport à μ_1 .

19. Ce théorème dit que la limite: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \phi(\mathbf{x}(t))$ existe μ presque sûrement, si μ est invariante (mais dépend de $\mathbf{x}$). Cela définit alors une fonction $\mathbf{F}$ invariante qui est donc μ presque sûrement constante si μ est ergodique. Cela n'empêche pas qu'il existe en général une infinité de configurations $\mathbf{x}$, pour lesquelles la moyenne *n'est pas* $\int \phi d\mu$, (mais l'ensemble de ces configurations est de μ -mesure nulle).

exemple une orbite périodique instable supporte une mesure ergodique et la moyenne temporelle le long de cet orbite obéit bien à (1.6) pour presque toute condition initiale *prise sur cette orbite*. Mais cette orbite, étant instable, n'est pas vraiment caractéristique car on ne pourra pas l'atteindre en prenant des conditions initiales typiques, c'est-à-dire, essentiellement, des conditions initiales tirées au hasard selon une loi de probabilité typique (loi uniforme, distribution gaussienne, etc...). Par ailleurs, un système dynamique hyperbolique admet une infinité d'orbites périodiques instables.

Une mesure μ est une mesure de *Sinai-Ruelle-Bowen* ou *mesure physique* ou encore *mesure naturelle* si la propriété (1.6) est vraie pour un ensemble de *mesure de Lebesgue* positive [20, 21] de conditions initiales. Cela signifie que l'on a identité entre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble pour des conditions initiales physiquement typiques. Elle caractérise en particulier la statistique des trajectoires typiques sur leur attracteur. Par ailleurs, c'est aussi la mesure de probabilité que l'on obtient comme *limite de la mesure de Lebesgue ou de toute mesure ayant une densité*, dans le sens suivant. Si l'on prépare le système en choisissant les conditions initiales au hasard selon une mesure $\mu^{(0)}$ ayant une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et si la dynamique est topologiquement mélangeante²⁰ alors [21]:

$$\mathbf{F}^{*t}(\mu^{(0)}) \xrightarrow{\text{faiblement}} \mu, \text{ quand } t \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

Cela correspond bien à l'intuition physique: la moyenne d'un observable ϕ , prise, au temps t , sur toutes les trajectoires de conditions initiales typiques, converge vers la moyenne d'ensemble relativement à l'état d'équilibre. A noter que la limite peut ne pas exister s'il y a plusieurs points d'accumulation. Cela correspond par exemple au cas où plusieurs états asymptotiques coexistent ("brisure d'ergodicité"). Dans ce cas, chaque point d'accumulation est une mesure SRB.

La mesure SRB est une bonne extension de la notion d'état en physique statistique. Elle possède en particulier, outre la propriété que l'on vient d'énoncer, d'autres caractéristiques qui la rendent naturelle, telles que robustesse aux perturbations stochastiques [4, 20], et maximisation d'une fonctionnelle s'apparentant formellement à l'énergie libre. C'est un cas particulier d'une notion plus générale, celle d'état d'équilibre et d'état de Gibbs développée par Sinai, Ruelle, Bowen [5, 6, 7, 23] dans le cadre des systèmes dynamiques et qui sont une extension formelle naturelle de la notion existant en mécanique statistique. Nous en donnons la définition, dans le cadre de la dynamique symbolique, dans la section 4.3.2. On peut néanmoins définir ces notions dans un cadre plus général [22].

Moyenne gelée. La mesure naturelle dépend par ailleurs des paramètres γ . Dans le contexte envisagé ici (notamment le chapitre 2), où le vecteur des paramètres est aléatoire (aléa gelé), on a donc une famille de mesures aléatoires paramétrées par les réalisations de l'aléa gelé. On a alors un autre niveau de description statistique: construire une mesure sur l'espace des mesures naturelles. Cette situation n'est pas sans rappeler celle rencontrée dans les verres de spins. Le chapitre 2 est consacré en partie à ce point.

Dépendance dans les paramètres. La variation de paramètres induit des changements quantitatifs dans les propriétés dynamiques. On va alors s'attacher aux comportements "génériques" du système (1.1), où générique a plusieurs sens.

20. Plus généralement μ est SRB si

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{F}^{*t}(\mu^{(0)}) \xrightarrow{\text{faiblement}} \mu, \text{ quand } T \rightarrow \infty$$

D'une part, on cherche à caractériser le comportement du système par variations continues des paramètres microscopiques γ . Ces variations sont régulières loin des points de bifurcation (e. g. par le théorème des fonctions implicites). Au contraire, aux points de bifurcation, on a des changements qualitatifs. On utilisera alors des résultats de généricité au sens topologique usuel²¹. Des techniques de classification, notamment réduction sous forme normale [14, 24, 25], permettent alors de mettre en évidence un certain nombre de bifurcations canoniques se produisant lorsque certaines contraintes (symétries par exemple) sont respectées. Cela permet d'avoir une idée à priori des bifurcations possibles lorsqu'un ou plusieurs paramètres sont modifiés. Cependant, lorsque le nombre des paramètres augmente (concrètement, dès qu'il est supérieur à deux) il n'y a en général pas de classification complète.

Dans le cas où les paramètres sont aléatoires on peut également s'intéresser aux changements qualitatifs se produisant (dans un sens probabiliste, en moyenne, presque sûrement, etc ...) lorsque la loi de ces paramètres est modifiée. On parle alors de généricité *statistique*. Pour ce faire, on fixe les paramètres macroscopiques Γ , ce qui fixe la loi de γ , et on s'intéresse à la statistique des comportements exhibés. D'un point de vue numérique cela signifie simuler un grand nombre de systèmes pour chaque valeur de Γ et pour N fixé (voir chapitre 2). D'un point de vue théorique on effectue ainsi une exploration "floue" de l'espace des paramètres microscopiques, en l'échantillonnant aléatoirement. Cette exploration sert de guide ultérieur pour anticiper le comportement du système lorsque les paramètres macroscopiques sont connus. Bien sûr cette méthodologie repose sur "l'espoir" que la "variabilité de comportements" se réduise lorsque la taille augmente. Cela signifie que l'on cherche à établir des propriétés de convergence, au sens probabiliste, lorsque $N \rightarrow \infty$. Le chapitre 2 développe cet aspect.

Lorsque l'on s'intéresse à une assemblée d'unités dont le nombre peut-être grand on a par ailleurs plusieurs niveaux de descriptions.

Niveau microscopique. On s'intéresse aux comportements d'unités individuelles. Le système dynamique (1.1) définit de fait la dynamique microscopique puisqu'il donne l'évolution de chaque unité. L'échelle de temps associée est le temps caractéristique d'une itération du système dynamique.

Niveau macroscopique. A l'opposé on peut s'intéresser au comportement collectif des unités prises dans leur ensemble. Cela conduit notamment à introduire des paramètres d'ordre, analogues à l'aimantation par exemple, qui sont une moyenne empirique d'une fonction de l'état de chaque unité. Les changements de comportement induits par variations des paramètres peuvent induire des modifications collectives qui apparaissent dans l'évolution du ou des paramètres d'ordre. Cette notion est par ailleurs en général (mais pas toujours) associée à l'étude du régime stationnaire de (1.1), correspondant à une limite où le temps devient infini. Elle devient particulièrement féconde et pertinente dans la limite où le nombre d'unités tend vers l'infini (limite "thermodynamique"), et où, idéalement, les paramètres d'ordre permettent de caractériser l'état asymptotique. On est cependant confronté d'une part au délicat problème de définir la limite thermodynamique de ces systèmes, puisqu'on n'a pas, comme en mécanique statistique, de cadre général et de procédure permettant de construire cette limite. D'autre part, les deux limites $t \rightarrow \infty$ (régime asymptotique) et $N \rightarrow \infty$ (limite thermodynamique) ne commutent que dans des cas particuliers. Ces problèmes sont évoqués tout au long de ce mémoire, avec des solutions partielles restreintes aux modèles étudiés.

21. Soit $\mathcal{D}$ un espace de systèmes dynamiques (espace de flots ou d'applications), muni d'une topologie (topologie de Whitney par exemple [25]). Un ensemble $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ est *générique* ou *résiduel* s'il est composé d'une intersection dénombrable d'ouverts denses. Si la topologie de $\mathcal{D}$ est induite par une métrique pour laquelle $\mathcal{D}$ est complet alors $\mathcal{G}$ est dense (théorème de Baire) [25]. Cela signifie que pour un système dynamique quelconque de $\mathcal{D}$ on peut trouver un système dynamique, aussi proche qu'on veut, appartenant à $\mathcal{G}$.

Niveau mésoscopique. Le niveau intermédiaire concerne le comportement collectif d'un nombre fini d'unités, et/ou l'évolution sur des échelles de temps et d'espace intermédiaires. Il peut-être caractérisé notamment par des équations de dynamique mésoscopique s'apparentant aux équations de transport en physique (équation de la chaleur, équations de Navier-Stokes, etc ...). Le chapitre 4 traite de cet aspect sur un modèle particulier.

Au cours de mon travail de recherche de ces huit dernières années, je me suis efforcé de développer une méthodologie, basée sur ces quelques principes, en vue d'étudier des systèmes dynamiques sortant du cadre habituel de la mécanique statistique. Ce manuscrit traite du développement de cette méthodologie dans différents cas, dont deux sont étudiés en totalité, les autres correspondant à des travaux en cours. Notons, en conclusion, que dans ce travail, la simulation numérique fut tout à fait fondamentale. Elle m'a permis d'explorer les comportements des systèmes étudiés et m'a quelquefois révélé des propriétés, voir des théorèmes, cachés (cf. par exemple le théorème 1 du chapitre 4 qui surgit au détour d'un programme destiné à classer les avalanches via un certain nombre d'observables. L'élaboration de ce programme fut par ailleurs l'occasion pour moi d'apprendre, sur les conseils de M. Monticelli, le magnifique concept informatique de "liste chaînée"). Je suis un fervent défenseur de l'approche "mixte", analytique-numérique, sans ordre de préférence. Il est utile de penser et d'analyser avant de simuler, mais bien simuler est une aide à la pensée.

1.2 Structure du manuscrit.

Il est divisé en six chapitres incluant l'introduction. Le chapitre 2 traite de "Dynamiques de réseaux de neurones additifs aléatoires.". Il est suivi de l'annexe A (chapitre 3) présentant trois articles originaux [Cessac, 1994d, Cessac, 1995, Daucé et col., 1998]. Le chapitre 4 s'intitule "Criticalité auto-organisée et systèmes dynamiques.". L'annexe B (chapitre 5) contient quatre articles sur ce thème [Blanchard et col., 1997, Blanchard et col., 2000, Cessac et col., 2001, Cessac & Meunier, 2002]. Le chapitre 6 présente les nouvelles directions de recherche auxquelles je me consacre maintenant. L'annexe C (chapitre 7) est un CV et une liste de mes publications. Un chapitre est décomposé en parties elles-mêmes découpées en sections. J'ai choisi d'avoir une indexation bibliographique distinguant mes travaux (ex. [Cessac, 1995]) de ceux d'autres auteurs (ex. [2]).

Bibliographie

- [1] Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.J. "Chaos in random neural networks", *Phys. Rev. Lett.* 61, 259-262, (1988).
- [2] Hopfield J.J., "Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities", *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, Vol 79, (1981), 2554-2558.
- [3] Sompolinsky H., Zippelius A., "Relaxation dynamics of the Edwards-Anderson model and the mean-field theory of spin-glasses", *Phys. Rev. B*, Vol 25, Num 11, (1982), 6860.
- [4] Eckmann J.P., Ruelle D., "Ergodic Theory of Strange attractors" *Rev. of Mod. Physics*, 57, (1985), 617.
- [5] Sinai Ya. G. , "Gibbs measures in ergodic theory", *Russ. Math. Surveys*, 27 No 4, (1972), 21-69.
- [6] Ruelle D. "Thermodynamic formalism" . Reading, Massachusetts: Addison-Wesley (1978).
- [7] Bowen R. "Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms", *Lect. Notes in Math.*, Vol. 470, Berlin: Springer-Verlag (1975).
- [8] Gaspard P. "Chaos, scattering and statistical mechanics", Cambridge Non-Linear Science series 9, (1996).
- [9] "An introduction to chaos in nonequilibrium statistical mechanics." , Cambridge University Press, (1999).
- [10] Ruelle D. "Statistical Mechanics: Rigorous results" Benjamin, New York (1969).
- [11] Billingsley , "Probability and measure" ; "Convergence of probability measures".
- [12] Ellis R. S., "Entropy, large deviations and statistical mechanics", Springer-Verlag, Vol 271, (1985).
Ellis R. S., "Large deviations and statistical mechanics", (1985).
- [13] Katok A., Hasselblatt B., "Introduction to the modern theory of dynamical systems", Kluwer (1998).
- [14] Guckenheimer Holmes, "Non linear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields.", Springer-Verlag (1983).
- [15] Milnor J., "On the concept of attractor", *Com. Math. Phys.*, 99, 177, (1985).
- [16] Williams R.F., "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, 43; 169, (1974).
- [17] Cosnard M., Demongeot J., Lausberg K., Lott K., "Attractors, confiners, and fractal dimensions: applications in neuromodelling", in "mathematics applied to biology and medicine", Wuerz publishing ltd, (1993).
- [18] Pesin Y. "Lyapunov characteristic exponents and ergodic properties of smooth dynamical systems with an invariant measure", *Sov. Math. Dok.*, 17, 196-199, (1976). Pesin Y., "Families of invariant manifolds corresponding to non-zero Lyapunov exponents", *Izvestija*, 10, 1261-1305 (1976); Pesin Y, Sinai Y, "Hyperbolicity and stochasticity of dynamical systems", *Math. Phys. Rev.*, 2, 53-115, (1981)
- [19] Pollicott M. "Lectures on ergodic theory and Pesin Theory on compact manifolds", London Math. Soc., Lect. Notes Series 180, Cambridge University Press, (1993).
- [20] Viana M., "Stochastic dynamics of deterministic systems".

-
- [21] Ruelle D. "Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics", preprint chao-dyn 9812032.
 - [22] Ruelle D., "Functional determinants related to dynamical systems and the thermodynamic formalism", Preprint IHES, (1995).
 - [23] Keller G., "Equilibrium states in ergodic theory", Cambridge university press (1998)
 - [24] Arnold V., "Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires", Editions Mir, Moscou.
 - [25] Ruelle D., "Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory", (1989) Academic Press.

Chapitre 2

Dynamiques de réseaux de neurones additifs aléatoires.

Dans ce chapitre on donne un premier exemple de système dynamique de la forme (1.1). Les résultats présentés sont le fruit d'une longue collaboration entreprise en 1990 avec B. Doyon (Neurophysiologiste INSERM, Toulouse), M. Samuelides (Mathématicien, ENSAE Toulouse), M. Quoy (Informaticien, Groupe de robotique ETIS, Cergy-Pontoise) et à laquelle s'est joint plus tard E. Daucé (Informaticien, Laboratoire de physiologie du comportement, Marseille). J'ai tenu à écrire une synthèse sur ce thème, en présentant l'ensemble de nos travaux [Doyon et col., 1992, Doyon et col., 1993a, Quoy et col., 1993b, Doyon et col., 1994, Cessac et col., 1994a, Cessac, 1994c, Cessac, 1994d, Cessac, 1995, Samuelides et col., 1996, Daucé et col., 1998], et en les situant par rapport aux approches d'autres équipes de recherche. Ainsi, certains des résultats présentés ici ont été obtenus pendant ma thèse [Cessac, 1994b]. L'annexe A contient cependant trois articles [Cessac, 1994d, Cessac, 1995, Daucé et col., 1998] correspondant à des travaux post-doctoraux.

2.1 Cadre général.

Les réseaux de neurones formels ont connu un développement spectaculaire depuis 1982, date à laquelle le physicien J.J. Hopfield [1] exhiba une analogie féconde entre certaines classes de réseaux de neurones et les systèmes de spins, permettant donc d'utiliser les méthodes de la mécanique statistique pour analyser leur comportement. Pour l'essentiel, cette analogie est due au fait que, dans ce type de réseaux de neurones formels, les interactions ("synapses") étant symétriques, l'évolution est régie par une dynamique de gradient, ce qui autorise une description du régime stationnaire en terme de minimisation d'énergie, ou d'énergie libre pour une version stochastique [2]. Malgré leur éloignement des neurones biologiques, ces réseaux ont connu un grand succès, aussi bien sur le plan des études théoriques, que de leurs applications. Néanmoins, un certain nombre d'auteurs [3] mettent rapidement en évidence le fait que l'hypothèse de symétrie des synapses n'est pas réaliste du point de vue biologique, pas plus que celle d'une dynamique à gradient, qui par essence est convergente.

En 1988, Sompolinsky et ses collaborateurs [4], montrent alors l'existence d'un régime chaotique dans un modèle de réseaux de neurones à connexions *asymétriques* aléatoires. Parallèlement, dès 1985, des études physiologiques suggèrent que la dynamique spontanée de certaines régions du cerveau puisse être chaotique [5, 6, 7, 8, 9, 10]. L'équipe de Freeman, en particulier, s'intéresse au processus de reconnaissance d'odeurs au niveau du bulbe olfactif du lapin. Leur conclusion principale est que la reconnaissance d'une odeur se matérialise par une réduction dimensionnelle¹ de la dynamique lors

1. Il y a clairement une difficulté technique majeure à estimer une dimension fractale ou toute autre quantité associée à une mesure de la complexité dynamique (exposants de Lyapunov, entropie, etc ...) sur un EEG qui, par essence, est un

de l'identification. Plus précisément, la dynamique spontanée (sans présentation d'odeur) est, d'après les expériences de ces auteurs, caractérisée par un attracteur chaotique. La présentation d'une odeur préalablement apprise se manifeste alors par une réduction de la dimension fractale de cet attracteur. Skarda et Freeman [11] suggèrent que ce type de processus joue un rôle important dans la dynamique cérébrale en général. L'information est stockée "quelque part" sur un gigantesque attracteur étrange et la présentation d'un stimulus connu déclenche une réponse *spécifique au stimulus* en terme de réduction (temporaire) du chaos. Le comportement chaotique apparaît alors comme un vaste champ de possibilités dynamiques. L'information en provenance du monde extérieur va permettre de réduire momentanément ces possibilités, ce qui se traduit par la baisse de la dimension fractale de l'EEG. Ensuite le système retourne spontanément à un état d'attente alerte plus chaotique.

Inspiré par les observations de Freeman et les résultats théoriques de Sompolinsky et collaborateurs, un projet commun au CERT (Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse), à l'INSERM, et à PRESCOT (Programme de Recherche en Sciences Cognitives de Toulouse) est entrepris en 1990, dirigé conjointement par B. Doyon et M. Samuelides. Son objectif est de produire une classe de réseaux de neurones formels, à dynamique de base chaotique, capable d'apprendre et de reconnaître des motifs, via une réduction de la dynamique, de manière analogue au paradigme de Skarda et Freeman.

Ma thèse était consacrée à l'étude de la dynamique spontanée du réseau de neurones formels présenté dans la section 2.2.1. Après celle-ci, j'ai généralisé un certain nombre de résultats [Cessac, 1994d, Cessac, 1995] et poursuivi seul l'exploration de liens potentiels avec le modèle de verres de spins proposé par Sherrington-Kirkpatrick [12] (voir les articles 1 et 2 de l'annexe A). Par ailleurs, nous avons, avec mes collègues, étudié par la suite les effets d'une dynamique d'apprentissage Hebbien sur la dynamique des neurones ([Daucé et col., 1998] et Article 3 de l'annexe A). Ce chapitre présente une synthèse de ces travaux en les incluant dans un cadre assez large permettant de voir l'apport de différents domaines tels les systèmes dynamiques, la physique statistique des systèmes désordonnés et la théorie des probabilités. J'ai notamment tenu à inclure des résultats récents de O. Moynot et M. Samuelides [13] dans la section 2.2.10 car ils justifient et clarifient nettement les résultats obtenus par les méthodes non rigoureuses développées dans les sections 2.2.4, 2.2.5, 2.2.8.

2.2 Dynamique spontanée.

2.2.1 Modèle.

Le type de réseau neuromimétiques auquel nous nous sommes intéressés est un système de N entités formelles² ("neurones") ayant un état d'entrée u_i et un état de sortie x_i , $i = 1 \dots N$. La dynamique est donnée par:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = f(u_i(t+1)) \\ u_i(t+1) = \sum_j J_{ij}x_j(t) + \theta_i \end{cases} \quad i = 1..N \quad (2.1)$$

processus hautement *non stationnaire*. On est en effet confronté au problème d'avoir une série temporelle suffisamment longue pour avoir une bonne détermination de la quantité estimée et suffisamment courte pour que l'hypothèse de stationnarité, implicite dans la définition usuelle de ces quantités, soit réalisée avec une bonne approximation. Le point que je souhaite mettre en exergue en citant les travaux de Freeman et ses collaborateurs est la *possibilité* qu'il existe un mécanisme de reconnaissance par réduction dynamique. Cette potentialité ouvre certes des perspectives intéressantes du point de vue biologique et philosophique. En ce qui me concerne je la vois plutôt comme une motivation à produire une classe de réseaux de neurones *formels* ayant ce type de propriété.

2. Pour les relations avec les neurones "réels", je renvoie au chapitre 1 de ma thèse [Cessac, 1994b].

f , la fonction de transfert du neurone, est une fonction sigmoïde³ de pente à l'origine proportionnelle à un paramètre g (par exemple $f(x) = \tanh(gx)$ ou $f(x) = \frac{1+\tanh(gx)}{2}$). Le paramètre g contrôle donc la non-linéarité de f . f prend ses valeurs dans un intervalle $[a, b]$ et la dynamique (2.1) vit dans un compact $\Omega = [a, b]^N$.

Les neurones sont connectés entre eux par des “synapses” J_{ij} (connexion de j vers i). Dans ce modèle, chaque neurone interagit avec tous les autres. Le processus d'apprentissage présenté dans la partie 2.3 correspondra à une modification des synapses sous l'influence du stimulus à apprendre. Dans la présente partie nous considérons un réseau de neurones “vierge” de toute information (*tabula rasa*). Une façon de modéliser cette situation est de considérer les J_{ij} comme étant des variables aléatoires *indépendantes*⁴. On les supposera de plus identiquement distribuées, ce qui revient à considérer des synapses de même type. On se donne la moyenne et la variance des J_{ij} :

$$E[J_{ij}] = \frac{\bar{J}}{N} \quad ; \quad Var[J_{ij}] = \frac{J^2}{N} \quad (2.2)$$

où $E[\]$ est l'espérance. On assure ainsi que le terme $\sum_j J_{ij}x_j(t)$ (“champ neuronal local”) est borné en espérance et en variance quel que soit N . Si les J_{ij} sont des variables aléatoires gaussiennes, cela suffit à assurer l'existence de tous les moments. On ne se restreindra cependant pas à des variables aléatoires gaussiennes. Pour des raisons techniques, liées à l'utilisation, dans ce qui suit, d'un théorème de Girko [14] et d'un théorème de Geman [15], on supposera simplement, sauf spécification contraire, que la loi des J_{ij} a une densité $\rho_{\mathcal{J}}(x)$ et que:

$$\begin{cases} (i) \exists \beta > 1 \text{ t.q. } \int \rho_{\mathcal{J}}^{\beta}(x) dx < \infty \\ (ii) \exists \delta > 0 \text{ t.q. } E \left[|J_{ij}^{2+\delta}| \right] < \infty \\ (iii) \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } E \left[|J_{ij}^n| \right] \leq n^{\alpha}, \forall n \geq 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Notons que les couplages sont (presque sûrement) asymétriques dans ce modèle. On notera $\mathcal{J}$ la matrice des couplages.

Les quantités θ_i , ou “seuils”, ont deux rôles. Dans la version sans apprentissage, ils correspondent à un seuillage sur les réponses des neurones. Dans ce cas, pour rendre compte de la diversité des neurones, nous les avons définis comme des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, gaussiennes, de loi:

$$E[\theta_i] = \bar{\theta}; \quad Var[\theta_i] = \sigma_{\theta}^2. \quad (2.4)$$

Lors de l'apprentissage, ils contiendront de plus le motif à apprendre (voir partie 2.3). On notera Θ le vecteur des seuils. Notons que dans (2.1) les couplages et les seuils n'évoluent pas avec le temps, i.e. sont donnés une fois pour toutes. Il s'agit donc de désordre gelé.

Le système dynamique (2.1) est de la forme (1.1) où $\gamma = (g, \mathcal{J}, \Theta)$, est appelé vecteur des *paramètres microscopiques*. γ a donc $N^2 + N$ composantes aléatoires. A noter que l'équation (2.1) est invariante par la transformation suivante sur les paramètres :

$$g \rightarrow gJ; \quad J_{ij} \rightarrow \frac{J_{ij}}{J}; \quad \theta_i \rightarrow \frac{\theta_i}{J}; \quad (2.5)$$

On note $P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$ la loi conjointe de $\mathcal{J}, \Theta$ pour un système de dimension N et $E_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}[\]$ l'espérance correspondante. Dans le cas où les J_{ij} sont gaussiens, $P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$ est déterminée par les paramètres $\bar{J}, J, \bar{\theta}, \sigma_{\theta}$.

3. A noter que le caractère “neuronal” de (1) n'est pas essentiel. En particulier la plupart des résultats théoriques obtenus ne dépendent pas du choix spécifique d'une fonction sigmoïde.

4. On associe ainsi l'absence d'information préalable à une absence de dépendance statistique entre les synapses. Pour une réalisation donnée des couplages, dans un réseau de taille finie, l'indépendance n'est cependant pas réalisée *stricto sensu*.

On appellera $(g, \bar{J}, J, \bar{\theta}, \sigma_\theta)$ les *paramètres macroscopiques*. A noter que l'on a en fait seulement 4 paramètres indépendants, soient $(g, \bar{J}, \bar{\theta}, \sigma_\theta)$ puisque l'équation (2.1) est invariante par la transformation (2.5) [Daucé et col., 1998].

Dans cette partie, on va s'attacher au comportement "générique" du modèle (2.1), où générique a plusieurs sens comme discuté dans la section 1.1. D'une part, on cherche à caractériser le comportement du système par variations continues des paramètres microscopiques et notamment à étudier les bifurcations se produisant dans ce cas là. Cependant, les paramètres microscopiques $\mathcal{J}, \Theta$ étant aléatoires, l'essentiel de notre approche consistera à étudier la *généricité statistique*. Pour ce faire, on fixe les paramètres macroscopiques $(g, \bar{J}, J, \bar{\theta}, \sigma_\theta)$, ce qui fixe en particulier la loi des J_{ij} et des θ_i , et on s'intéresse à la statistique des comportements exhibés. D'un point de vue numérique notamment cela signifie simuler un grand nombre⁵ de réseaux pour chaque valeur de $(g, \bar{J}, \theta, \sigma_\theta)$ et pour N fixé.

On note par ailleurs que, si l'on n'a aucun problème à définir la moyenne sur le désordre dans un système de taille finie en se référant à $P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$, on ne peut⁶ faire de même pour $N \rightarrow \infty$. Remarquons en particulier, en vertu de (2.2), que la moyenne et la variance de J_{ij} tendent toutes deux vers 0. Comme proposé dans la section 1.1 on se donne alors une probabilité de référence $\mathbf{P}$, telle que, sous $\mathbf{P}$, la loi de $\mathcal{J}, \Theta$ est $P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$ pour un système de taille N . Il est alors équivalent de calculer les moyennes sur le désordre relativement à $P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$ ou à $\mathbf{P}$:

$$\int_{\mathbb{R}^{N^2+N}} g(y) dP_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}(y) = \int_{\Omega} g(\mathbf{Y}(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) \quad (2.6)$$

où $\mathbf{Y} = (\mathcal{J}, \Theta)$. L'élément d'intégration de la seconde égalité ne fait pas intervenir la taille du système (celle-ci est dans la variable $\mathbf{Y}$). Dans la suite de ce chapitre, la terminologie "presque sûrement" signifiera, sauf indication contraire, " $\mathbf{P}$ presque sûrement".

2.2.2 Résultats préliminaires.

On montre les résultats préliminaires suivants. Tout d'abord pour *chaque réalisation* $\mathcal{J}(\omega)$ de $\mathcal{J}$ il existe une valeur de g , $g_{as}(\omega)$, indépendante de Θ ,

$$g_{as}(\omega) = \frac{1}{\|\mathcal{J}(\omega)\|} \quad (2.7)$$

en dessous de laquelle $\mathbf{F}_\gamma$ est une *contraction*. Alors (2.1) est absolument stable i.e. admet un seul point fixe, attirant toutes les trajectoires [Cessac, 1994b, Cessac, 1994c]. En utilisant un théorème de convergence presque sûre dû à Geman [15], on montre que la norme d'opérateur de matrices aléatoires dont les composantes obéissent à la condition (2.3(iii)) converge presque sûrement, à la limite thermodynamique, vers une valeur finie. On en déduit que la variable aléatoire g_{as} converge presque sûrement vers une valeur numérique dépendant des paramètres $\bar{J}, J$. Ce résultat implique essentiellement qu'à bas gain g le réseau est convergent.

Lorsque g augmente, des changements de régimes se produisent, (génériquement) dus à des bifurcations de codimension un. Il est ainsi possible de décrire analytiquement la valeur critique de déstabilisation du point fixe du régime absolument stable, ainsi que le type de bifurcation associé, dans le cas où (2.1) admet la symétrie $\mathbf{F}_\gamma(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_\gamma(-\mathbf{x})$ (cas se produisant par exemple pour des seuils nuls, et pour $f(x) = \tanh(gx)$ [Doyon et col., 1993a]). Dans ce cas là, en effet, $\mathbf{x} = 0$ est toujours

5. On est bien sûr confronté au dilemme entre le nombre d'échantillons permettant d'avoir une statistique raisonnable et le temps de calcul. Typiquement, on a simulé une centaine de réseaux par échantillon, pour N allant de 16 à 512, en doublant N à chaque étape.

6. Dans le cas où les J_{ij} sont gaussiens centrés on peut toutefois écrire le champ local neuronal sous la forme $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N J_{ij} f(x_j)$ et à poser $\text{Var}[J_{ij}] = J^2$. Dans ce cas, on peut sans problème définir la loi limite de $\mathcal{J}$.

point fixe, et il est alors aisé de calculer la valeur du g de déstabilisation⁷, $g_d(\omega)$, et le type de bifurcation, directement déterminés, pour une réalisation donnée, par le spectre de $\mathcal{J}(\omega)$. Le comportement statistique de la densité spectrale de telles matrices aléatoires étant connu à la limite thermodynamique [14], mais aussi à taille finie [16], nous en tirons le comportement statistique de la valeur de déstabilisation ainsi que le type de bifurcation. Ainsi, pour $\bar{J} = 0$, et pourvu que la matrice $\mathcal{J}$ satisfasse les conditions (2.3 (i), (ii)) la première bifurcation se produit pour une valeur $g_d(\omega)$ qui converge presque sûrement vers $\frac{1}{\bar{J}}$. A taille finie, le spectre de la matrice jacobienne admet une sur-densité de valeurs propres réelles [16] conduisant génériquement à des bifurcations fourches⁸ ou “flip”⁹. Lorsque la taille augmente cette sur-densité se résorbe et le point se déstabilise, avec probabilité croissante, par bifurcation de Hopf¹⁰. A taille infinie, une infinité de valeurs propres traversent en même temps la frontière de stabilité. On verra plus bas que cela correspond à une transition brutale point fixe-chaos, le régime chaotique obtenu en dimension infinie étant, en fait, du bruit blanc [Cessac, 1995].

Ces résultats constituent un premier exemple d’approche mixte où l’on combine des critères dynamiques, applicables à toute réalisation du désordre, à des résultats de convergence probabilistes lorsque la taille du système tend vers l’infini. Ces derniers servent alors de repère pour le système de dimension finie¹¹. Ils sont néanmoins extrêmement limités. Par exemple, dans le cas général où il n’y a pas la symétrie impaire, il n’y a plus de point fixe évident. De fait, le point fixe du régime absolument stable est une variable aléatoire et l’on doit connaître sa loi si l’on veut ensuite estimer g_d par un passage à la limite thermodynamique [Cessac, 1994d]. Par ailleurs, au-delà de ce régime *d’autres points fixes*, également aléatoires, peuvent apparaître, génériquement par *bifurcation noeud-col*. Enfin, au-delà de la déstabilisation les techniques usuelles de systèmes dynamiques (réduction sur la variété centrale, forme normale) sont difficiles à mettre en oeuvre. Nous développons dans les sections suivantes une approche statistique qui permet de pousser plus loin les résultats théoriques, et d’avoir *in fine* une assez bonne compréhension du modèle et de sa dynamique.

Auparavant je souhaite présenter quelques résultats numériques essentiels pour la suite. Dans le modèle présenté ici l’exploration numérique fut tout à fait fondamentale. Elle ne se fit cependant pas à “l’aveugle” mais plutôt en étroite “symbiose” avec l’approche théorique. Notre exploration numérique s’est attachée essentiellement à produire des résultats *statistiques* où l’on s’est intéressé aux comportements exhibés lorsque l’on fait varier le paramètre g et les paramètres *macroscopiques* $\bar{J}, \theta, \sigma_\theta$. Évidemment, l’exploration complète de l’espace des paramètres $(g, \bar{J}, \theta, \sigma_\theta)$ est tout simplement impossible numériquement, d’une part à cause de la dimension de cet espace, mais aussi parce que le numérique impose un pas discret sur l’incrémentatation des paramètres et l’on peut clairement “rater” des zones de bifurcations. Les équations de champ moyen (2.33), (2.34), (2.35) de la section 2.2.6 ont bien sûr été absolument essentielles pour nous guider.

Pour l’essentiel les simulations numériques exhibent les phénomènes suivants.

- Tout d’abord, au-delà du régime absolument stable, on observe effectivement des bifurcations noeud-col, dans certaines régions de l’espace des paramètres macroscopiques [Cessac et col., 1994a]. Elles conduisent à l’apparition de points fixes, mais aussi à des disparitions par bifurcation noeud-

7. La matrice jacobienne au point $\mathbf{x} = 0$ est $g\mathcal{J}$. Ces valeurs propres sont donc proportionnelles à celle de la matrice aléatoire $\mathcal{J}$. La probabilité pour que plusieurs valeurs propres traversent en même temps la frontière de stabilité, si l’on excepte le cas de deux valeurs propres complexes conjuguées, est nulle à taille finie. On a donc, avec probabilité 1, une bifurcation de codimension un.

8. Apparition de 2 points fixes stables symétriques par déstabilisation du point fixe.

9. Apparition d’un cycle limite stable, de période 2, par déstabilisation du point fixe.

10. Apparition d’un cycle limite stable (dont l’amplitude et la période dépendent du paramètre) par déstabilisation du point fixe.

11. Dans le cas où F_γ est impaire on trouve par exemple numériquement [Cessac, 1994b] que la variance empirique de g_d décroît comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Cela permet d’avoir une estimation du g de déstabilisation pour une taille donnée.

col inverse.

- A l’instar du cas où F_γ est impaire, on observe la déstabilisation de points fixes. La probabilité que celle-ci se produise par bifurcation de Hopf croît avec la taille.
- Après la première bifurcation de Hopf, on observe une transition vers le chaos via une route par quasi-périodicité à la “Ruelle-Takens” [17], même si notre système est à temps discret. Le cycle limite généré par la première bifurcation de Hopf se déstabilise à son tour par une seconde bifurcation de Hopf donnant naissance à un tore $\mathcal{T}^2$ densément rempli par les trajectoires. Se produit ensuite un accrochage de fréquences sur le tore, donnant enfin lieu au chaos¹². A noter que la dimension fractale de l’attracteur étrange croît très vite lorsque le paramètre de contrôle g continue de varier [Cessac, 1994b]. Lorsque la taille augmente, la séquence de bifurcations est de plus en plus rapide, conduisant à la conjecture qu’une transition brutale point fixe-chaos se produit à la limite thermodynamique. La valeur critique moyenne converge vers la valeur prédite par les équations de champ moyen (2.33), (2.34), (2.35) de la section 2.2.6. Cette variété de régimes dynamiques, observés seulement à taille finie, est le point le plus important pour la suite, lors de la phase d’apprentissage. C’est également elle qui fait la richesse du modèle.

2.2.3 Équations dynamiques de champ moyen.

Les sections restantes de cette partie sont consacrées aux équations de champ moyen dynamiques qui s’avèrent être un outil fondamental pour avoir une vue synthétique des observations numériques que l’on vient de présenter. Elles mettent par ailleurs en évidence des phénomènes inattendus.

L’approche que nous présentons maintenant est directement inspirée d’une part des travaux de Sompolinsky et des méthodes de champ moyen dynamiques utilisées par les physiciens des verres de spins, et d’autre part par les travaux de mathématiciens tels Amari [18, 19, 20] et Geman [21]. Dans cette approche on traite (2.1) comme un processus *aléatoire* généré par le désordre gelé. Clairement, pour chaque réalisation de $\mathcal{J}, \Theta$, l’évolution (2.1) est déterministe. Cependant, *a contrario*, la condition initiale $\mathbf{x}(0)$ étant fixée, les trajectoires $\{\mathbf{x}(t, \omega)\}_{t=1}^\infty = \{\mathbf{F}_{g, \mathcal{J}(\omega), \Theta(\omega)}^t(\mathbf{x}(0))\}_{t=1}^\infty$ sont différentes pour des réalisations différentes $\mathcal{J}(\omega), \Theta(\omega)$ des couplages et des seuils. On s’intéresse alors au processus $\tilde{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^\infty$, où l’évolution de $\mathbf{x}(t)$ est donnée par (2.1), et où l’on supposera que le vecteur des conditions initiales $\mathbf{x}(0)$ est aléatoirement distribué selon une loi $\mu_0^{(N)}$, indépendante de la loi conjointe de $\mathcal{J}, \Theta$. On supposera de plus que les conditions initiales sont indépendantes, et identiquement distribuées, donc que $\mu_0^{(N)} = (\mu_0)^N$ où μ_0 est la loi marginale.

On adopte donc un point de vue différent de la section précédente. On ne cherche plus à obtenir des informations sur le système dynamique (2.1) pour chaque ω , on cherche plutôt à extraire la loi de probabilité $P_{\tilde{\mathbf{x}}}^{(N)}$ du processus $\tilde{\mathbf{x}}$, puis à caractériser sa dépendance dans les paramètres macroscopiques $(g, \bar{\mathcal{J}}, \theta, \sigma_\theta)$. $P_{\tilde{\mathbf{x}}}^{(N)}$ est obtenu à partir de la loi conjointe de $\mathcal{J}, \theta$, $P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$, et de $\mu_0^{(N)}$. En effet, à temps discret, la loi de $\mathbf{x}$ à l’instant 1 est la loi image de $\mu_0^N \times P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$ par $\mathbf{F}_\gamma$, puis la loi de $(\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2))$ se déduit de l’étape précédente. La loi conjointe de $(\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(t))$ se construit donc pas à pas. Il existe différentes façons d’accéder à $P_{\tilde{\mathbf{x}}}^{(N)}$.

2.2.4 Fonctionnelle génératrice.

Cette méthode issue en droite ligne de l’intégrale de Feynman et de l’approche de Martin-Siggia-Rose [22], a été développée pour les verres de spins dans les années 80 notamment par De Dominicis

12. Implicitement, la description que nous faisons ici correspond à une augmentation continue du paramètre g . Ce scénario peut-être également obtenu en faisant varier continûment les couplages ou les seuils.

[23] puis Sompolinsky et Zippelius [24]. Nous allons présenter quelques étapes¹³ de l'historique de cette méthode car elles prendront leur importance dans la section 2.2.8.

Le premier travail que nous voulons citer est celui de Sompolinsky et Zippelius en 1982 [24]. Suivant une idée proposée par De Dominicis [23], ces auteurs étudient une approche dynamique des verres de spins¹⁴ comme alternative possible à la méthode des répliques. Dans le modèle proposé, la dynamique est décrite par un processus aléatoire où deux formes d'aléas sont présentes: le bruit thermique et le désordre gelé. La dynamique thermique est décrite par une dynamique de Langevin sur des spins continus :

$$\frac{d\sigma_i(t)}{dt} = -V'(\sigma_i(t)) + \sum_{j=1}^N J_{ij}\sigma_j(t) + h_i(t) + \xi_i(t) \quad (2.8)$$

où $\sigma_i(t)$ est l'état du spin i à l'instant t , V un potentiel¹⁵ contrôlant les fluctuations des spins. V' est la dérivée de V . $h_i(t)$ est un champ local extérieur et $\xi_i(t)$ un bruit blanc dont la variance est égale à T qui joue le rôle d'une température. Les interactions J_{ij} sont symétriques ($J_{ij} = J_{ji}$), gaussiennes, centrées, de variance $\frac{J^2}{N}$. Les $\frac{N(N-1)}{2}$ couplages J_{ij} , $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq i$, sont indépendants.

La stratégie consiste alors à construire une fonctionnelle génératrice¹⁶ prenant en compte la moyenne sur le bruit thermique et sur le désordre, et permettant de calculer les fonctions de corrélations à n points du processus à taille finie. Pour le modèle complètement interconnecté de Sherrington-Kirkpatrick, Sompolinsky et Zippelius montrent que cette fonctionnelle se découple, à la limite thermodynamique, en un produit infini de fonctionnelles chacune d'elles associée à un processus monodimensionnel S_i , non Markovien, donné par l'équation :

$$\frac{dS_i}{dt}(t) = -V'(S_i(t)) + J^2 \int_{-\infty}^t G_i(t-t')S_i(t')dt' + h_i(t) + \eta_i(t) \quad (2.9)$$

où G_i s'interprète comme une susceptibilité moyenne.

$$G_i(t) = \frac{\delta [\langle S_i(t+t') \rangle]}{\delta h_i(t)} \quad (2.10)$$

Dans les notations des auteurs $\langle \rangle$ est la moyenne sur le bruit thermique et $[\]$ la moyenne sur le désordre gelé. Le champ η_i est un processus *gaussien*, centré, de covariance:

$$Cov(\eta_i(t), \eta_i(t')) = T\delta(t-t') + J^2 C_i(t-t') \quad (2.11)$$

où :

$$C_i(t-t') = [\langle S_i(t)S_i(t') \rangle] \quad (2.12)$$

On obtient donc un ensemble d'équations auto-consistantes puisque la détermination de la loi de S_i nécessite la connaissance de η_i et de G_i , et la covariance de η_i est déterminée par la loi de S_i . Le propos n'est bien sûr pas de développer ici la résolution de ces équations. Le seul point que nous souhaitons souligner est que la méthode de la fonctionnelle génératrice permet de remplacer, à la limite thermodynamique, le terme d'interaction $\sum_{j=1}^N J_{ij}\sigma_j(t)$, d'une part par un champ local *gaussien*, dont la loi est déterminée de façon auto consistante, mais également par un terme

13. Une description plus détaillée se trouve au chapitre 6 de ma thèse [Cessac, 1994b]

14. Un court résumé des propriétés du modèle de verres de spins de Sherrington et Kirkpatrick [12] est présenté dans la section 2.2.8.

15. Dans l'article [24] le potentiel est quartique. Pour assurer que les valeurs de spins restent sur un intervalle borné $[-A, A]$ il faut imposer des conditions plus restrictives sur V [25].

16. Nous donnons plus bas la forme explicite de cette fonctionnelle pour le modèle (2.1).

de réponse linéaire $\int_{-\infty}^t G_i(t-t')S_i(t')dt'$ qui *contient toute l'histoire du spin*. L'évolution est *non markovienne* et dépendante des conditions initiales. A noter que C et G sont liées par le théorème de fluctuation-dissipation. Sompolinsky et Zippelius donnent par ailleurs une interprétation dynamique de la condition de De Almeida-Thouless [26]. Rappelons (voir [27] et section 2.2.8) que cette condition caractérise la stabilité des solutions de Sherrington-Kirkpatrick, et définit, dans l'espace champ local-température, la ligne de De Almeida-Thouless en dessous de laquelle la symétrie des répliques doit être brisée (voir section 2.2.8). D'un point de vue dynamique, Sompolinsky et Zippelius montrent que la fonction de corrélation (2.11) décroît exponentiellement au-dessus de la ligne AT (haute température), et algébriquement ($C(t) \sim t^{-\nu}$) en dessous.

L'analyse de Sompolinsky et Zippelius semblait rendre correctement compte de la phénoménologie avec toutefois quelques bémols, notamment un hiatus sur la valeur du paramètre d'ordre q (le calcul par la méthode dynamique et le calcul par la méthode des répliques donnent des résultats différents, voir [27] chapitre 6). Malheureusement, il a ensuite été montré par Houghton et ses collaborateurs [28] que la solution de Sompolinsky et Zippelius n'était pas correcte à basse température. Le calcul de la fonctionnelle génératrice fait en effet implicitement intervenir la distribution de probabilité des conditions initiales. La distribution choisie par Sompolinsky et Zippelius est la distribution uniforme sur l'espace de phase et l'on obtient donc un résultat correspondant à une moyenne sur toutes les phases pures. Au contraire, Houghton et ses collaborateurs montrent que la distribution initiale doit charger une seule phase pure, ce qui oblige à réintroduire le schéma de brisure de symétrie des répliques dans la distribution des conditions initiales.

En 1987, Crisanti et Sompolinsky [29] s'intéressent à un modèle de spins, avec une dynamique de Langevin identique à (2.8), mais où les interactions J_{ij} sont asymétriques. Plus précisément elles ont la forme:

$$J_{ij} = J_{ij}^s + kJ_{ij}^{as} \quad (2.13)$$

où le paramètre $k \geq 0$, contrôle le degré d'asymétrie. Les variables aléatoires J_{ij}^s (resp. J_{ij}^{as}) sont symétriques $J_{ij}^s = J_{ji}^s$ (resp. asymétriques $J_{ij}^{as} = -J_{ji}^{as}$) et gaussiennes, centrées, de variance:

$$E \left[\left(J_{ij}^s \right)^2 \right] = E \left[\left(J_{ij}^{as} \right)^2 \right] = \frac{J^2}{N} \frac{1}{1+k^2} \quad (2.14)$$

donc les J_{ij} sont gaussiennes, centrées, et:

$$Var(J_{ij}) = \frac{J^2}{N} ; Cov(J_{ij}, J_{ji}) = \frac{J^2}{N} \frac{1-k^2}{1+k^2} \quad (2.15)$$

Les $\frac{N(N-1)}{2}$ couplages $J_{ij}, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq i$, sont indépendants. Pour $k = 1$, ils sont donc tous indépendants.

La méthode de champ moyen dynamique donne un résultat extrêmement intéressant. Comme pour le modèle à interactions symétriques, la fonctionnelle génératrice se découple en un produit infini de fonctionnelles génératrice de processus monodimensionnels, dont l'équation d'évolution est donnée par:

$$\frac{dS_i}{dt}(t) = -\nabla V(S_i(t)) + J^2 \frac{1-k^2}{1+k^2} \int_{-\infty}^t G_i(t-t')S_i(t')dt' + h_i(t) + \eta_i(t) \quad (2.16)$$

où la covariance de η_i et de G_i est donnée par (2.10), (2.12). Cette équation généralise (2.9). On voit donc que le terme de mémoire et de réponse linéaire *disparaît* lorsque $k = 1$ c'est-à-dire lorsque J_{ij} et J_{ji} sont non corrélées. L'évolution est alors complètement régie par un processus gaussien dont la

fonction de corrélation est aisément calculable. On reviendra sur ce résultat dans la section 2.2.9.

Par la suite, Sompolinsky, Crisanti et Sommers ont appliqué la méthode dynamique de champ moyen à une version continue du modèle (2.1) où les interactions J_{ij} sont gaussiennes et indépendantes et sans seuil. Dans une lettre à Physical Review Letters [4] ils concluent que le processus monodimensionnel asymptotique obtenu par la méthode de champ moyen dynamique est gaussien. L'analyse de ce processus montre l'existence de plusieurs régimes dynamiques : point fixe, régime périodique, quasi-périodique, et chaos. On trouve les détails du calcul dans un preprint à ma connaissance jamais publié [30]. Dans l'approche de ces auteurs, le chaos correspond à la convergence vers zéro de la fonction de corrélation du processus gaussien lorsque $t \rightarrow \infty$. Ensuite, dans une courte lettre peu explicite, Molgedey et collaborateurs [31] étudient par cette méthode une version bruitée de (2.1), sans seuil, où les J_{ij} sont gaussiens. Ils concluent eux aussi à l'existence d'un régime chaotique. La méthode de champ moyen dynamique a enfin été appliquée à des réseaux dilués par Kree et Zippelius [32], et Tirozzi et Tsodyks [33] dans un modèle analogue à celui de Sompolinsky avec des couplages de type Hebb-Hopfield.

On donne maintenant les grandes lignes de la méthode de champ moyen dynamique appliquée à (2.1). On supposera ici que *les couplages J_{ij} sont gaussiens*. Cette hypothèse paraît essentielle pour mener le calcul à terme. Pour les besoins du calcul, il est plus aisé d'écrire la dynamique des champs neuronaux locaux $u_i(t) = \sum_j J_{ij} x_j(t)$ que la dynamique sur les outputs $x_i(t) = f(u_i(t))$. Le système dynamique (2.1) peut s'écrire :

$$u_i(t+1) = \sum_j J_{ij} f(u_j(t)) + \theta_i \quad i = 1..N \quad (2.17)$$

(Respectivement, pour chaque réalisation du désordre $u_i(t+1, \omega) = \sum_j J_{ij}(\omega) f(u_j(t, \omega)) + \theta_i(\omega)$).

On notera $\tilde{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ (resp. $\tilde{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^{\infty}$) le processus (2.17), (resp. (2.1)) et $\tilde{\mathbf{u}}(\omega)$ (resp. $\tilde{\mathbf{x}}(\omega)$) une trajectoire. $\tilde{\mathbf{u}}_T \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u}(t)\}_{t=1}^T$ correspondra au processus tronqué à temps borné T . La loi de $\tilde{\mathbf{u}}_T$, $P_{\tilde{\mathbf{u}}_T}^{(N)}$ est la loi image de $\mu_0^{(N)} \times P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$ par (2.17) pour $t \leq T$. En conséquence la moyenne de toute fonction de $\tilde{\mathbf{u}}$ est donnée par intégration sur la mesure $\mu_0^{(N)} \times P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$. Pour ne pas alourdir les notations on notera $E^{(N)}$ l'espérance relative à $\mu_0^{(N)} \times P_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)}$. Connaissant $P_{\tilde{\mathbf{u}}_T}^{(N)}, \forall T$ on a construit la loi $P_{\tilde{\mathbf{u}}}^{(N)}$ du processus complet par la construction de Kolmogorov [34]. La loi de $\tilde{\mathbf{x}}$ est obtenue par la relation $x_k = f(u_k)$.

La méthode de champ moyen dynamique consiste à introduire la fonction génératrice :

$$Z_T^{(N)}(\mathbf{l}) = \int d\mu_0^{(N)} dP_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)} \exp\left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T l_{i,t} u_i(t)\right) \quad (2.18)$$

où $\mathbf{l} = (l_{i,t})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T}$, et où $u_i(t)$ est la i -ème composante du t -ième itéré de (2.17) et *correspond donc à une trajectoire admissible*. On intègre donc sur la condition initiale $\mathbf{u}(0)$, le désordre, et les trajectoires admissibles $\{\mathbf{u}(t)\}_{t=1}^T$. On note par ailleurs que $Z_T^{(N)}$ se rapporte au processus à temps borné T . Dans les articles [24, 28, 29, 4, 30, 31] on intègre sur les trajectoires complètes ($T \rightarrow \infty$) ce qui n'est pas sans poser ensuite de délicats problèmes de commutation de limite. J'ai préféré introduire la fonction génératrice à temps borné, ce qui laisse la liberté de prendre les limites dans l'ordre que l'on veut.

$Z_T^{(N)}(\mathbf{l})$ a les propriétés suivantes :

$$(i) \quad Z_T^{(N)}(0) = 1 \quad (\text{Normalisation.}) \quad (2.19)$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial^n \log(Z_T^{(N)}(1))}{\partial l_{i_1, t_1} \dots \partial l_{i_n, t_n}} \right|_{\mathbf{l}=0} = C^{(N)}[(i_1, t_1) \dots (i_n, t_n)] ; \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T \quad (2.20)$$

où $C^{(N)}[(i_1, t_1)] = E^{(N)}[u_{i_1}(t_1)]$, $C^{(N)}[(i_1, t_1), (i_2, t_2)] = E^{(N)}[u_{i_1}(t_1)u_{i_2}(t_2)] - E^{(N)}[u_{i_1}(t_1)]E^{(N)}[u_{i_2}(t_2)]$, et où plus généralement $C_T^{(N)}[(i_1, t_1) \dots (i_n, t_n)]$ est le cumulants à n points.

Après des calculs techniques utilisant l'expression de la distribution de Dirac dans l'espace de Fourier et le caractère gaussien des connexions, il vient¹⁷:

$$Z_T^{(N)}(1) = \int D\mathbf{q} D\bar{\mathbf{q}} \exp[-N\Phi(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, 1)] \quad (2.21)$$

où $\mathbf{q} = \{q_{t,t'}\}_{1 \leq t \leq T, 1 \leq t' \leq T}$, $\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{q}_{t,t'}\}_{1 \leq t \leq T, 1 \leq t' \leq T}$,

$$D\mathbf{q} D\bar{\mathbf{q}} = \prod_{t=1}^T \prod_{t'=1}^T dq_{t,t'} d\bar{q}_{t,t'} \quad (2.22)$$

$$\Phi(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, 1) = \frac{1}{2J^2} \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T q_{t,t'} \bar{q}_{t,t'} - \frac{1}{N} \log \int D\tilde{\mathbf{u}} D\tilde{\mathbf{v}} \exp[L_T^{(N)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, 1)] \quad (2.23)$$

avec $\tilde{\mathbf{u}} = \{u_{i,t}\}_{1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \{v_{i,t}\}_{1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T}$, $D\tilde{\mathbf{u}} = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T du_{i,t}$, $D\tilde{\mathbf{v}} = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T dv_{i,t}$, et enfin:

$$\begin{aligned} L_T^{(N)}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, 1) = & \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \left[\iota v_{j,t} \left(-u_{j,t} + l_{j,t} u_{j,t} + \frac{\bar{J}}{N} \sum_{j=1}^N f(u_{j,t-1}) \right) + l_{i,t} u_{i,t} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T (q_{t,t'} \iota v_{i,t} \iota v_{i,t'} + \bar{q}_{t,t'} f(u_{i,t}) f(v_{i,t'})) \end{aligned} \quad (2.24)$$

où ι est le nombre imaginaire $\iota^2 = -1$.

On applique alors la méthode du col pour $N \rightarrow \infty$. On obtient:

$$\frac{1}{N} \log(Z_{N,T}(1)) \sim -\Phi(\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, 1) \quad (2.25)$$

où $(\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*)$ est un point où $\Phi(\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, 1)$ est minimum¹⁸. La normalisation de $Z_{N,T}(1)$ conduit à annuler $\bar{\mathbf{q}}^*$. La méthode du col nous donne finalement que $Z_T^{(N)}$ se factorise asymptotiquement en un produit infini de fonctionnelles génératrices identiques¹⁹. $Z_T(1)$ est donnée par :

$$Z_T(1) = \int \exp - \iota(\tilde{u}_T, \tilde{v}_T) \exp(\iota(\tilde{v}_T, \tilde{\mu}_T)) \exp((\iota \tilde{v}_T, \Delta, \iota \tilde{v}_T) \prod_{t=1}^T du_t dv_t) \quad (2.26)$$

17. Pour simplifier on considérera le cas sans seuil.

18. On écrit en fait la condition d'extremum $\frac{\partial \Phi(\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, 1)}{\partial q_{t,t'}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}}^*, 1)}{\partial \bar{q}_{t,t'}} = 0$, qui nous donne le ensemble d'équations (2.27, 2.28). Il faudrait ensuite vérifier la condition de minimum. Notons également qu'il peut y avoir plusieurs solutions (voir section 2.2.4.)

19. Ici intervient l'hypothèse que la mesure sur les conditions initiales $\mu_0^{(N)}$ se factorise en un produit μ_0^N de distributions monodimensionnelles identiques.

où $\tilde{u}_T = \{u_t\}_{t=1}^T$, $\tilde{v}_T = \{v_t\}_{t=1}^T$, $\tilde{\mu}_T = \{\mu(t)\}_{t=1}^T$. $(\tilde{u}_T, \tilde{v}_T) = \sum_{t=1}^T u_t v_t$ représente le produit scalaire des vecteurs $\tilde{u}_T, \tilde{v}_T$. Δ est une matrice $T \times T$ de composantes $\Delta(t, t')$ donnée par (2.28). $(\tilde{v}_T, \Delta, \tilde{v}_T)$ est la forme quadratique $\sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T v_t \Delta(t, t') v_{t'}$. On voit alors que $Z_T(1)$ est la fonction génératrice des cumulants pour $t \leq T$, d'un processus *gaussien* $\eta(t)$ de moyenne²⁰ $\mu(t)$ et de matrice de covariance $\Delta(t, t')$. Par ailleurs, $\mu(t)$ et $\Delta(t, t')$ sont obtenues de façon *auto consistante*. En effet, les équations d'extremum pour Φ nous donnent:

$$\begin{aligned}\mu(t) &\stackrel{\text{def}}{=} E[\eta(t)] = \bar{J}m(t-1) + \bar{\theta} \\ m(t) &\stackrel{\text{def}}{=} E[f(\eta(t))]\end{aligned}\tag{2.27}$$

et :

$$\begin{aligned}\Delta(t, t') &= J^2 C(t-1, t'-1) \\ C(t, t') &\stackrel{\text{def}}{=} E[f(\eta(t))f(\eta(t'))]\end{aligned}\tag{2.28}$$

où l'espérance est prise sur le désordre à la limite thermodynamique (donc relativement à $\mathbf{P}$). Le résultat obtenu est donc que, pour des temps bornés, le processus $\tilde{u}_T$ converge *faiblement* (convergence de fonction génératrice) vers un processus qui est le produit infini de processus monodimensionnels $\eta(t)$ de moyenne (2.27), de covariance (2.28). Puisque Z_T caractérise le comportement, “moyennée sur le désordre” de (2.1), on conclut qu'asymptotiquement le champ neuronal local $u_i(t)$ est gaussien. On interprétera ce résultat dynamiquement dans la section 2.2.6.

Cette méthode puissante a néanmoins quelques inconvénients. D'abord sa lourdeur. D'autre part, les calculs peuvent être menés jusqu'au bout seulement si les couplages sont gaussiens. Enfin le détail des calculs fait apparaître quelques “difficultés” telles l'annulation a posteriori de termes sans justification vraiment convaincante.

2.2.5 Hypothèse de Chaos local.

Nous présentons maintenant une autre façon d'arriver au résultat, plus directe car conséquence immédiate d'une unique conjecture qui, si elle est sujette à caution, a permis d'anticiper de nombreuses propriétés. Notons qu'historiquement la méthode que nous présentons maintenant est *antérieure* aux travaux des physiciens des verres de spins. Elle a en effet été proposée en 1971 par Amari [18]. Elle consiste à introduire une hypothèse de chaos local, (où “chaos” fait ici référence au chaos moléculaire de Boltzmann [35]). Pour fixer les idées, appliquée à (2.1), l'hypothèse de chaos local consiste à supposer qu'asymptotiquement, les $u_i(t)$ sont *indépendants entre eux, indépendants des J_{ij} , et des θ_i* . Exposée ainsi cette hypothèse paraît incohérente, puisque qu'elle revient à dire qu'une variable aléatoire, fonction d'autres variables aléatoires est indépendante de celles-ci!! Elle conduit néanmoins à des résultats identiques à ceux obtenus par la méthode de champ moyen dynamique, mais généralisables de manière immédiate à des couplages non gaussiens, où les équations de champ moyen font intervenir tous les paramètres macroscopiques. Ces résultats ont été justifiés d'abord numériquement [Cessac et col., 1994a], puis heuristiquement [Cessac, 1995], et plus récemment prouvés rigoureusement [13]. Dans [18] Amari applique l'hypothèse de chaos local à un réseau de neurones additif similaire à (2.1), mais à temps continu, pour des couplages aléatoires dont la variance est proportionnelle à $\frac{1}{N^2}$. Par la suite Geman [21] est parvenu à démontrer les résultats conjecturés par Amari sous l'hypothèse de chaos local. Néanmoins le comportement asymptotique du système de Amari est pauvre, puisqu'il n'a que des points fixes, à cause de la normalisation en $\frac{1}{N^2}$ de la variance des poids, qui conduit essentiellement à annuler le champ neuronal local à la limite thermodynamique.

²⁰ Par souci de cohérence avec les articles 1 et 2 de l'annexe A on a gardé la notation $\mu(t)$ pour la moyenne du processus η à l'instant t .

Geman et Hwang [36] essaieront ensuite de donner un cadre rigoureux, une formulation “raisonnable” de cette hypothèse et une preuve pour des couplages de variance proportionnelle en $\frac{1}{N}$ mais sans réel succès. Pour un modèle linéaire ils montrent néanmoins la convergence faible d’un ensemble fini de m champs locaux vers le produit de m processus monodimensionnels, *indépendants, gaussiens, et identiquement distribués*, $\forall m$.

Il est à noter que l’hypothèse de Amari est fortement contestée par Crisanti, Sompolinsky et Sommers, dans [30]. Dans cet article, les auteurs opposent la méthode dynamique de champ moyen et l’hypothèse de Amari, en donnant des arguments pour lesquels celle-ci ne saurait être vérifiée, le coeur de l’argumentation reposant sur une analogie formelle avec le modèle de Sherrington-Kirkpatrick. Nous y reviendrons dans la section 2.2.8. C’est en partie cet argumentaire, ainsi que mes discussions avec un certain nombre de physiciens qui a motivé le travail fait dans [Cessac, 1995]. Je montre maintenant, que contrairement à ce qu’affirment ces auteurs, les deux méthodes conduisent à la même conclusion.

L’application de l’hypothèse de Amari conduit en premier lieu au résultat que la dynamique (2.1) est décrite, lorsque $N \rightarrow \infty$, par un produit de processus monodimensionnels indépendants, identiquement distribués. Cela n’est pas sans rappeler la propriété du factorisation de la fonctionnelle génératrice discutée ci-dessus. Par ailleurs, l’application du théorème central limite, indique que lorsque $N \rightarrow \infty$ le champ $u_i(t+1) = \sum_j J_{ij}x_j(t) + \theta_i$ converge faiblement vers un processus gaussien $\eta(t+1)$, identique pour tous les i . η étant gaussien il est complètement caractérisé par sa moyenne $\mu(t) = E[\eta(t)]$, variance²¹ $v(t) = Var(\eta(t))$ et matrice de covariance $\Delta(t, t')$. On obtient alors les équations suivantes [Cessac, 1995]:

$$\mu(t+1) = \bar{J}m(t) + \bar{\theta} \quad (2.29)$$

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[f(\eta(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(h\sqrt{v(t)} + \mu(t)) dh$$

$$v(t+1) = J^2 q(t) + \sigma_\theta \quad (2.30)$$

$$q(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[f^2(\eta(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f^2(h\sqrt{v(t)} + \mu(t)) dh$$

et la covariance $\Delta(t, t')$ obéit à:

$$\begin{aligned} \Delta(t+1, t'+1) &= J^2 C(t, t') + \sigma_\theta^2 \\ C(t, t') &\stackrel{\text{def}}{=} E[f(\eta(t))f(\eta(t'))] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{h'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f\left(\frac{\sqrt{v(t)v(t') - \Delta^2(t, t')}}{\sqrt{v(t')}}h + \frac{\Delta(t, t')}{\sqrt{v(t')}}h' + \mu(t)\right) f\left(h'\sqrt{v(t')} + \mu(t')\right) dh dh' \end{aligned} \quad (2.31)$$

On remarque bien sûr que pour $t = t'$ l’équation de $\Delta(t, t)$ est l’équation (2.30) de la variance $v(t)$. On peut réécrire l’équation de $\Delta(t, t')$ sous la forme:

$$\Delta(t+1, t'+1) = H_{g, \bar{J}, J, \bar{\theta}, \sigma_\theta} [\Delta(t, t')] \quad (2.32)$$

où H est définie seulement si $\Delta^2(t, t') \leq v(t)v(t')$. Ces équations sont bien évidemment la généralisation de (2.27), (2.28). On n’a en particulier pas utilisé le caractère gaussien des J_{ij} . En effet, on a simplement appliqué le théorème central limite qui nécessite que les J_{ik} satisfasse aux conditions de Lindenber

21. La variance $v(t)$ est bien sur la partie diagonale de la matrice $\Delta(t, t')$. Nous l’écrivons explicitement ici essentiellement pour mettre en évidence l’analogie des équations (2.33) avec les équations de Sherrington-Kirkpatrick (voir section 2.2.8).

[37]. Ainsi, l'hypothèse de chaos local permet d'obtenir directement les équations de Sompolsky et collaborateurs dans un cadre plus général que celui considéré par ces auteurs [Cessac, 1995]. On remarque que le caractère gaussien du processus asymptotique nous a permis de fermer au second ordre les équations donnant les moments de η .

Nous exposons dans la section 2.2.9 des arguments justifiant les équations de champ moyen d'abord de façon heuristique, puis nous citons des travaux récents donnant la preuve de leur validité tout en clarifiant leur sens dans la section 2.2.10. Nous discutons d'abord de leur utilisation pour l'étude du système dynamique (2.1).

2.2.6 Régime stationnaire des équations de champ moyen.

On s'intéresse maintenant au régime stationnaire de (2.29), (2.30), (2.31). En régime stationnaire ces équations s'écrivent:

$$\mu = \bar{J}m + \bar{\theta} \quad (2.33)$$

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(h\sqrt{J^2q + \sigma_\theta^2} + \bar{J}m + \bar{\theta}) dh$$

$$v = J^2q + \sigma_\theta^2 \quad (2.34)$$

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f^2(h\sqrt{J^2q + \sigma_\theta^2} + \bar{J}m + \bar{\theta}) dh$$

pour la moyenne et la variance de η , et

$$\Delta(t - t') = J^2C(t - t') + \sigma_\theta^2 = H_{g, \bar{J}, \bar{\theta}, \sigma_\theta} [\Delta(t - t')] \quad (2.35)$$

$$C(t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{h'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f\left(\frac{\sqrt{v^2 - \Delta(t - t')}}{\sqrt{v}}h + \frac{\Delta(t - t')}{\sqrt{v}}h' + \mu\right) f(h'\sqrt{v} + \mu) dh dh'$$

pour la covariance.

L'équation de la covariance en régime stationnaire est un point fixe de (2.35). Elle a toujours la solution $\Delta = v$. En terme de la récurrence (2.32) cette solution est stable si $\frac{dH}{d\Delta} < 1$. Elle devient donc instable si [Cessac, 1995]:

$$\frac{dH}{d\Delta}(\Delta = v) = J^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f'^2(h\sqrt{J^2q + \sigma_\theta^2} + \bar{J}m + \bar{\theta}) dh = 1 \quad (2.36)$$

Cette équation est fondamentale comme on va le voir maintenant. Elle définit dans l'espace des paramètres macroscopiques $(g, \bar{J}, \bar{\theta}, \sigma_\theta)$ une variété de codimension 1 qui sépare cet espace en deux régions. Dans la région correspondant à $\frac{dH}{d\Delta} < 1$ la solution $\Delta = v$ est stable. Dans la région $\frac{dH}{d\Delta} \geq 1$ elle devient instable. On a alors une autre solution stable $\Delta^* < v$ [Cessac, 1995].

Interprétons maintenant ces solutions en terme de processus. Dans le premier cas la matrice de covariance a toutes ses composantes égales à v . Le processus gaussien η est alors stochastiquement équivalent au processus Y dont l'évolution est donnée par:

$$\begin{cases} Y(0) &= X \\ Y(t+1) &= Y(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

où X est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(\mu, v)$. Y est alors *un processus à trajectoire presque sûrement constante*, où la condition initiale X est aléatoire.

Dans le second cas, la composante t, t' de la matrice de covariance s'écrit $v\delta(t, t') + \Delta^*(1 - \delta(t, t')) = (v - \Delta^*)\delta(t, t') + \Delta^*$. On a donc la somme d'une matrice diagonale $(v - \Delta^*)\mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est la matrice identité et d'une matrice constante. Le processus gaussien η est alors stochastiquement équivalent au processus Z dont l'évolution est donnée par:

$$\begin{cases} Z(0) &= X \\ Z(t+1) &= Z(t) + B(t) \end{cases} \quad (2.38)$$

où X est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \Delta^*)$ et $B(t)$ un *bruit blanc* centré de variance $(v - \Delta^*)$. $Z(t)$ est alors *la superposition d'un processus à trajectoire presque sûrement constantes*, où la condition initiale X est aléatoire, et d'un processus brownien.

2.2.7 Relations avec le système de dimension finie.

Comment interpréter ces résultats par rapport au système dynamique de dimension finie? On aimerait bien sûr pouvoir dire que cet ensemble d'équations caractérise le comportement "typique" du système dynamique (2.1) à la limite thermodynamique. Malheureusement, on est confronté à deux problèmes techniques qui ne sont cependant pas anecdotiques.

Tout d'abord les deux méthodes donnent un résultat de convergence faible, c'est-à-dire que les cumulants de $\tilde{\mathbf{u}}_T$ (resp. $\tilde{\mathbf{x}}_T$), où la moyenne est prise sur le désordre et les conditions initiales, convergent, lorsque $N \rightarrow \infty$ vers les cumulants du processus $\eta^{\otimes \mathbb{N}}$. En particulier ce résultat ne dit rien sur la convergence de moyennes sur les neurones d'un réseau donné dont on ferait croître la taille en ajoutant des connexions. Plus précisément, il est naturel de calculer des quantités du type:

$$m_g^{(N)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(x_k(t)) \quad (2.39)$$

qui est la moyenne empirique sur le réseau d'une fonction g au temps t ;

$$C_{g_1, g_2}^{(N)}(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_1(x_k(t_1)) g_2(x_k(t_2)) \quad (2.40)$$

qui permet de calculer la covariance empirique de deux fonctions g_1, g_2 aux temps t_1, t_2 , etc ... Plus généralement on peut s'intéresser à des moyennes du type

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(x_k(1) \dots x_k(T)) \quad (2.41)$$

correspondant à la moyenne empirique d'une fonction h dépendant de la trajectoire d'un neurone. Ces quantités sont des fonctions aléatoires, puisqu'elles varient d'une réalisation du désordre à l'autre. Les résultats de convergence faible que l'on vient d'obtenir correspondent à une moyenne sur une *infinité de réseau* et n'assurent en particulier pas que *la limite $N \rightarrow \infty$ de ces grandeurs existe*.

On aimerait donc plutôt des résultats de convergence presque sûre, qui correspondraient à la propriété que les physiciens des systèmes désordonnés appellent *auto-moyennisation* (*self-averaging*): la moyenne sur les neurones d'un réseau donné *converge* presque sûrement vers la moyenne sur le processus limite, par exemple $m_g^{(N)}(t) \xrightarrow{\text{Pps}} E[g(\eta(t))]$; $C_{g_1, g_2}^{(N)}(t_1, t_2) \xrightarrow{\text{Pps}} E[g_1(\eta(t_1))g_2(\eta(t_2))]$ et plus généralement:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(x_k(1) \dots x_k(T)) = \int h(\tilde{\eta}_T(\omega)) d\mathbf{P}(\omega) \quad ; \mathbf{P} \text{ presque sûrement.} \quad (2.42)$$

Il y a des exemples connus, dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, de quantités qui ne sont pas auto-moyennisantes. A contrario, sous l'hypothèse de chaos local, la convergence presque sûre est assurée par la loi des grands nombres. Dans la section 2.2.10 on donne des résultats rigoureux montrant que la propriété d'auto-moyennisation est bien vérifiée (2.42).

Le deuxième problème est la commutation des limites $N \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$. On veut des informations sur le régime stationnaire ($t \rightarrow \infty$) du système dynamique (2.1) à N fini, où l'on fait croître N , alors que les équations de champ moyen donnent le comportement moyen d'un système infini ($N \rightarrow \infty$) dont on étudie le régime stationnaire ($t \rightarrow \infty$). Il n'y a *a priori* pas de raisons pour que ces limites commutent. Dans les verres de spins, à basse température, elles ne commutent pas. Nous donnons dans la section 2.2.9 des arguments non rigoureux expliquant pourquoi, dans notre cas, les limites peuvent commuter.

Gardant à l'esprit ces deux points, on va maintenant donner une utilisation "pratique" des équations de champ moyen. Puisqu'on s'intéresse, en particulier dans les simulations numériques, au comportement statistique moyenné sur un grand nombre de réseaux, les équations de champ moyen devraient rendre compte de ce comportement avec une approximation d'autant meilleure que la taille du système est grande. C'est ce qu'on observe effectivement [Cessac et col., 1994a]. En fait, m, q, Δ jouent le rôle de "paramètres d'ordre" qui vont nous permettre de distinguer différents régimes dynamiques et de tracer une carte de bifurcations dans l'espace des paramètres macroscopiques. On va par ailleurs utiliser la connaissance du système fini pour interpréter ces équations. Nos conclusions sont les suivantes:

1. En premier lieu, on a vu dans la section 2.2.2 qu'en régime absolument stable on a un seul point fixe, pour tout ω . Ce point fixe est aléatoire en l'absence de symétrie impaire. On s'aperçoit numériquement que la distribution des champs neuronaux locaux u_i est approximativement gaussienne. Les équations (2.33), (2.34) nous donnent une bonne approximation de la loi de probabilité de ce point fixe [Cessac, 1994b]. En particulier, la moyenne et la variance calculées sur un grand nombre de réseaux approchent les valeurs théoriques. On observe en fait un résultat plus fort: la dispersion des moyennes et variances empiriques décroît avec N , et celles-ci approchent leur valeur théorique (2.33), (2.34). Ceci laisse bien supposer une propriété d'auto-moyennisation
2. Les équations (2.33), (2.34), admettent, pour certaines régions de l'espace des paramètres, *plusieurs solutions* (voir note 18). Plus précisément, les équations dynamiques (2.29), (2.30) présentent des bifurcations noeud-col et noeud-col inverse. Elles *correspondent* aux bifurcations noeud-col observées numériquement, dans le sens suivant [Cessac et col., 1994a].

D'une part, on voit apparaître des bifurcations noeud-col dans le système (2.1) dans le régime de paramètres macroscopiques correspondant. Lorsqu'il y a plusieurs points fixes stables qui coexistent au sein d'un réseau, on atteint l'un ou l'autre de ces point en changeant les conditions initiales. Si l'on calcule, pour un réseau donné, et pour différentes conditions initiales, la moyenne empirique des x_i , $m_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, en régime de point fixe, on trouve un ensemble de valeurs qui s'approchent des valeurs théoriques quand N croît (voir la page incluse ci-après, reproduction²² des Fig. 4a,b,c de [Cessac et col., 1994a]). On peut par ailleurs tracer les m_N des différents points fixes en fonction des paramètres (g par exemple). On observe un accord surprenant avec le diagramme théorique donné par les équations de champ moyen.

D'autre part, si l'on fait la statistique des valeurs de paramètres macroscopiques où apparaît une certaine bifurcation noeud-col, la valeur moyenne qu'on obtient est proche de la valeur donnée

22. Avec l'aimable autorisation d'un des auteurs.

par les équations de champ moyen, avec un écart-type qui décroît avec N . Les équations (2.33), (2.34) nous permettent alors d'établir une "carte des bifurcations noeud-col" dans l'espace des paramètres macroscopiques (voir [Cessac et col., 1994a] et la page jointe). Enfin, la distribution des champs neuronaux locaux u_i pour un point fixe stable donné²³ est approximativement gaussienne et la dispersion des moyennes et variances empiriques décroît avec N .

3. Connaissant la distribution des points fixes, on peut calculer la valeur de déstabilisation en estimant le rayon spectral de la matrice jacobienne au(x) point(s) fixe(s) par le théorème²⁴ de Girko [14]. On trouve alors l'équation (2.36) [Cessac, 1994d]. Ce résultat est confirmé numériquement. Avec une probabilité qui croît avec N la déstabilisation se produit par bifurcation de Hopf. L'équation (2.36) définit donc dans l'espace des paramètres macroscopiques les points de déstabilisation. Par ailleurs, on a maintenant une interprétation du processus de l'équation (2.37). Ce processus à trajectoires presque sûrement constantes correspond à un régime de points fixes. Voyons maintenant ce qu'il en est de (2.38).
4. On observe numériquement que, comme pour le modèle à symétrie impaire, la première bifurcation de Hopf est suivie, si l'on augmente g , par une route vers le chaos par quasi périodicité, avec une probabilité croissante en N . Par ailleurs, l'écart entre la valeur moyenne de première déstabilisation et l'entrée dans le chaos décroît comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$. A taille infinie, on conjecture donc une transition brutale point fixe-chaos, corroborée par le fait, discuté dans la section 2.2.2, qu'une infinité de valeurs propres de la matrice jacobienne s'accumulent sur un cercle lorsque $N \rightarrow \infty$. Au point de bifurcation, on devrait donc avoir, à la limite thermodynamique, une infinité de valeurs propres qui traversent *en même temps* la frontière de stabilité. Selon cette interprétation l'équation (2.36) nous donne aussi l'entrée en régime "chaotique" lorsque $N \rightarrow \infty$.
5. Toujours numériquement, on montre que la somme des exposants de Lyapunov positifs croît lorsque g augmente dans le régime chaotique, et ce, de plus en plus brutalement quand N augmente. Cette croissance est due d'une part à l'augmentation de la valeur des exposants positifs, mais aussi à une augmentation de leur *nombre*. Si l'on admet que cette somme est une mesure approximative de la vitesse de mélange, cela signifie donc que *la vitesse de décorrélation exponentielle croît et diverge avec la taille*. Donc, asymptotiquement, les neurones se décorrèlent en *un* pas de temps. Cela permet de mieux comprendre²⁵ le processus (2.38), superposition d'un processus à trajectoire presque sûrement constantes et d'un bruit blanc.
6. Les équations dynamiques de champ moyen permettent donc de tracer une "carte de bifurcations" sommaire du modèle dans l'espace des paramètres macroscopiques. Cette carte sert de guide pour anticiper le comportement d'un réseau de taille finie. Par cette approche on a réduit l'espace des paramètres microscopiques de dimension $N^2 + N + 1$ à un espace de dimension 4 et on a donc clairement perdu de l'information. Néanmoins, cette carte de bifurcation est un outil précieux pour l'exploration [Cessac et col., 1994a].
Par ailleurs, il faut noter que même si l'on a réduit le problème à 4 paramètres indépendants, l'exploration de cet espace reste encore une tâche formidable, même sur le plan numérique. Par exemple, lorsque $\bar{J} = 0$, il est clair que la recherche des points fixes (2.33), (2.34) des équations dynamiques de champ moyen (2.29), (2.30) est grandement facilitée puisqu'on n'a qu'à chercher les points de l'équation de g , qui est de dimension 1. A contrario, pour $\bar{J} \neq 0$ on doit chercher les points fixes d'un système non linéaire de dimension 2, ce qui n'est pas sans problèmes, même

23. L'histogramme des u_i calculé sur un grand nombre de réseaux fait apparaître une distribution à plusieurs bosses qui est bien approximée par une superposition de gaussiennes de lois données par les points fixes des équations de champ moyen.

24. Celui-ci s'applique à des variables indépendantes alors que, en l'absence de symétrie impaire, les colonnes de la matrice jacobienne ne sont pas indépendantes (voir [Cessac, 1994d]). Elles le deviennent cependant asymptotiquement sous l'hypothèse de chaos local.

25. En supposant implicitement une commutation des limites $t \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$

sur le plan numérique. Nos explorations se sont en fait limitées à l'espace $(g, \bar{\theta})$ dans l'article [Cessac et col., 1994a] et ont été étendues à $(g, \bar{\theta}, \sigma_\theta)$ dans [Quoy et col., 1994].

2.2.8 Relations avec les verres de spins.

Le modèle non convergent (2.1) présente de surprenantes relations avec le modèle de verres de spins de Sherrington-Kirkpatrick [12]. Cette relation avait été anticipée par Crisanti, Sompolinsky, Sommers dans le cadre plus restreint du modèle traité dans l'article [30], et incorrectement interprétée puisque les auteurs y voyaient une objection majeure à la validité de l'hypothèse de chaos local. Nous discutons maintenant cette analogie. Nous rappelons au préalable quelques éléments essentiels concernant le modèle de Sherrington-Kirkpatrick (pour une revue récente voir [38]).

Dans ce modèle phare pour l'étude des verres de spins, les spins sont de type Ising ($S_i = +1, -1$), et les interactions entre spins sont aléatoires, de loi donnée par (2.2), mais sont *symétriques*. Dans le cadre de la mécanique statistique il est naturel de considérer la mesure ou état de Gibbs à taille finie:

$$\mu_{\mathcal{J}, \beta}^{(N)}(\mathbf{S}) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_{\mathcal{J}}^{(N)}(\mathbf{S})}}{Z_{\mathcal{J}}^{(N)}(\beta)}$$

où $\mathbf{S} \in \{-1, 1\}^N$ est une configuration de spins,

$$Z_{\mathcal{J}}^{(N)}(\beta) = \sum_{\mathbf{S} \in \{-1, 1\}^N} e^{-\beta \mathcal{H}_{\mathcal{J}}^{(N)}(\mathbf{S})}$$

la fonction de partition, $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}^{(N)}(\mathbf{S}) = -\sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{ij} S_i S_j$ l'énergie ou "Hamiltonien" et $\beta = \frac{1}{T}$ l'inverse de la température. Du point de vue numérique et dynamique, on construit, pour obtenir cet état, un processus de Markov (dynamique de Glauber ou dynamique de Langevin) correspondant à une dynamique de gradient (énergie), dont les trajectoires sont bruitées par un bruit blanc de variance T (température). Ce processus est uniquement ergodique à taille finie, et satisfait à la condition de bilan détaillé assurant que l'unique mesure stationnaire est bien la mesure de Gibbs. Au contraire, à la limite thermodynamique il peut ne plus y avoir unicité de la mesure d'équilibre (transition de phase), notamment à basse température.

Les moments centrés (cumulants) associés à un état d'équilibre sont obtenus via le calcul de l'énergie libre, qui est le logarithme de la fonction de partition $Z_{\mathcal{J}}^{(N)}(\beta)$. Dans un modèle où les interactions sont aléatoires, se pose en plus le problème de moyenner cette énergie libre sur le désordre. Il s'avère que la quantité pertinente [27, 39] est l'espérance du logarithme de $Z_{\mathcal{J}}^{(N)}(\beta)$ et non le logarithme de l'espérance. Cette quantité peut-être obtenue en moyennant la fonction de partition d'un système comportant n répliques du même réseau (même réalisation des couplages), n'interagissant pas. On admet alors que la fonction obtenue a un prolongement analytique à n réel et on exprime la quantité désirée comme une limite lorsque $n \rightarrow 0$ [27, 39].

Pour le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, à haute température, et à la limite thermodynamique, l'unique état d'équilibre est caractérisé par des équations de champ moyen, appelées équations de Sherrington-Kirkpatrick, obtenues par cette procédure sous l'hypothèse que toutes les répliques sont équivalentes. Lorsque la température décroît, et lorsqu'on passe une frontière appelée ligne De Almeida-Thouless (ligne AT) [26], les équations de Sherrington-Kirkpatrick ne sont plus pertinentes (on trouve en particulier une entropie négative). Il n'y a plus unicité de l'état d'équilibre, et la mesure totale s'écrit comme une décomposition convexe de composantes ergodiques (états purs) dont les poids varient d'une réalisation à l'autre [27]. (Ces poids n'ont donc pas la propriété de self-averaging). A taille finie, cela signifie que l'espace de phase se morcelle en "vallées" dans chacune de laquelle le système reste un temps très long, avant de passer, grâce aux fluctuations aléatoires dans une autre vallée [40].

Le temps moyen nécessaire pour passer d'une vallée à l'autre dépend exponentiellement de la "hauteur de barrière" entre deux vallées, cette hauteur divergeant à la limite thermodynamique, ce qui conduit à la brisure d'ergodicité. A taille infinie, chaque sous-composante ergodique a donc son support sur une vallée. Dans cette situation, l'hypothèse de symétrie des répliques n'est plus soutenable et il faut appliquer un schéma de brisure de symétrie (Ansatz de Parisi) [41]. Les états purs peuvent également être caractérisés via des équations de champ moyen appelées équations TAP, pour Thouless-Anderson-Palmer [42], que l'on sait obtenir à taille finie, et dont le nombre augmente exponentiellement avec la taille [43], selon un facteur dépendant de la température.

Les équations de champ moyen (2.33), (2.34) sont, dans le cas où $f(x) = \tanh(gx)$, les équations de Sherrington-Kirkpatrick, où g joue le rôle de l'inverse de la température et où les seuils correspondent à des champs extérieurs. Par ailleurs, l'équation (2.36) donnant la transition vers le chaos correspond à l'équation de De Almeida-Thouless [Cessac, 1994d]. La condition de De Almeida-Thouless définit une variété de codimension 1 dans l'espace des paramètres du modèle SK (température, champ local, moyenne et variance des interactions $J, \bar{J}$) correspondant aux paramètres macroscopiques $(\frac{1}{g}, \bar{\theta}, \sigma_\theta, J, \bar{J})$ de notre modèle. Comme je l'ai dit plus haut, cette relation avait déjà été pressentie par Crisanti, Sompolinsky, Sommers [30], mais aussi par Tirozzi et Tsodyks [33] dans le cas d'un modèle du type (2.1), mais avec pour seul paramètre g ($\bar{\theta} = 0$), ce qui signifie que l'on n'avait qu'un point de la variété de De Almeida-Thouless. Dans [Cessac, 1995] j'ai généralisé ces résultats à tout l'espace des paramètres $(g, \bar{J}, \theta, \sigma_\theta)$.

Ces coïncidences formelles suggéraient donc en particulier qu'il existait une analogie entre le régime chaotique de notre modèle et la phase basse température du modèle de Sherrington-Kirkpatrick. On pourrait interpréter cette coïncidence comme une indication claire que l'hypothèse de chaos local ne saurait être vérifiée. En effet, en dessous de la ligne AT, dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, les équations de Sherrington-Kirkpatrick ne sont plus correctes. Par ailleurs, dans ce régime les champs locaux du modèle de Sherrington-Kirkpatrick sont non gaussiens [44]. Qu'en est-il dans notre modèle? A-t-on une brisure d'ergodicité analogue au modèle de Sherrington-Kirkpatrick, avec ce morcellement de l'espace de phase? A-t-on une "brisure de symétrie des répliques", si tant est que l'on puisse donner un sens à ce concept dans notre modèle [Cessac, 1994d]?

On trouve en fait que les équations (2.33), (2.34), (2.35) sont parfaitement correctes dans tous les régimes de paramètres [Cessac, 1995]. Ce résultat (décevant) n'est (après coup) pas surprenant et il est expliqué plus longuement dans la section suivante. Pourquoi cette analogie alors? Est-elle seulement "accidentelle"?

Il est possible d'avoir une évaluation de l'entropie de Kolmogorov-Sinai de (2.1) lorsque la taille tend vers l'infini. Celle-ci croît exponentiellement vite, et proportionnellement à N en régime chaotique, avec un coefficient théorique (estimé à la limite thermodynamique) donné par :

$$\lambda = \log \left(J^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f'^2(h \sqrt{J^2 q + \sigma_\theta^2} + \bar{J}m + \bar{\theta}) dh \right) \quad (2.43)$$

et dépendant de g . Ce coefficient, qui correspond à l'exposant de lyapunov du processus monodimensionnel η , est nul dans le régime de point fixe et devient positif dans le régime "chaotique", lorsqu'on traverse la variété (2.36) correspondant à la condition de De Almeida-Thouless. Dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, la traversée de la ligne AT correspond aussi à un accroissement de la complexité du nombre de solutions des équations TAP. Cela suggère qu'il pourrait exister dans le modèle (2.1) une relation générale liant la traversée de la ligne AT à un accroissement de complexité [Cessac, 1994d]. On donne une extension possible de cette idée dans la section suivante.

2.2.9 Approche cavitaire.

Dans [Cessac, 1995] j'ai cherché à comprendre d'une part pourquoi l'hypothèse de chaos local conduisait à des résultats corrects, et d'autre part pourquoi le régime observé à la limite thermodynamique est somme toute assez trivial, contrairement au modèle de Sherrington-Kirkpatrick. J'ai montré que l'asymétrie des couplages joue un rôle essentiel.

Pour ce faire j'ai utilisé l'approche cavitaire employée par les physiciens des verres de spins. Dans notre modèle elle consiste à prendre un réseau de N neurones dont la dynamique est (2.1), en régime stationnaire, et à y ajouter, au temps t_0 un nouveau neurone, initialement indépendant des autres. On regarde alors comment les corrélations se construisent au cours du temps. J'ai considéré des couplages partiellement symétriques²⁶, du type (2.13). La dynamique construit des boucles de rétroaction: un neurone envoie un signal qui lui revient au deuxième pas de temps, etc ... En moyennant sur le désordre, l'approche cavitaire conduit à trouver une correction au second ordre à l'équation dynamique de champ moyen du processus η (similaire au termes de réponse linéaire qui apparaît dans les équations de Thouless-Anderson-Palmer [42]). Elle contient le champ gaussien η mais aussi *un terme de rétroaction*. Par exemple, au temps $t_0 + 2$, on a (le calcul détaillé est fait dans [Cessac, 1995]):

$$u(t_0 + 2) = \eta(t_0 + 1) + J^2 \frac{1 - k^2}{1 + k^2} G(u(t_0 + 1))x(t_0) \quad (2.44)$$

où $G(u) = E[f'(u)]$. On est donc en présence d'un terme de mémoire qui n'est pas sans rappeler l'équation (2.16). Lorsque $k = 1$ ce terme disparaît et la dynamique est markovienne²⁷. D'un point de vue heuristique on peut dire que, en l'absence de rétroaction, chaque neurone voit, à chaque instant, l'information arrivant des autres neurones comme un bruit, complètement indépendant de l'instant précédent.

Au contraire, pour $k \neq 0$, la présence d'un terme de mémoire implique que l'évolution *dépend de tout le passé*. On s'attend donc à une dynamique infiniment plus complexe pour $k \neq 1$. De fait, pour $k = 0$, les interactions étant symétriques, la dynamique admet des attracteurs du type point fixe ou orbite périodique de période 2 [47]. Dans une version à temps continu de (2.1), avec couplages symétriques, Marcus et Wetrevelt [48] ont montré que le nombre d'attracteurs²⁸ croissait, de manière analogue au modèle de Sherrington-Kirkpatrick, exponentiellement avec N . Au contraire, pour $k = 1$, à taille finie on a un nombre fini d'attracteurs²⁹ et au moins un attracteur étrange pour g suffisamment grand. Cela suggère une phase intermédiaire $0 < k < 1$ très riche. Je l'ai effectivement vérifié numériquement. Dans le régime intermédiaire on a coexistence d'attracteurs étranges, cycles limites, points fixes dans une combinaison extrêmement riche. On pourrait en particulier avoir une phase analogue à la phase verre de spins du modèle de Sherrington-Kirkpatrick avec une multiplicité d'attracteurs étranges associée à un morcellement de l'espace de phase en bassins d'attraction, chaque attracteur portant une mesure SRB. Cela suggère les questions suivantes: 1) comment caractériser ce régime? Existe-t'il une extension de la théorie des répliques par exemple? 2) Supposons qu'on définisse une quantité permettant de mesurer la complexité du système dans tout l'intervalle $k \in [0, 1]$, prenant en compte à la fois la complexité de la dynamique sur son attracteur et la multiplicité des attracteurs (par

26. Un modèle similaire mais avec des neurones à états discrets a été étudié par Krauth et collaborateurs [45], et aussi par Crisanti et ses collaborateurs [46]

27. En toute rigueur le calcul de [Cessac, 1995] est valable au temps $t_0 + 2$, lorsque $N \rightarrow \infty$. Il ne nous permet pas de réellement conclure à la validité de l'hypothèse de chaos local lorsque les couplages sont asymétriques, mais plutôt de conclure que cette hypothèse est fausse si les couplages ne sont pas asymétriques.

28. Pour un modèle à temps continu avec interactions symétriques, on a une fonction de Lyapunov et les attracteurs sont des points fixes stables.

29. Avoir une infinité d'attracteurs correspondrait, du point des équations de champ moyen, à avoir une infinité de points fixes. Pour $\bar{J} = 0$ on se convainc assez facilement que ceci ne pourrait arriver que si le terme de gauche dans l'équation (2.34) avait une intersection, sur un intervalle ouvert, avec la première bissectrice. Cette situation est structurellement instable et non générique.

exemple la somme des entropies de Kolmogorov-Sinai de chaque attracteur)? Existe-t'il une ligne de Almeida-Thouless dans tout cet intervalle de paramètres, dont le franchissement correspondrait à un accroissement brutal de la complexité? J'ai en particulier tenté de généraliser le calcul de Bray and Moore et Marcus et Wetrevelt pour estimer le nombre moyen d'attracteurs, mais sans réel succès. Je n'ai pas apporté de réponse à ces questions et je n'ai pas publié mes résultats partiels.

2.2.10 Grandes déviations.

Récemment Olivier Moynot et Manuel Samuelides [13] ont défini un cadre mathématique dans lequel ils donnent une démonstration des équations dynamiques de champ moyen, mais en présence de bruit³⁰ et à *temps borné* $T < \infty$. Ce résultat utilise des techniques de grandes déviations et s'inspire des travaux de Ben Arous et Guyonnet [25]. O. Moynot et M. Samuelides considèrent une version bruitée de (2.1):

$$x_i(t+1) = f\left(\sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t) + \theta_i + B_i(t)\right) \quad (2.45)$$

où $\{B_i(t)\}_t$ est un bruit blanc gaussien centré de variance σ^2 . Les variables aléatoires $B_i(t)$ sont indépendantes des J_{ij} et des θ_i et indépendantes entre elles. Comme plus haut, on considère également que les conditions initiales $x_j(0)$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi μ_0 . On rappelle que f prend ses valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. On note $P_{\tilde{\mathbf{x}}_T}^{(N)}$ la loi du processus $\tilde{\mathbf{x}}_T$ et $P_{\tilde{\mathbf{x}}_T}^{(N)}(\cdot | \mathcal{J}, \Theta)$ la loi de $\tilde{\mathbf{x}}_T$ sachant $\mathcal{J}, \Theta$. Alors:

$$Q^{(N)} = \int_{\mathbb{R}^{N^2+N}} P_{\tilde{\mathbf{x}}_T}^{(N)}(\cdot | \mathcal{J}, \Theta) dP_{\mathcal{J}, \Theta}^{(N)} \quad (2.46)$$

représente la loi de $\tilde{\mathbf{x}}_T$ moyennée sur les connexions et les seuils.

Un objet essentiel dans cet approche est la *mesure empirique*:

$$\gamma^{(N)} : ([a, b]^{[0, T]})^N \longrightarrow \Omega_1^+([a, b]^{[0, T]})$$

qui, à un morceau de trajectoire à T pas de temps, $\tilde{\mathbf{x}}_T \in ([a, b]^{[0, T]})^N$, associe une mesure $\gamma^{(N)}(\tilde{\mathbf{x}}_T, \cdot)$ dans $\Omega_1^+([a, b]^{[0, T]})$, l'espace des mesures bornées positives, donnée par:

$$\gamma^{(N)}(\tilde{\mathbf{x}}_T, \cdot) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{k,T}}(\cdot) \quad (2.47)$$

où $\delta_{\tilde{x}_{k,T}}$ est la mesure de Dirac qui charge le morceau de trajectoire $\tilde{x}_{k,T} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_k(t)\}_{t=1}^T$ du neurone k . Les grandeurs empiriques (2.39), (2.40) et plus généralement (2.41) de la section sont alors données par:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(x_k(1) \dots x_k(T)) = \int h(y) d\gamma_T^{(N)}(\tilde{\mathbf{x}}_T, y) \quad (2.48)$$

Les trajectoires étant aléatoires, $\gamma^{(N)}(\tilde{\mathbf{x}}_T, \cdot)$ est une mesure aléatoire. Sa loi de probabilité notée $\pi^{(N)}$, est induite par $Q^{(N)}$ en vertu de $\pi^{(N)}(B) = Q^{(N)}(\gamma^{(N)} \in B)$ pour tout ensemble mesurable B de $\Omega_1^+([a, b]^{[0, T]})$.

O. Moynot et M. Samuelides montrent alors que $\pi^{(N)}$ satisfait un principe de grande déviation (niveau trois [49]). Cela signifie qu'il existe une fonctionnelle H semi-continue inférieure sur $\Omega_1^+([a, b]^{[0, T]})$

30. La présence de ce bruit est indispensable à l'obtention des résultats de ses auteurs. Il semble que son rôle essentiel soit d'assurer l'existence d'un unique minimum pour la fonction de taux du principe de grande déviation.

telle que $\pi^{(N)}(A) \sim \exp(-N \inf_A H(A))$, $A \subset \Omega_1^+([a, b[^{[0, T]})$. Ces auteurs montrent de plus que H a un unique minimum noté Q où H s'annule. Cela signifie que la loi de la mesure empirique se concentre asymptotiquement autour de Q . En d'autres termes la loi du processus asymptotique à temps borné (correspondant bien sûr à notre processus η) est donnée par Q . Ils en concluent :

- Que le processus asymptotique est bien un processus gaussien.
- Que les équations de champ moyen (2.33), (2.34) (en présence de bruit, ce qui consiste à rajouter σ^2 à σ_θ^2) sont exactes.
- Qu'on a une propriété de propagation du chaos. $\forall k \in \mathbb{N}$, pour toutes fonctions $g_1, \dots, g_k$ continues, bornées de $]a, b[^{[0, T]}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int [f_1(x_1) \dots f_k(x_k)] dQ^{(N)}(x) = \prod_{i=1}^k \int f_i(x_i) dQ(x) \quad (2.49)$$

- Et enfin on a une propriété de “self-averaging” c'est-à-dire que la propriété (2.42) de la section 2.2.7 est vérifiée. En particulier, pour $h(x) = x$ on obtient la convergence asymptotique de la moyenne des états d'activation dans un réseau donnée. Cela signifie que $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t)$ et $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2(t)$ sont auto-moyennisantes et convergent asymptotiquement vers $m(t), q(t)$, données par (2.29), (2.30).

Par comparaison avec un modèle équivalent à temps continu, l'intérêt du modèle à temps discret est que la loi Q est explicite. Par contre, le modèle à temps continu est plus complexe [4, 30]. Par ailleurs, la présence du bruit assure l'existence d'un unique minimum pour H . Cette condition n'est plus vérifiée à bruit nul, ce qui corrobore les résultats présentés plus haut où l'on a exhibé des régimes de paramètres admettant plusieurs points fixes des équations dynamiques de champ moyen. Enfin, il faut remarquer que cette étude n'est vraie qu'à temps borné. Il est néanmoins possible de s'intéresser à l'évolution asymptotique en temps après avoir fait tendre N vers l'infini. Il n'y malheureusement pas, à ma connaissance, de preuve mathématique que ces deux limites commutent.

2.2.11 Conclusions.

En conclusion de cette partie j'aimerais faire plusieurs remarques, réflexions a posteriori sur le travail présenté ici. En tout premier lieu, le modèle (2.1) est un exemple intéressant et relativement riche où les méthodes de systèmes dynamiques et les méthodes de la mécanique statistique se marient avec un certain succès. Néanmoins, les techniques employées nécessitent toutes un passage à la limite thermodynamique qui n'est pas sans poser de problèmes délicats tant du point de vue technique que du point de l'interprétation des résultats relativement au système de taille finie. Par ailleurs, même si on a finalement une compréhension assez claire du processus limite et une explication de la validité des équations obtenues sous la très controversée hypothèse de chaos local, c'est essentiellement parce que le système asymptotique est somme toute assez trivial. Ceci est dû d'une part à l'hypothèse initiale d'indépendance des interactions, et d'autre part au caractère discret de l'évolution temporelle. Par ailleurs, on voit clairement les limites de l'hypothèse de chaos local. Dans un modèle à couplage partiellement symétriques celle-ci conduit à des résultats incorrects alors que les méthodes de physique statistique des systèmes désordonnés, approche cavitaire ou méthode de champ moyen dynamique, donnent le bon comportement (avec cependant des restrictions sur les paramètres et la loi des interactions). Une étude détaillée du modèle à interactions partiellement symétriques devrait donc se fonder sur ce type de méthodes ou bien sur des méthodes de grande déviations. Mais le cas réellement pertinent du point de vue des réseaux de neurones, concerne, à mon sens, des interactions *corrélées* en général, et pas seulement corrélées par la symétrie. Un exemple est donné dans la section suivante.

Je pense que l'étude théorique de ce cas est hors d'accès des méthodes de mécanique statistique et de grandes déviations dans leur état actuel, et celles-ci nécessiteraient d'être étendues.

L'étude du modèle (2.1) nous a également montré un résultat intéressant. *Le système en taille finie est beaucoup plus riche que le système asymptotique.* Une étude théorique plus approfondie nécessiterait donc une estimation des *corrections de taille finie*. L'étude en général de ces corrections constitue, je pense, une étape nécessaire dans les développements ultérieurs des méthodes de la physique théorique aux systèmes biologiques. Quelques idées sur ce thème sont présentées dans le chapitre 6.

2.3 Apprentissage.

Les résultats théoriques que l'on vient de décrire donnent une bonne description des différents régimes dynamiques génériquement exhibés par (2.1). Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets de l'apprentissage sur cette dynamique [Daucé et col., 1998]. L'apprentissage correspond à une évolution adiabatique des couplages J_{ij} sous l'influence d'un motif que l'on désire apprendre. Dans notre modèle, un motif est un vecteur Ξ à N composantes $\{\xi_i\}_{i=1..N}$ et la présentation du motif Ξ consiste à ajouter ce vecteur au vecteur des seuils Θ (c'est-à-dire $\theta_i \rightarrow \theta_i + \xi_i$, $i = 1 \dots N$). Il y a donc deux dynamiques en compétition, une dynamique rapide caractérisant les neurones, et une dynamique lente associée à l'évolution des couplages. La dynamique rapide est donnée par:

$$x_i^T(t+1) = f\left(\sum_j J_{ij}^T x_j^T(t) + \theta_i^T\right); \quad i = 1..N \quad (2.50)$$

et la dynamique d'apprentissage (associée à l'exposant T) par³¹:

$$J_{ij}^{T+1} = J_{ij}^T + \frac{\alpha}{N} (x_i^T(t_s+1) - 0.5)(x_j^T(t_s) - 0.5)H(x_j^T(t_s) - 0.5) \quad i, j = 1..N; \quad T > 1 \quad (2.51)$$

D'autre part, un poids J_{ij} ne peut changer de signe³². α est un petit paramètre. H est la fonction de Heaviside.

Toute modification des poids selon cette règle entraîne évidemment une modification de la dynamique rapide. Cette dynamique dissipative converge néanmoins toujours vers un attracteur même si la nature de celui-ci a changé (voir plus bas). Le temps t_s apparaissant dans la règle (2.51) est le temps nécessaire pour assurer que la dynamique rapide a "convergé" sur son nouvel attracteur³³.

La règle d'apprentissage (2.51) est biologiquement interprétable de la façon suivante. Le poids synaptique J_{ij} envoie le signal du neurone j vers le neurone i . L'apprentissage a pour effet de renforcer l'interaction J_{ij} si la corrélation entre l'état du neurone j à l'instant t , $x_j(t)$, et l'état du neurone i à l'instant $t+1$, $x_i(t+1)$ est forte, ou de la diminuer dans le cas contraire. Par exemple, si j est "actif" ($x_j(t_s) > 0.5$) et i "inactif" ($x_i(t_s+1) \leq 0.5$) le couplage J_{ij} est diminué. Il s'agit donc bien d'apprentissage Hebbien. Par ailleurs, la fonction de Heaviside dans (2.51) signifie que le lien est changé *seulement si le neurone émetteur est actif*. Notons que nous présentons ici une règle particulière d'apprentissage où l'on tient compte de l'état des neurones à un instant arbitraire t_s . On peut considérer des variantes, où l'on fait intervenir l'activité temporelle moyenne des neurones, etc Emmanuel Daucé a exploré dans sa thèse [51] différentes versions dont certaines sont plus efficaces que (2.51), en

31. Implicitement nous supposons ici, sans perte de généralité, que la fonction f prend ses valeurs dans $[0,1]$ (raison d'être des termes 0.5 apparaissant dans la règle d'apprentissage). Ce choix correspond au fait que des états neuronaux entre 0 et 1 sont biologiquement interprétables en termes de fréquence de décharge.

32. L'interprétation biologique de cette contrainte est qu'une synapse excitatrice (resp. inhibitrice) ne peut pas devenir inhibitrice (resp. excitatrice).

33. *Stricto-sensu*, ce temps est infini. Dans nos simulations numériques un millier d'itérations suffisent.

termes notamment de capacité de stockage.

L'itération conjointe de (2.50) et (2.51) se fait de la façon suivante. Les couplages et seuils initiaux, J_{ij}^0, θ_i^0 sont fixés à une valeur initiale aléatoire déterminée par les lois de probabilités (2.2), (2.4), et une valeur donnée des paramètres $(g, \bar{J}, \bar{\theta}, \sigma_\theta^2)$. Cela correspond à la dynamique spontanée traitée dans la partie précédente. Dans nos expériences, on choisit les paramètres en sorte que la dynamique spontanée soit *chaotique*, notre objectif initial étant d'obtenir un phénomène analogue à celui décrit par Freeman.

Après un temps t_s suffisant pour assurer que la dynamique spontanée "vit" sur son attracteur, on "présente" un motif Ξ au réseau. Cela signifie donc qu'au temps $T = 1$ on modifie les seuils : $\theta_i^1 = \theta_i^0 + \xi_i$. Les poids J_{ij} ne sont pas modifiés à ce stade. Le motif choisi est un vecteur aléatoire Ξ dont les composantes ξ_i sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, gaussiennes, de moyenne $\bar{\xi}$ et de variance σ_ξ . Par ailleurs, Ξ est indépendant du vecteur des seuils Θ . La variation des seuils affecte bien évidemment la dynamique rapide de façon quantitative, voire qualitative, puisque ajouter un motif correspond à modifier les paramètres microscopiques correspondant aux seuils. Du point de vue macroscopique, cette opération correspond à une modification $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\xi}$, $\sigma_\theta \rightarrow \sigma_\theta + \sigma_\xi$ de deux paramètres macroscopiques. Les équations de champ moyen permettent d'anticiper les effets dynamiques occasionnés par cette modification. Par exemple, la présentation de motifs dont la valeur moyenne est suffisamment importante conduit, en général, à un effondrement du chaos, prédictible via les équations de champ moyen. Dans nos expériences nous ne nous sommes surtout intéressés aux motifs n'effondrant pas le chaos (faible moyenne et faible variance).

Après un temps t_s la dynamique évolue sur son nouvel attracteur. On itère alors la règle d'apprentissage (2.51), pendant un certain nombre de pas T (phase d'apprentissage). Le motif Ξ est toujours présent pendant cette phase. Une fois la règle d'apprentissage terminée on supprime le motif ξ (i.e. on redonne aux seuils leur valeur initiale, θ_i^0). On observe alors les changements qualitatifs de dynamiques se produisant lors du retrait ou d'une nouvelle présentation de ce motif.

Nous résumons ici les conclusions principales rapportées dans [Samuelides et col., 1996, Daucé et col., 1998] (pour plus de détails voir l'article 3 de l'annexe A):

- La phase d'apprentissage conduit à une réduction de la dynamique chaotique. Plus précisément, l'itération de cette règle fait suivre au système une route inverse par quasi périodicité. On passe d'un attracteur étrange à un tore $\mathcal{T}^2$, puis à un cycle limite, et enfin à un point fixe. De plus, un apprentissage trop long élimine toute dynamique.
- Si l'on décide d'interrompre la phase d'apprentissage alors que l'attracteur est un cycle, on observe le phénomène suivant. *La suppression du motif redonne une dynamique chaotique*. De plus, *présenter à nouveau ce motif conduit à un effondrement de la dynamique chaotique vers ce cycle limite*. Le processus d'apprentissage associe donc à un motif donné un motif *dynamique* et la reconnaissance se manifeste par une réduction de la dynamique chaotique sur le cycle associé.
- Cela signifie donc que la règle d'apprentissage a conduit le système dans un état différent de l'état initial. En l'absence du motif, la dynamique est chaotique et ne se différencie pas de la dynamique chaotique initiale, avant apprentissage. Plus précisément, les "caractéristiques" de l'attracteur étrange, (tels spectre multifractal ou spectre de Lyapunov) peuvent bien sûr être modifiées, mais ces modifications ne nous disent *rien* sur le fait que le système a "appris" quelque chose sur le motif. Cette sensibilisation du système au motif se manifeste *seulement* lors de la présentation du ce motif, par une réduction radicale de la dynamique (alors que cette réduction ne se produisait pas avant l'apprentissage).
- Cette réponse est *sélective et spécifique*. La présentation d'un autre motif ne conduit pas à cette réduction de dynamique. Cependant, une version faiblement bruitée du motif appris conduit au même phénomène de réduction, donc *ce mécanisme est robuste au bruit*.

- Il est possible d’apprendre plusieurs motifs de cette façon. Le cycle associé au premier motif est bien sûr légèrement modifié par l’apprentissage d’un second motif, mais cette modification n’est pas significative³⁴. Cependant, la capacité de stockage est très faible, puisque au-delà de 3 ou 4 attracteurs le réseau perd la mémoire et la présentation du premier motif ne conduit plus à la réduction de dynamique [50]. D’autres règles d’apprentissage, proposées dans la thèse d’Emmanuel Daucé [51], permettent d’augmenter cette capacité.

Ces résultats sont fascinants car ils sont la manifestation d’un effet qui n’est pas sans rappeler le paradigme de Freeman, même s’il faut se garder d’en conclure quoi que soit sur la réalité biologique. Ce travail fût à ma connaissance le premier travail mettant en évidence ce comportement dans un réseau de neurones formels. Ces travaux sont suffisamment avancés pour que des applications potentielles (en robotique) soient envisagées (voir la thèse d’Emmanuel Daucé [51] et [53, 54, 55]).

Du point de vue théorique, on est loin du degré de compréhension de la partie précédente. De fait, la méthode dynamique de champ moyen apparaît inapplicable, la dynamique d’apprentissage (2.3) créant des corrélations entre les poids. Mes tentatives d’avoir une approche “perturbative” de la dynamique couplée donnant une idée de l’évolution moyenne dans les premiers pas de l’apprentissage n’ont rien donné de satisfaisant.

D’un point de vue heuristique on peut donner l’explication suivante de ce phénomène. Le système initial est représenté par un point choisi aléatoirement dans un espace de paramètres à $p_N = N^2 + N + 1$ dimensions. La dynamique d’apprentissage correspond à un mouvement du point représentatif du système dynamique dans le sous-espace des interactions, tandis que la présentation ou le retrait du prototype correspondent à une translation dans l’espace des seuils. Ces déplacements conduisent à des bifurcations lors de la traversée de variétés critiques. Les résultats que l’on vient de présenter suggèrent en particulier que la dynamique d’apprentissage réduit progressivement la dynamique chaotique via une route par quasi périodicité inverse - ce qui correspond à la traversée de plusieurs de ces variétés critiques - et amène le système “à la frontière du chaos”, *dans une région où il est sensible au prototype appris*. En effet, une translation dans la direction du prototype (présentation, resp. retrait) conduit à la traversée de la frontière du chaos (dynamique périodique ou quasi-périodique, resp. chaos), alors qu’une translation arbitraire, correspondant à un prototype inconnu, n’a pas cet effet.

On a en fait montré numériquement que la présentation initiale du prototype conduit à une brisure de symétrie dans la distribution des champs neuronaux locaux u_i . Celle-ci se trouve naturellement amplifiée par la dynamique d’apprentissage Hebbienne [Daucé et col., 1998]. Ceci a en fait pour effet de faire apparaître un nombre croissant de neurones inactifs (saturés). L’effet global est celui d’un seuil effectif dont la valeur va croissante au cours de l’apprentissage, conduisant à l’effondrement dynamique observé. Le retrait du motif “recentre” la distribution des champs neuronaux locaux et le nombre de neurones “dynamiquement” actif augmente.

Cette explication est cependant peu satisfaisante. Une exploration plus fine de la dynamique est nécessaire de façon à avoir une compréhension plus précise du phénomène, éventuellement extensible à une classe plus large de modèles (voir section 6.1).

2.4 Développements récents

En collaboration avec M. Samuelides nous préparons l’édition d’un ouvrage collectif sur les dynamiques des réseaux de neurones. Les éditions Springer-Verlag ont donné leur accord pour éditer ce livre dans la série “Lectures Notes In Physics”. Je collabore à la rédaction de deux chapitres de cet ouvrage. Le premier, en collaboration avec M. Samuelides et R. Stoop dresse un panorama des

34. Nos critères pour caractériser un cycle sont: barycentre, rayon moyen, nombre de rotation.

techniques et concepts des systèmes dynamiques et de la théorie ergodique utilisés pour analyser la dynamique de modèles neuronaux [Cessac et col., 2002 b]. Le second, en collaboration avec M. Samuelides, est une introduction à l'utilisation des méthodes dynamiques de champ moyen dans le contexte des réseaux de neurones. Nous confrontons notamment l'approche des physiciens fondée sur le calcul d'une fonctionnelle génératrice et l'approche probabiliste utilisant la théorie des grandes déviations [Cessac et col., 2002 c].

Nous avons par ailleurs obtenu tout récemment un financement de l'ACI "Temps et cerveau" pour une collaboration pluridisciplinaire ayant pour thème l'étude de modèles de réseaux neuronaux biologiquement plausibles du point de vue des systèmes dynamiques. Un de nos objectifs serait de développer des équations de champ moyen pour la dynamique d'apprentissage (en collaboration notamment avec M. Samuelides et O. Moynot).

Par ailleurs, l'étude des effets de l'apprentissage a conduit à une nouvelle direction de recherche et à une collaboration avec J.A. Sepulchre (chercheur à l'Institut Non-Linéaire de Nice) et S. Rolandez (stagiaire de DEA). Ce projet est présenté dans la section 6.1.

Bibliographie

- [1] Hopfield J.J., "Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities", *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, Vol 79, (1981), 2554-2558.
- [2] Amit D.J. "Modelling brain functions: the world of attractor neural networks", Cambridge University Press (1989).
- [3] Parisi G., "Asymmetric neural networks and the process of learning", *J. Phys. A.*, 19, (1988) L675-680.
- [4] Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.J. [1988] "Chaos in random neural networks", *Phys. Rev. Lett.* 61, 259-262.
- [5] Babloyantz A., Nicolis C., Salazar J.M., "Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle", *Phys. Lett.*, 111 A, (1985), 152-156.
- [6] Babloyantz A., Destexhe A., "Low-dimensional chaos in instance of epilepsy", *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, (1986), 3513-3517.
- [7] Babloyantz A., Destexhe A., "Chaos in Neural Networks", *Proc. IEEE, first international conference on Neural Networks*, M. Candill and C. Butler (eds), 4 (1987), 31-40.
- [8] Babloyantz A., Destexhe A., "The Creutzfeldt-Jacob disease in the hierarchy of chaotic attractors", in "From chemical to biological organization", M. Markus, S. Muller, G. Nicolis. (eds), *Springer series in Synergetics*, 39, (1988), 307-316.
- [9] Freeman W.J. "Simulation of Chaotic EEG Pattern with a dynamic model of the olfactory system", *Biol. Cyber.*, 56, (1987) 139-150.
- [10] Freeman W.J., Yao Y., Burke B., "Central pattern generating and recognizing in olfactory bulb: a correlation learning rule", *Neural Networks*, 1, (1988), 277-288.
- [11] Skarda C.A., Freeman W.J., "How brain makes chaos in order to make sense of the world", *Behav. Brain Sci.*, 10, (1987), 161-195.
- [12] Sherrington D., Kirkpatrick S., "Solvable model of spin glass", *Phys. Rev. Lett.* Vol 35, Num 26 (1975), 1792.
- [13] Olivier Moynot, Manuel Samuelides: Large deviations and mean-field theory for asymmetric random recurrent neural networks *Probab Theory Relat Fields* 123 (2002) 1, 41-75
- [14] Girko V. L., "Circular law", *Theor. Prob. Appl.*, 29, (1984), 694-706.
- [15] Geman S., "A limit theorem for the norm of random matrices", *Ann. Prob.*, 8, (1980), 252-261.
- [16] Edelman A., "The circular law and the probability that a random matrix has k real eigenvalues" (1993) 1-20.
- [17] Ruelle D., Takens F., "On the nature of turbulence", *Comm. Math. Phys.*, 20, (1971), 167-192.
- [18] Amari S. "Characteristics of Random Nets of Analog Neuron-like Elements", *IEEE Trans. Syst. Man. Cyb.*, SMC-2, 5 (1972).
- [19] Amari S., "A method of statistical neurodynamics", *Kybernetik*, (1974).
- [20] Amari S., Yoshida K., Kanatani K., "A mathematical foundation for statistical neurodynamics", *SIAM Journal of appl. Math.* (1977).

- [21] Geman S., "A chaos hypothesis for some large systems of randomly coupled equations", *J. Appl. Math.*, 42, (1982), 695-703.
- [22] Martin P.C., Siggia E.D., Rose H.A., "Statistical dynamics of classical systems", *Phys. Rev. A*, Vol. 8, Num. 1, (1973), 4237.
- [23] De Dominicis C., "Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched random impurities", *Phys. Rev. B*, Vol. 18, Num. 9, (1978), 4913.
- [24] Sompolinsky H., Zippelius A., "Relaxation dynamics of the Edwards-Anderson model and the mean-field theory of spin-glasses", *Phys. Rev. B*, Vol 25, Num 11, (1982), 6860.
- [25] Ben Arous G., Guionnet A., "Large deviations for Langevin spin glass dynamics". *Prob. Th. rel. Fields*, 102, N. 4, 455-509. Ben Arous G., Guionnet A., "Large deviations for Symmetric Langevin spin glass dynamics". To appear in *Annal of Prob.*
- [26] De Almeida A.M.O., Thouless D.J., "Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin glass model", *J. Phys. A*, Vol 11, Num 5, (1978), 983-990.
- [27] Mézard M., Parisi G., Virasoro M.A., "Spin-glass theory and beyond", *World scientific Singapore*, (1987)
- [28] Houghton A., Jain S., Young A.P., "Role of the initial conditions in the mean-field theory of spin-glass dynamics", *Phys. Rev. B*, Vol 28, Num 5, (1983), 2630-2637.
- [29] Crisanti A., Sompolinsky H., "Dynamics of spin systems with randomly asymmetric bonds: Langevin dynamics and spherical model.", *Phys. Rev. A*, Vol. 36, Num. 10, (1987), 4922.
- [30] Crisanti A., Sommers H.J., Sompolinsky H., "Chaos in Neural Networks: Chaotic solutions", *preprint*, (1990).
- [31] Molgedey L., Schuchardt J., Schuster H.G., "Suppressing chaos in neural networks by noise", *Phys. Rev. Lett.*, Vol 69, Num 26, (1992), 3717-3719.
- [32] Kree R., Zippelius A., "Continuous time dynamics of asymmetrically diluted neural networks", *Phys. Rev. A* 36, (1987), 4421-4447.
- [33] Tirozzi B., Tsodyks M., "Chaos in highly diluted neural networks", *Europhys. Lett.*, 14, (1991), 727-732.
- [34] Guikhman I., Skorokhod A., "Introduction à la théorie des processus aléatoires", Editions Mir, Moscou (1980).
- [35] Boltzmann L., "Lectures on Gas theory", Dover Publishing Co, New York, (1995). Translation by S. Brush.
- [36] Geman S., Hwang C.R. "A Chaos hypothesis for some large system of random equations." *Z. Warh. verw. Gebiete* 60, (1982), 291-314.
- [37] Koroliouk V., Portenko N., Skorokhod A., Tourbine A., "Aide-mémoire de probabilité et statistique mathématique", Edition Mir, Moscou (1978).
- [38] Sherrington D., "An introduction and overview is given of the theory of spin glasses and its application", *cond-mat/9806289*.
- [39] Binder K., Young A., "Spin glasses : experimental facts, theoretical concepts and open questions.", *Review of Modern Physics*, Vol 58, N° 4, (1986)
- [40] Mackenzie N.D., Young A.P., *Phys. Rev. Lett.*, 49, (1982), 301-304.
- [41] Parisi G., *J. Phys. A* 13, (1980), 1101-1112.
- [42] Thouless D.J., Anderson P.W., Palmer R. J., *Philos. Mag.*, 35, (1977), 593-601.
- [43] Bray A.J., Moore M.A., *J. Phys. C*, 13 (1980) L469-476.
- [44] Thomsen M., Thorpe M. F., Choy T.C., Sherrington D., Sommers H.J., *Phys. Rev. B* 33 (1986), 1931-1947.
- [45] Krauth W., Nadal J.P., Mézard M. *J. Phys A*, 21, (1988), 2995-3011.

- [46] Crisanti A., Falcioni M., Vulpiani A., "Transition from regular to complex behaviour in a discrete deterministic asymmetric neural network model", J. Phys. A. 26, (1993), 3441-3453.
- [47] Goles E., "Fixed point behaviour of threshold functions on a finite set", SIAM Journ. on algebraic and discrete methods, 3, (1982), 529-531.
- [48] Marcus C.M., Westrevelt R.M., "Dynamics of Iterated Map neural networks", Phys. Rev. A, 40, 501-504, (1989)
- [49] Ellis R. S., "Entropy, large deviations and statistical mechanics", Springer-Verlag, Vol 271, (1985).
Ellis R. S., "Large deviations and statistical mechanics", (1985).
- [50] Quoy M., "Apprentissage dans les réseaux neuromimétiques à dynamique de base chaotique", *Thèse* (1994), ENSAE, Toulouse.
- [51] E. Daucé, "Adaptation dynamique et apprentissage dans des réseaux de neurones récurrents aléatoires", thèse troisième cycle, Toulouse, (2000).
- [Quoy et col., 1994] Quoy M., Cessac B., Doyon B., Samuelides M., "Dynamique de réseaux de neurones à temps discret", 7èmes journées Neurosciences et sciences de l'ingénieur", Chamonix, France, 2-5 may (1994).
- [52] Quoy M., Doyon B., Samuelides M., "Hebbian learning in discrete time chaotic neural networks", *WCNN, Washington DC*, (1995).
- [53] Quoy M., E. Daucé E., "Visual and motor learning using a chaotic recurrent neural network: application to the control of a mobile robot", Neural Computation 2000, Berlin.
- [54] E. Daucé, M. Quoy, "Random recurrent neural networks for autonomous system design", SAB 2000, Paris, France
- [55] E. Daucé, M. Quoy, B. Doyon, "Resonant spatio-temporal learning in large random neural networks", to be published in Biological Cybernetics, 2002

Chapitre 3

Annexe A

Cette annexe contient trois articles originaux.

1. Cessac B., "Occurence of chaos and AT line in random neural networks", *Europhys. Let.*, 26 (8), (1994), 577-582.
2. Cessac B., "Increase in complexity in random neural networks", *J. de Physique I (France)*, 5, 409-432, (1995).
3. Dauce E., Quoy M., Cessac B., Doyon B. and Samuelides M. "Self- Organization and Dynamics reduction in recurrent networks: stimulus presentation and learning", *Neural Networks*, (11) (1998), 521-533.

Chapitre 4

Criticalité auto-organisée et systèmes dynamiques.

4.1 Cadre général.

Ce chapitre présente un ensemble de travaux, commencés en post-doc en collaboration avec Ph. Blanchard et T. Krüger, destinés à analyser les systèmes critiques auto-organisés par la théorie des systèmes dynamiques. Je donne les principaux résultats de cette collaboration en les situant par rapport au contexte général de la criticalité auto-organisée et en montrant leurs connexions avec la théorie des systèmes dynamiques et la mécanique statistique. L'annexe B contient quatre articles dont trois écrits en collaboration avec Ph. Blanchard et T. Krüger (articles 1 [Blanchard et col., 1997], 2 [Blanchard et col., 2000] et 3 [Cessac et col., 2001] de l'annexe B), et le dernier avec J.L. Meunier (article 4 [Cessac & Meunier, 2002])

4.1.1 Préambule.

Le concept de “criticalité auto-organisée” (self-organized criticality ou SOC en abrégé) a été introduit par Bak, Tang et Wiesenfeld (BTW) en 1987 [1, 2] dans un article célèbre où les auteurs tentaient d'expliquer l'ubiquité du bruit en $\frac{1}{f}$. Ils proposaient un mécanisme ingénieux permettant à un système d'atteindre *spontanément*, i.e. par le simple jeu de sa dynamique interne, en réponse à un flux *stationnaire* de stimuli provenant du milieu extérieur, un état *stationnaire hors-équilibre* ayant des caractéristiques similaires à celles d'un système thermodynamique au point critique. Dans le paradigme de Bak, Tang et Wiesenfeld l'activité des entités constituant le système dépend d'une variable caractérisant leur état. Elle se manifeste par un phénomène en “tout ou rien” : l'entité est active si sa variable d'état dépasse un *seuil critique* et elle est inactive sinon. Par ailleurs, l'interaction entre entités est telle que la réponse du système à une perturbation locale se manifeste par une réaction en chaîne ou *avalanche*. Enfin, le système est *ouvert* et la dynamique est définie en sorte que le système atteigne spontanément un état stationnaire hors-équilibre, entretenu par un flux extérieur, dans lequel la statistique des avalanches suit une *loi de puissance*. A l'instar des phénomènes critiques, il n'y a donc pas d'échelle caractéristique, et on peut avoir des avalanches de toutes les tailles possibles. Cela signifie aussi que la réponse du système à une perturbation locale peut avoir une échelle macroscopique, ce qui peut s'interpréter comme l'équivalent d'une divergence de la susceptibilité dans un système thermodynamique. On retrouve donc bien des caractéristiques analogues à celles d'un phénomène critique. Néanmoins, contrairement aux phénomènes critiques classiques, il n'y a pas, dans ce paradigme, de paramètre de contrôle à ajuster, d'où le nom de *criticalité auto-organisée*.

Le paradigme de Bak, Tang et Wiesenfeld est cristallisé autour de leur modèle du “tas de sable”. Dans cette idéalisation les grains de sable sont distribués sur un réseau discret fini; l'état du tas de

sable est spécifié par la hauteur locale, qui est égale au nombre de grains de sable en chaque point du réseau. L'action de la gravité est simulée ainsi. Lorsque la somme des différences de hauteurs entre une pile et ses voisines (pente locale moyenne) est supérieure à une valeur *seuil*, une partie des grains de la pile centrale tombe sur les piles voisines. Il se peut alors que certaines de ces piles aient maintenant une pente locale supérieure au seuil; elles vont donc à leur tour céder une partie de leurs grains à leurs voisines, etc ... On déclenche ainsi une *avalanche*. Le système est *ouvert* sur les bords (les grains atteignant les bords sont perdus). Cela implique que les avalanches cessent au bout d'un temps fini. Pour entretenir la dynamique des avalanches on rajoute des grains de sables, *un par un, et entre les avalanches* (injection *adiabatique* de grains.). On imagine bien que le système va finalement atteindre un état stationnaire hors-équilibre, caractérisé par une pente moyenne déterminée, dans lequel on a un flux constant de grains dans le système, et où le flux moyen de grains entrant est égal au flux moyen de grains sortant. Bak, Tang et Wiesenfeld montrèrent numériquement que dans leur modèle la statistique des avalanches suit effectivement une loi de puissance, tronquée par les effets de taille finie. La conjecture de Bak, Tang et Wiesenfeld est alors que, lorsque la taille du système tend vers l'infini, le système atteint un unique état stationnaire caractérisé par une statistique d'avalanches en loi de puissance (Cf section 4.2.4).

L'article de Bak, Tang et Wiesenfeld connut immédiatement un succès retentissant : le nombre de publications traitant de ce sujet est tout simplement astronomique, la rançon d'un tel succès étant, bien sûr, une certaine inhomogénéité dans la qualité des travaux. En premier lieu, des manifestations de ce phénomène ont été annoncées dans de nombreux exemples : dynamique de tremblements de terre [3, 4, 5], effet Barkhausen [6], mouvements de lignes de flux magnétiques dans les supraconducteurs [7], mouvements de gouttes d'eau sur des surfaces [8], écoulement de fluides dans des milieux poreux [9], microfractures [10], mouvement des taches solaires [11], ... Ce paradigme séduisant a été appliqué en économie [12, 13], à l'évolution en biologie [14] notamment pour expliquer l'extinction des espèces [15, 16]. Il a été proposé comme explication possible aux lois de Gutenberg-Richter [17], de Zipf [18]. Il a donné lieu à des modèles très intéressants de propagation d'épidémies (SIDA notamment) [19]. Il a servi de bases à des paradigmes de dynamique neuronale et à la proposition de mécanismes alternatifs à l'apprentissage hebbien [20]. Dans ce contexte, des modèles de réseaux neuronaux destinés à la segmentation d'image ont été proposés, exhibant un comportement critique auto-organisé [21]. Ce mécanisme semble tellement universel qu'il a conduit l'un des pères fondateurs, Per Bak, à intituler son livre, consacré au sujet, "How nature works" [22].

Cette liste impressionnante et non exhaustive, que l'on peut utiliser comme un argument publicitaire, peut aussi avoir pour effet de générer une certaine suspicion chez le lecteur, le genre de réflexion qu'un scientifique peut avoir lorsqu'on lui propose une théorie du tout. J'ai d'ailleurs constaté, après avoir discuté avec de nombreux chercheurs ne travaillant pas sur ce sujet, que le domaine de la criticalité auto-organisée n'avait pas très bonne presse, et ce, sans doute, à cause de la pléthore de publications rapides et d'effets d'annonces spectaculaires auxquels on a assisté depuis 1987. Mon sentiment est plus mitigé. Je considère qu'il s'agit d'un domaine fascinant, dans lesquels des idées vraiment originales, des modèles pertinents, des questions profondes et de problèmes difficiles de physique théorique et de mathématiques, sont noyés dans une mer de résultats de peu d'intérêt.

Dans cette introduction, je vais m'efforcer de faire un bref historique et de dégager une liste, non exhaustive, des idées et problèmes qui me semblent importants. Le but étant de situer mon travail, je me focaliserai cependant principalement sur les points auxquels j'ai collaboré. Je ne parlerai en particulier pas des résultats expérimentaux, dont nombre sont au demeurant très intéressants. Je précise par ailleurs, pour terminer ce préambule, que ma motivation principale en concentrant ma recherche de 1996 à 2000 sur un modèle de criticalité auto-organisée, le modèle de Zhang [23], n'était pas de devenir un expert dans ce domaine. Mon enthousiasme était, comme je vais le montrer tout au long de ce chapitre, inspiré par la grande richesse de ce modèle en tant que système dynamique,

exhibant un comportement “critique” à la limite thermodynamique, et pour lequel un passage effectif de la dynamique microscopique à la dynamique macroscopique par le biais de la théorie ergodique et de la mécanique statistique semblait possible. Un certain nombre de résultats allant dans ce sens sont présentés ici.

4.1.2 Historique non-exhaustif et problèmes ouverts.

L'article de Bak, Tang, et Wiesenfeld fut suivi d'une grande effervescence dans lequel je distingue plusieurs étapes et/ou approches complémentaires.

Principaux modèles. A la suite de l'article de Bak, Tang, et Wiesenfeld, un certain nombre de modèles ont été proposés, capturant l'essence du modèle initial, mais avec des variantes astucieuses permettant d'accéder à des résultats théoriques et numériques nouveaux. On a ensuite assisté à une multiplication des variantes de variantes, conduisant à une explosion des modèles et des articles. L'effet concomitant a été le développement d'une taxonomie de la criticalité auto-organisée, où l'on a tenté d'épingler les modèles par “classes d'universalité” tels des papillons sur les planches d'un collectionneur. Je dis quelques mots sur ces classes d'universalité plus bas. Je me bornerai ici à ne parler que de deux modèles parmi les principaux.

En 1989, Y.C. Zhang [23, 24] propose une variante du modèle BTW où l'état des unités n'est plus caractérisé par une variable discrète, mais par une variable continue appelée “énergie”. Par ailleurs, l'énergie transférée lorsqu'un site relaxe est proportionnelle à l'énergie de ce site avant relaxation. Je reviens plus en détails sur ce modèle dans la seconde partie, qui lui est entièrement consacrée.

En 1990, Dhar introduit son modèle abélien [25]. C'est une variante du modèle de BTW où le transfert des grains de sable est géré par une matrice de transfert *indépendante de l'état*, qui agit, dans l'espace d'états, comme une translation. On peut alors construire une famille d'opérateurs, appelés “toppling operators”, qui associent à une configuration son image par l'avalanche générée après injection d'un grain de sable en un point spécifié. Ces opérateurs commutent (car les translations commutent). Cela induit une structure de groupe abélien qui permet à Dhar, puis à de nombreux auteurs après lui [26], d'obtenir des résultats *exacts et rigoureux* pour ce modèle. Il montre en particulier que la dynamique est régie par une chaîne de Markov uniquement ergodique, dans un espace d'états finis, dont la mesure invariante est *uniforme* sur les états récurrents. Par la suite, de nombreux résultats importants ont été obtenus tels l'exposant exact de la loi d'échelle des tailles d'avalanches, etc ... On pourrait consacrer un livre entier à ce modèle, avec de nombreux chapitres traitant chacun d'un développement différent et incluant des sujets aussi techniques que la théorie de Galois [27].

On trouvera dans le livre de Jensen [28] des références utiles et une description pédagogique et détaillée des principaux autres modèles.

Descriptions phénoménologiques, équations de transport et limite continue. Très rapidement l'article de BTW est suivi d'un certain nombre de travaux importants où les auteurs tentent d'identifier des mécanismes généraux conduisant à un comportement critique auto-organisé. Il s'agit de proposer une équation de transport phénoménologique sur la base de symétries et lois de conservation, contenant des termes mimant le terme de seuil et l'injection d'énergie, après une procédure implicite de “coarse-graining” justifiant la limite continue. Cette équation est ensuite analysée par des techniques classiques telles le groupe de renormalisation dynamique [29, 30]. Des conclusions générales sont ensuite tirées de cette analyse.

En 1989, Hwa et Kardar [31] proposent l'équation:

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 h + \nu_{\perp} \nabla_{\perp}^2 h - \frac{\lambda}{2} \nabla_{\parallel} h^2 + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

mimant le transport dans un système où le nombre moyen de grains est conservé et ayant les symétries du tas de sable, invariance par translation et invariance par rotation dans la variable $\mathbf{x}_\perp$, mais avec un flux dirigé correspondant au symbole $\parallel$, qui induit une symétrie $h \rightarrow -h$, $x_\parallel \rightarrow -x_\parallel$. Le terme non linéaire est le premier terme¹ d'un développement approximant le seuil dans la réponse et tenant compte des symétries. Le terme η est un bruit blanc de moyenne nulle. Il représente notamment l'injection d'énergie lorsque $\eta(t) > 0$ et une dissipation "dans le réseau"² lorsque $\eta(t) < 0$. En l'absence de ce terme, cette équation est une loi de conservation du nombre moyen de grains associée au courant $\mathbf{j} = -\nu_\parallel \nabla_\parallel h + \nu_\perp \nabla_\perp h - \frac{\lambda}{2} h^2 \mathbf{T}$, où $\mathbf{T}$ est la direction du flux. Hwa et Kardar concluent à la nécessité d'une telle loi de conservation pour avoir auto-similarité. A partir de techniques de renormalisation dynamique ces auteurs calculent notamment les exposants de diffusion, rugosité et d'anisotropie spatiale³.

Par la suite d'autres auteurs utilisent ce type d'approche [32, 33]. Il est cependant important de remarquer que, dans ces travaux:

- Le bruit η est un bruit blanc, et ne possède donc pas les caractéristiques du terme d'injection proposé par BTW. L'injection adiabatique suppose en effet un bruit *dépendant de l'état du système*.
- Les effets de bords ne sont pas traités.
- L'équation de transport proposée caractérise l'état stationnaire mais il n'est pas expliqué comment cet état est atteint. Par ailleurs, le passage *effectif* d'un modèle donné vers ces équations phénoménologiques n'est pas discuté.
- Le terme de seuil est approximé par un développement au plus bas ordre non-linéaire. La prise en compte et la resommation de tous les termes d'ordre supérieur induit-elle des phénomènes nouveaux?

La même année Carlson et ses collaborateurs [34] proposent un modèle très simple pour lequel on sait obtenir l'équation de transport en utilisant des techniques rigoureuses de limite hydrodynamique [35]. Plus exactement leur modèle a un paramètre d'ordre correspondant à une densité locale. Ils montrent rigoureusement que cette densité converge faiblement, lorsque $N \rightarrow \infty$, et dans un système *fermé*, vers la solution d'une équation de diffusion du type:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (4.2)$$

avec condition initiale $\rho(\mathbf{x}, 0) = \kappa(\mathbf{x})$, densité initiale, et où le coefficient de diffusion:

$$D(\rho) = \frac{1 + \rho}{(1 - \rho)^3} \quad (4.3)$$

possède un *pôle* quand $\rho = 1$, où la diffusion devient singulière. Ils montrent alors que dans un système *ouvert* la densité limite ($N \rightarrow \infty$) tend vers 1. Les corrections de taille finie sont calculées et obéissent au Finite-Size Scaling (équation (4.14)).

1. Un terme linéaire violerait la loi de conservation de h et introduirait une échelle de temps et de longueur caractéristiques, contraires au paradigme de la criticalité auto-organisée.

2. Les effets de bords ne sont pas pris en compte dans l'équation (4.1) ainsi d'ailleurs que dans toutes les approches de ce type. Nous montrons dans la section 4.2.7 et dans [Cessac et col., 2002 a] que, dans le modèle de Zhang, les bords sont essentiels pour avoir un système critique *auto-organisé*, c'est-à-dire atteignant spontanément un état critique lorsque la taille du système tend vers l'infini.

3. Les auteurs proposent une loi de transformation d'échelle :

$$h(x_\parallel, \mathbf{x}_\perp, t) = e^{\chi l} h(x_\parallel e^{-l}, \mathbf{x}_\perp e^{-\zeta l}, t e^{-z l})$$

où z, χ, ζ appelés respectivement exposants dynamique, de rugosité, et d'anisotropie spatiale.

L'idée de décrire le transport dans un modèle donné, à une échelle mésoscopique et macroscopique, par une équation aux dérivées partielles correspondant à une limite de temps et d'espace continu est développée par de nombreux auteurs. En 1988, Bak et Tang [36] utilisent une description en terme de diffusion *normale* et en concluent que dans le modèle BTW, dans l'état stationnaire, l'excitation due à un grain de sable induit en moyenne une avalanche contenant L^2 grains dans un réseau bidimensionnel de taille L . Ce résultat est validé numériquement par Manna [37], puis Grassberger et Manna [38]. Il est par ailleurs montré analytiquement par Dhar dans son modèle abélien en dimension deux [25].

De même Zhang propose, dans son modèle, une équation de diffusion normale pour décrire l'évolution de la quantité $S(\mathbf{r}, t) = \langle E(\mathbf{0}, 0)E(\mathbf{r}, t) \rangle$ qui est interprétée comme la corrélation entre l'énergie initialement au site $\mathbf{0}$, au temps $t = 0$ et l'énergie transférée au point r après t pas de temps. $\langle \rangle$ représente la moyenne sur l'état stationnaire ou encore la moyenne sur des avalanches de toutes tailles. Zhang propose l'équation de diffusion:

$$\frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \Delta S(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad (4.4)$$

le terme $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ correspondant à l'injection d'énergie au temps $t = 0$ en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Cette équation permet à Zhang d'obtenir la loi d'échelle de la composante radiale du courant d'énergie loin des bords: $\mathbf{j}_r \sim r^{1-d}$ ainsi que la densité de probabilité du rayon d'une avalanche $D(r) \sim r^{1-d}$. Il s'intéresse par ailleurs au transport au sein d'une avalanche et montre que, dans ce cas, le transport est anormal avec un exposant z , tel que $t \sim r^z$. Le calcul de Zhang donne une valeur approchée $z = \frac{d+2}{3}$ pour $d < 4$ et $z = 2$ pour $d \geq 4$. On voit ainsi que le transport est *ballistique*⁴ ($z = 1$) en dimension 1 et le comportement a peu d'intérêt. Le transport est sur-diffusif ($z < 2$) pour $d < 4$ et normal pour $d \geq 4$.

Tous ces travaux semblent aboutir à la conclusion suivante. Le mécanisme de transport à l'échelle *microscopique* est clairement *singulier* de par la présence de seuils. Cela induit un transport *mésoscopique anormal*, avec un exposant $z < 2$. Par *mésoscopique* on entend le transport moyen sur des échelles de temps de l'ordre de la durée moyenne d'une avalanche et sur des échelles de longueur de l'ordre du rayon moyen d'une avalanche. Enfin, le transport *macroscopique*, sur des échelle de temps beaucoup plus longues que la durée d'une avalanche ou, de manière équivalente correspondant à une moyenne sur un grand nombre d'avalanches, lui, est *normal*. Malheureusement, ce résultat assez étonnant n'est justifié que de manière qualitative. Dans la section 4.2.8, je montre comment on peut obtenir une image claire et quantitative du transport à toutes les échelles en étudiant le spectre de Lyapunov du modèle de Zhang, ce spectre jouant un rôle similaire au spectre de Kolmogorov dans la turbulence.

En 1992, Bántay et János [39] proposent une équation de diffusion singulière caractérisant la dynamique au sein d'une avalanche dans les modèles de BTW et Zhang:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) &= \Delta \Gamma[\rho(\mathbf{r}, t)] = \nabla \cdot [D(\rho(\mathbf{r}, t)) \nabla \rho(\mathbf{r}, t)] \\ &= D(\rho(\mathbf{r}, t)) \Delta \rho(\mathbf{r}, t) + D'(\rho(\mathbf{r}, t)) \|\nabla \rho(\mathbf{r}, t)\|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

où :

$$\Gamma[\rho] = f(\rho)H(\rho - \rho_c) \quad (4.6)$$

4. Il est facile de montrer mathématiquement que dans le modèle de Zhang, en dimension 1, toutes les avalanches se propagent jusqu'aux bords ou jusqu'à un site d'énergie nulle [Blanchard et col., 1999]. La dimension 1 a ceci de particulier que le nombre de sites sur les bords reste constant (égal à deux) quelle que soit la taille. La dissipation se faisant par les bords, l'énergie excédentaire est alors évacuée par "rebonds" successifs des avalanches sur les bords. Les sites recevant de l'énergie sont donc actifs essentiellement tout au long de l'avalanche (sauf à la fin) et l'effet de seuil ne joue, pour ainsi dire, pas.

et:

$$D(\rho) = f'(\rho)H(\rho - \rho_c) + f(\rho)H'(\rho - \rho_c) \quad (4.7)$$

$\rho(\mathbf{r}, t)$ est une variable d'état s'apparentant à la densité dans l'équation (4.2) ou à l'énergie dans le modèle de Zhang. f est une fonction dépendant du modèle ; $f(\rho) = cste$ dans le modèle BTW et $f(\rho) = \rho$ dans le modèle de Zhang. Enfin, H est la fonction de Heaviside correspondant à une réponse en tout ou rien, selon que ρ excède ou non un seuil critique ρ_c . Il s'agit donc d'une équation à prendre au sens des distributions.

Pour éviter (ou tenter d'éviter) les délicats problèmes que pose la singularité dans H , on peut travailler avec une fonction H_ϵ , telle que $H_\epsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{x}{\epsilon})$, convergeant, au sens des distributions, vers H quand $\epsilon \rightarrow 0$. On calcule les propriétés du modèle pour $\epsilon > 0$ et on fait ensuite tendre ϵ vers zéro. On discute de cette procédure un peu plus bas. L'intérêt est par ailleurs de pouvoir donner un sens physique aux termes de l'équation (4.5). En effet, le coefficient de diffusion $D_\epsilon(\rho)$ et sa dérivée ont alors la forme indiquée⁵ dans la figure 1. On distingue trois régions grossières dans cette courbe. Pour $\rho \ll \rho_c$ (région sous-critique) ce coefficient est nul, et donc le courant local est nul. Pour $\rho \gg \rho_c$ (région sur-critique) $D_\epsilon(\rho)$ est une constante et on a diffusion normale. Enfin, pour $\rho \sim \rho_c$ (région critique) on a un coefficient très grand, de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon}$ qui correspond donc à une diffusion très rapide sur une échelle de temps de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. On voit par ailleurs sur la figure 1 qu'à "l'interface" entre la région sous-critique et la région critique, $D'_\epsilon(\rho) > 0$. Donc le terme $D'_\epsilon(\rho(\mathbf{r}, t)) \|\nabla \rho\|^2$ est positif et fait croître ρ en "le poussant" vers la région critique. Au contraire, à l'interface entre la région critique et sur-critique ce terme est négatif, donc ρ décroît et est aussi poussée vers la région critique. La présence d'un seuil non linéaire induit donc deux phénomènes antagonistes : diffusion dans la région critique et flux dirigé vers la région critique. Si maintenant on considère l'évolution d'un profil initial $\rho(\mathbf{r}, 0)$ tel

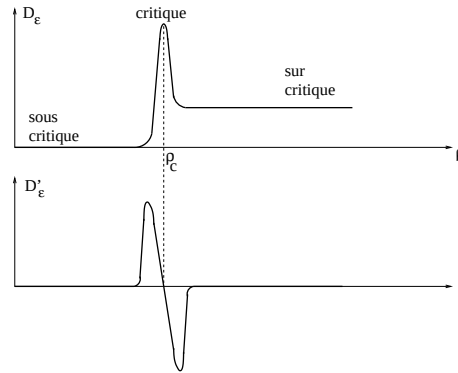


FIG. 1 – Coefficient de diffusion $D(\rho)$ dans l'équation (4.5), pour le modèle de Zhang.

qu'il existe une région (connexe) $\Lambda_c(0) = \{\mathbf{r} \mid \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_c\}$, on voit que cette région va croître au cours du temps, ce qui correspond bien sûr à la propagation d'une avalanche. Bántay et Jánosi étudient alors l'évolution des interfaces entre régions et proposent une solution analytique en dimension 1. Ils obtiennent la vitesse de propagation du front comme solution d'une équation différentielle ordinaire et montre que la région critique croît comme $t^{\frac{1}{3}}$, valeur différente de celle de l'exposant z . Ils concluent par ailleurs que l'état stationnaire correspond à une densité partout égale à la densité critique.

Les résultats de Bántay et Jánosi font intervenir plusieurs approximations et hypothèses et ne prennent pas en compte les effets de dissipation sur les bords et le terme d'injection. Par ailleurs, la limite singulière $\epsilon \rightarrow 0$ n'est pas discutée.

5. On a seulement tracé ici le coefficient $D_\epsilon(\rho)$ du modèle de Zhang.

En 1994, Díaz-Guilera [40] s'intéresse à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et au terme d'injection. Il étudie une version stochastique de (4.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = \Delta \Gamma[\rho(\mathbf{r}, t)] + \eta(\mathbf{r}, t) \quad (4.8)$$

où η est un bruit blanc en espace et temps, de moyenne nulle. De nouveau donc, on ne traite pas les effets de bords et le bruit η inclut l'injection et la dissipation, la condition $\langle \eta \rangle = 0$ assurant la stationnarité du processus. En considérant une version régularisée de la fonction de Heaviside Díaz-Guilera écrit l'équation (4.8) sous la forme d'un développement en série dans le paramètre ϵ . En utilisant les techniques du groupe de renormalisation dynamique il étudie alors l'action d'un changement d'échelle sur ces coefficients. Tronquant la série au plus bas ordre non-linéaire il obtient alors une expression approchée pour le coefficient de diffusion anormale, ainsi que les exposants de diffusion et de rugosité⁶. Il conclut par ailleurs que ces exposants sont identiques dans les modèles de BTW et Zhang. Notons que l'auteur ne considère pas la contribution des termes d'ordre supérieurs sur les temps longs et les grandes échelles, bien qu'il conclue par ailleurs que tous les termes non linéaires ont la même importance [Volchenkov et col., 2002].

La quête de l'universalité. Très rapidement est apparue la nécessité de classifier les modèles de criticalité auto-organisée. L'analogie de ce phénomène avec un phénomène critique autorisait un rapprochement conceptuel avec la classification des systèmes critiques par leurs exposants critiques. Cependant, la criticalité auto-organisée est, par essence, un phénomène hors-équilibre et il n'est a priori pas possible de construire, dans les modèles proposés, un formalisme thermodynamique avec mesure de Gibbs et énergie libre. Par ailleurs, il y a pas de paramètre de contrôle à ajuster pour être au point critique, et on ne peut donc pas, *a priori*, étudier le comportement en loi de puissance de fonction tels l'aimantation ou la susceptibilité au voisinage du point critique, comme en physique statistique.

On assiste alors à différentes propositions pour classifier les modèles. On a vu ci-dessus que certains auteurs calculent des exposants de renormalisation tels l'exposant dynamique z , l'exposant de rugosité χ , et, éventuellement, l'exposant d'anisotropie ζ . Par ailleurs, dans [36], Bak et Tang essaient de clarifier le lien avec les phénomènes critiques tout en insistant sur le fait que leur classification décrit des propriétés *dynamiques*. Ils proposent d'identifier le flux de grain (ou d'énergie) j à travers le système comme un *paramètre d'ordre*. La pente moyenne θ , elle, est considérée comme un paramètre de contrôle: il existe une valeur critique θ_c en dessous de laquelle il n'y a de flux que si l'on injecte un courant extérieur h (analogue formel d'un champ externe), et au dessus de laquelle il y a un flux spontané. Cela permet à ses auteurs de définir formellement l'analogie des exposants $\beta, \gamma, \nu, \sigma, \delta$ par:

$$j \sim (\theta - \theta_c)^\beta \quad (\text{cf. aimantation}) \quad (4.9)$$

$$\chi \sim (\theta - \theta_c)^{-\gamma} \quad (\text{susceptibilité}) \quad (4.10)$$

$$\xi \sim (\theta - \theta_c)^{-\nu} \quad (\text{longueur de corrélation}) \quad (4.11)$$

$$s_{co} \sim (\theta - \theta_c)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (\text{cut-off}) \quad (4.12)$$

$$j(\theta = \theta_c) \sim h^{\frac{1}{\delta}} \quad (\text{aimantation en fonction du champ extérieur}) \quad (4.13)$$

6. L'auteur suppose une loi d'échelle de la fonction de corrélation de la forme:

$$\langle (E(\mathbf{r}, t) - E(\mathbf{0}, t))^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sim r^\chi f\left(\frac{t}{r^z}\right)$$

où χ est l'exposant de rugosité et z l'exposant de diffusion anormale.

Dans les équations (4.11,4.12) ξ correspond au cut-off⁷ dans la loi de probabilité des rayons d'avalanches, alors que s_{co} est le cut-off dans la loi de probabilité des *tailles* d'avalanches. Ces deux quantités sont liées par la relation $s_{co} \sim \xi^D$, D étant appelée "dimension fractale". Bak et Tang trouvent des relations naturelles entre ces quantités et en déterminent d'autres numériquement pour le tas de sable. A noter qu'on suppose implicitement que le paramètre θ_c peut-être ajusté "à la main". Par ailleurs, les effets de taille finie n'apparaissent pas dans ce formalisme. Ce travail, peu cité, a néanmoins l'intérêt de tenter de donner une définition canonique de la notion d'universalité dans les systèmes critiques auto-organisés.

On trouve plus fréquemment dans la littérature une autre façon de définir les classes d'universalité. On se donne un certain nombre de grandeurs caractérisant une avalanche (taille, durée, extension spatiale) et on étudie la loi de probabilité associée. Celle-ci étant, de par l'essence même du paradigme, une loi de puissance, l'idée est alors de caractériser la distribution de probabilité par l'exposant de la loi de puissance, qu'on appelle dans ce contexte *exposant critique* de l'observable. On peut alors proposer une classification des modèles à partir de ces exposants, auxquels on peut ajouter des exposants tels que l'exposant de diffusion anormale z , l'exposant de rugosité, etc...

Malheureusement, à mon sens, toutes ces méthodes de classification se heurtent à plusieurs problèmes de fond:

1. En l'absence de cadre thermodynamique on ne sait pas a priori quels sont les observables pertinents pour caractériser complètement la "physique" du système. On n'a pas en particulier l'équivalent d'une énergie libre. On choisit alors un ensemble d'observables *ad hoc*, mais rien ne permet d'affirmer que la connaissance de la loi d'échelle de ces observables (resp. l'exposant critique associé) suffise à classer le modèle. Plus exactement, l'approche du groupe de renormalisation est particulièrement féconde en physique statistique parce qu'on sait *ce qu'il faut renormaliser*. On peut adapter les techniques de renormalisations aux modèles SOC et calculer un certain nombre d'exposants ainsi. Mais il n'y a a priori aucun principe assurant que les observables choisis sont suffisants.
2. Bien sûr, en glissant sur le sens du mot "universalité", on peut simplement prendre comme définition d'une classe d'universalité quelque chose comme: "deux modèles sont dans la même classe d'universalité si les exposants critiques des observables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont identiques". Outre le problème que la définition devient alors auteur dépendante, on se heurte de plus à un obstacle encore plus ennuyeux: le calcul des exposants lui-même. D'une part, on ne sait en calculer analytiquement que quelques-uns, dans des cas particuliers. Pour le reste on procède de manière numérique. Il y a alors à des difficultés sérieuses dont je discute ci-dessous.
3. En définitive je n'ai pour ma part pas réussi à extraire de la littérature une définition canonique de ce qu'est une classe d'universalité. Plus ennuyeux, la définition même *de ce qu'est la criticalité* dans ces modèles dépend des auteurs, et il reste encore, me semble-t-il, à en donner une définition "universelle".

En conclusion il y a, à mon sens, dans la terminologie "classe d'universalité" un manque de définition claire, et ce mot revêt, chez certains auteurs, un aspect incantatoire gênant. Il se fonde sur un postulat caché basé sur une analogie tacite avec les phénomènes critiques usuels, analogie admise, paradoxalement, en même temps que l'idée que les systèmes critique auto-organisés, hors-équilibre et non thermodynamiques, nécessitent un cadre nouveau pour les analyser.

Résultats numériques. Dans la majeure partie des publications concernant les modèles de criticalité auto-organisée les simulations numériques jouent un rôle essentiel. Elles ont l'avantage de permettre

7. Ce mot-là n'est pas français mais je propose de l'inclure dans le dictionnaire au même titre que week-end et sandwich. La même proposition tient aussi pour le terme skew-product utilisé plus bas.

d'explorer de nombreuses possibilités et de mettre en évidence des comportements nouveaux et parfois inattendus. Le numérique est en particulier l'instrument majeur pour calculer les exposants critiques. Malheureusement, on se heurte là à un problème délicat, tout à fait analogue au ralentissement critique dans les simulations numériques au voisinage d'une transition de phase du second ordre. Le postulat fondamental dans le paradigme de la criticalité auto-organisée est l'existence d'un (unique) régime stationnaire caractérisé par des lois de puissance, dans un système *infini*. A taille finie on a clairement des effets de troncature dans la loi de puissance, dus aux bords. La question centrale est : comment caractériser ces effets et quantifier la dépendance en taille ? Il est en effet fondamental de répondre précisément à cette question si l'on souhaite déterminer numériquement et sérieusement un exposant critique. Très tôt Kadanoff et ses collaborateurs [41] se sont intéressés à cette question dans les modèles de criticalité auto-organisée. Ils proposent ainsi différentes formes de lois d'échelle pour les lois de probabilités. La forme la plus immédiate ou "finite-size scaling" consiste à écrire la loi de probabilité d'un observable (génériquement noté n), dans un système de taille finie, sous la forme :

$$P_L(n) = n^{-\tau} g\left(\frac{n}{\xi_L^n}\right), \quad n = 1 \dots \xi_L^n \quad (4.14)$$

g est une fonction ne dépendant pas de L , et décroissant plus vite qu'une puissance de n (voir [Cessac & Meunier, 2002]). ξ_L^n , correspondant à la valeur maximale que l'observable n peut avoir dans un réseau de taille L est de la forme $\xi_L^n = cL^{\beta_n}$, où β_n est un nouvel exposant caractéristique (parfois appelé "dimension fractale" de l'observable n). Il est aisé d'obtenir l'exposant critique et l'exposant d'échelle par le calcul de deux premiers moments de la loi de probabilité. Ces deux exposants déterminent alors la classe d'universalité de $P_L(n)$.

Kadanoff et ses collaborateurs proposent par ailleurs une autre forme de loi d'échelle, qu'ils appellent "multifractale" :

$$P_L(n) = L^{f(\log n / \log L)} \quad (4.15)$$

où f ne dépend pas de L . Dans ce cas, on a tout un spectre d'exposant d'échelle et la classe d'universalité de $P_L(n)$ est définie par la fonction f . Ces auteurs parlent alors de "représentation" $f - \alpha$, α étant $\frac{\log(n)}{\log(L)}$. D'autres formes ont été proposées depuis [42]. On trouvera un exposé sur ces notions dans l'article [Cessac & Meunier, 2002] de l'annexe B.

On a en fait assisté à une évolution quand à la notion "de quel scaling s'appliquait à quel modèle". Si initialement il semblait y avoir un consensus autour du finite size scaling, des voix se sont ensuite élevées affirmant que des simulations numériques plus poussées, et/ou une méthodologie nouvelle montraient un comportement d'échelle plus complexe, multifractal, ou autre [43, 44]. Il est cependant remarquable de constater que ces résultats ont été obtenus sur des systèmes de plus en plus grands, mais sans considération des effets *de biais* que la procédure numérique induisait sur la probabilité empirique. Une partie de l'article [Cessac & Meunier, 2002] de l'annexe B est consacrée à ce problème. Nous montrons en particulier que, générant numériquement une distribution de probabilité obéissant à (4.14), les biais numériques peuvent finalement nous donner une distribution empirique violant cette loi d'échelle !! En substance, notre conclusion est donc : "On ne peut rien conclure sur les lois d'échelle à partir des simulations si le nombre d'échantillons utilisés pour le calcul de la probabilité empirique n'est pas beaucoup plus grand qu'une fonction qui croît algébriquement avec la taille du système". Le point que nous mettons en évidence, et qui ressemble fort aux problèmes numériques de ralentissement critique, n'a, à ma connaissance, jamais été discuté avant nous dans le contexte de la criticalité auto-organisée.

Qu'est-ce qui "fait" la criticalité auto-organisée ? Comme je le dis plus haut cette question n'a, à ma connaissance, pas de réponse générale et définitive. Néanmoins, un certain nombre de mécanismes

générateurs ont été mis en évidence. Didier Sornette a notamment publié un certain de travaux importants sur ces mécanismes [45], en montrant notamment un mécanisme ingénieux de rétroaction entre le paramètre d'ordre (courant) et le paramètre de contrôle (pente). Je ne m'appesantirai pas sur ces mécanismes. Je citerai seulement un article important de Vespignani et ses collaborateurs [46], car notre approche permet de retrouver ces résultats par l'analyse en termes de système dynamique du modèle étudié dans la section 4.2. Ces auteurs proposent une approche de champ moyen dans un modèle avec deux paramètres de contrôle : le taux d'injection d'énergie par site h , et l'énergie dissipée par site critique ϵ . Dans leur modèle ces paramètres sont fixés et ne dépendent pas de la taille. Ils s'intéressent alors aux régimes obtenus lorsque l'on fait varier ces paramètres "à la main". En utilisant une approximation de champ moyen, ils concluent que pour obtenir un régime critique il est nécessaire d'avoir la triple condition

$$h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0, \rho = \frac{h}{\epsilon} \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

qui correspond à une séparation des échelles de temps d'injection $\frac{1}{h}$ et de dissipation $\frac{1}{\epsilon}$ (condition d'adiabaticité). Cela signifie que dans leur modèle, qui se veut générique, il est nécessaire d'ajuster des paramètres pour avoir un comportement critique. Cela peut sembler mettre à mal le concept de criticalité auto-organisée. Il n'en est en fait rien⁸. Nous montrons ainsi que dans le modèle de Zhang on peut introduire l'analogue des paramètres h, ϵ . Mais là, ce ne sont pas des paramètres indépendants. Ils sont bel et bien *fixés par la dynamique et dépendent de L* . Nous montrons dans [Cessac et col., 2001] et dans la section 4.2.7 que la condition (4.16) est effectivement vérifiée dans le modèle de Zhang, mais c'est *la dynamique et en particulier la condition d'adiabaticité dans la définition* qui impose naturellement cette condition. En quelque sorte les paramètres s'ajustent "d'eux-mêmes" lorsque $L \rightarrow \infty$, ce qui correspond bien au paradigme de criticalité auto-organisée. Cela a également des effets intéressants sur la dynamique, effets que nous analysons dans la section 4.2.8.

Vespignani et ses collaborateurs interprètent par ailleurs ρ comme un paramètre d'ordre. Il correspond à la probabilité qu'un site soit actif. Ils assimilent alors naturellement la quantité:

$$\chi(h) = \frac{\partial \rho}{\partial h} \quad (4.17)$$

à une susceptibilité caractérisant la réponse du système à une variation dans le taux d'injection. Ils en concluent en particulier que $\chi(h)$ se comporte comme la taille moyenne d'une avalanche, laquelle diverge lorsque $h \rightarrow 0$. Ils en déduisent alors un exposant caractéristique. Nous avons développé un résultat similaire pour une version non conservative du modèle de Zhang [Cessac et col., 2002 a]. Nous disons quelques mots sur la susceptibilité dans le modèle de Zhang dans la section 4.2.7.

Conclusion. Comme je l'ai dit en préambule, il ne s'agit pas ici de faire une présentation exhaustive du domaine mais simplement de situer le travail présenté. Je m'arrête donc ici. Cela signifie que je laisse de côté nombre de très beaux résultats numériques et analytiques, tels que l'approche par le groupe de renormalisation de Pietronero et collaborateurs [47], l'application de la théorie de Galois au modèle de Dhar [27], ainsi que de nombreux résultats mathématiques intéressants obtenus notamment par le groupe de C. Maes, R. Meester, F. Redig, [48, 49] etc...

8. Dans les systèmes réels on peut utiliser l'argument que l'échelle de temps de relaxation des contraintes (moralement similaire à la dissipation dans le modèle de Vespignani et collaborateurs), dans un tremblement de terre par exemple, est beaucoup plus courte que le temps caractéristique de mouvement des plaques tectoniques (terme d'entretien ou d'injection)

4.2 Le modèle de Zhang.

En 1996, alors que j'étais en post-doc à Bielefeld (Allemagne) nous avons débuté avec Ph. Blanchard (Université de Bielefeld) et T. Krueger (Université technique de Berlin) une collaboration destinée à analyser les systèmes critiques auto-organisés par la théorie des systèmes dynamiques. Nous avons consacré une bonne partie de nos efforts au modèle de Zhang [23, 24] car il présente une grande richesse, certes en tant que système critique auto-organisé, mais aussi en tant que système dynamique, exhibant un “régime critique” à la limite thermodynamique. L'objectif de cette collaboration était donc double. Il s'agissait d'une part de définir un cadre analytique dans lequel ce modèle de criticalité auto-organisé pouvait être étudié, en vue de lever certains des problèmes ouverts discutés plus hauts:

1. Peut-on expliquer, en termes de systèmes dynamiques, à quoi correspond le régime “critique” attendu dans le modèle de Zhang lorsque l'on fait tendre la taille du système vers l'infini? Peut-on lier les caractéristiques des distributions d'avalanches à des propriétés dynamiques?
2. Peut-on caractériser le transport aux différentes échelles, et comprendre quantitativement l'image d'un transport anormal au sein d'une avalanche et normal sur des échelles de temps beaucoup plus longues que la durée d'une avalanche. Peut-on, à partir des équations de la dynamique microscopique caractériser le transport anormal (en particulier calculer l'exposant de diffusion)?
3. La terminologie de la criticalité auto-organisé est clairement issue de la mécanique statistique des phénomènes critiques (“exposant critique”, “paramètres d'ordre”, “classes d'universalité”, etc ...) bien qu'il soit en même temps admis que ces systèmes sont hors-équilibre, sans hamiltonien, et donc sans distribution de Gibbs. Est-il néanmoins possible de construire un cadre pour les systèmes critiques auto-organisés, similaire à la mécanique statistique, où le rôle des distributions de Gibbs serait joué par des mesures plus générales et dynamiquement pertinentes?
4. Est-il possible d'avoir un contrôle analytique sur l'extrapolation vers la limite thermodynamique des données numériques ainsi que sur les biais induits par la simulation numérique?

Ces questions conduisaient naturellement à une problématique plus large, dépassant largement le cadre de la criticalité auto-organisée, puisqu'il s'agissait de comprendre les liens entre la dynamique microscopique d'un modèle et le comportement macroscopique exhibé. De fait, nous avons montré que le modèle de Zhang émerge au club très restreint [50, 51] des systèmes dynamiques hors-équilibre pour lesquels on sait passer effectivement de la dynamique microscopique à la dynamique macroscopique par le biais de la théorie ergodique et de la mécanique statistique, et pour lequel on sait notamment caractériser des propriétés de transport macroscopique en termes de quantités microscopiques. Cette partie contient un résumé de nos principaux résultats et quatre articles originaux sont inclus en appendice. Il y a malheureusement une certaine inhomogénéité de notations entre ces quatre articles. Je me donc suis efforcé, dans ce chapitre, de restructurer nos résultats en vue d'en donner une présentation cohérente.

4.2.1 Modèle.

Le modèle de Zhang est défini sur un “réseau fini” ou boîte, de dimension d , $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, et de bord $\partial\Lambda$. Sans perte de généralité on considérera une boîte carrée de côté L . De cette façon on caractérisera la taille de la boîte par un unique paramètre L . On note $N = L^d$ le nombre de sites de Λ . On se donne une énumération $i = 1 \dots N$ des sites de Λ . Chaque site i est caractérisé par un nombre X_i réel positif, traditionnellement appelé *énergie*. Sur le bord $\partial\Lambda$ l'énergie de tous les sites est constamment nulle. Comme expliqué plus bas, cela correspond, dans la modélisation, à un phénomène de dissipation de l'énergie sur les bords. Une *configuration* d'énergie est un vecteur $\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{X_i\}_{i \in \Lambda}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$. Dans $\mathbb{R}^N$ on appelle $\mathbf{e}_i$, $i \in \Lambda$, les vecteurs de la base canonique, en sorte que la projection de $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{e}_i$ est X_i . On appelle *énergie totale* de la configuration $\mathbf{X}$ la quantité :

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}) = \sum_{i \in \Lambda} X_i \quad (4.18)$$

On considérera des configurations initiales d'énergie totale finie. La propriété de contraction 2 (section 4.2.6) entraîne alors que la dynamique reste confinée dans un ensemble compact $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$.

On se donne un paramètre réel $E_c > 0$ appelé *énergie critique* ou *seuil de relaxation*. Les sites tels que $X_i < E_c$ sont qualifiés de *stables* et les sites tels que $X_i \geq E_c$ sont dits *actifs* ou instables. Une configuration d'énergie est dite *stable* si $\forall i \in \Lambda, X_i < E_c$ et *instable* dans le cas contraire. On appelle $\mathcal{M} = [0, E_c]^N$ l'ensemble des configurations stables et $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$ l'ensemble des configurations instables. La dynamique est à temps discret et synchrone. Son action sur $\mathbf{X}$ est différente selon que $\mathbf{X}$ est stable ou instable. Si $\mathbf{X}$ est stable on a une dynamique d'*excitation* et si $\mathbf{X}$ est instable une dynamique de *relaxation*.

Dynamique d'excitation. Soit q_L une mesure de probabilité⁹ sur Λ . Soit $\delta > 0$ un paramètre appelé *quantum d'excitation*. Si $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$, la dynamique d'excitation consiste à choisir un site $i \in \Lambda$ au hasard, avec probabilité $q_L(i)$, et à ajouter δ à l'énergie du site i . Soit :

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{e}_i \delta \quad (4.19)$$

Notons que dans le modèle initial de Zhang, q_L est la loi uniforme $q_L(i) = \frac{1}{N}$, $\forall i \in \Lambda$. Nous étendons la définition à une probabilité quelconque. Cela nous donne ainsi une liberté supplémentaire pour étudier les propriétés du système, en l'excitant à notre convenance. On peut choisir d'exciter toujours le même site, ou d'injecter plus souvent de l'énergie dans une région que dans une autre, etc... Il est également important de noter que, dans ce modèle, la probabilité d'injecter de l'énergie en un point donné ne dépend pas du temps (le processus d'excitation qui "pilote" le système est *stationnaire*). Remarquons finalement que, dans le modèle initial, δ est une variable aléatoire, alors que nous considérons un quantum d'excitation constant. Étendre les résultats présentés dans cette partie au cas aléatoire ne pose pas de problème essentiel, mais alourdirait inutilement le formalisme.

Dynamique de relaxation. La dynamique de relaxation est une dynamique de diffusion singulière se produisant pour les configurations $\mathbf{X} \in \bar{\mathcal{M}}$. Lorsque l'énergie d'un site dépasse le seuil E_c , ce site redistribue une partie de son énergie démocratiquement sur ses voisins. Plus précisément on se donne un paramètre¹⁰ $\epsilon \geq 0$ et on pose $\alpha = \frac{1-\epsilon}{2d}$. Si X_i est actif il redistribue $\frac{1-\epsilon}{2d} X_i$ à ses $2d$ voisins et conserve ϵX_i . Il y a donc *conservation locale*¹¹ de l'énergie dans la dynamique de relaxation. X_i est donc mis à jour selon la règle:

$$X_i \rightarrow X_i [1 - (1 - \epsilon)H(X_i - E_c)] + \frac{1 - \epsilon}{2d} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} X_j H(X_j - E_c) \quad (4.20)$$

où H est la fonction de Heaviside :

$$H(x) = 0 \text{ si } x < 0; \quad H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0; \quad (4.21)$$

et où $\mathcal{V}(i)$ est le voisinage de i dans Λ (l'ensemble des sites à distance 1). La dynamique de relaxation est *synchrone*: lorsque plusieurs sites sont simultanément actifs ils sont mis à jour en parallèle. A noter que l'équation (4.20) inclut implicitement les conditions aux bords spécifiées plus haut. Dans toute la suite ces conditions ne seront plus explicitées mais elles seront implicites dans la définition de la dynamique.

9. Dans toute la suite l'indice L se rapporte à la taille du système.

10. Dans le modèle initial de Zhang ce paramètre est nul. On verra son intérêt plus bas.

11. Nous avons récemment introduit une version non conservative du modèle de Zhang [Cessac et col., 2002 a].

Il est utile d'écrire la dynamique de relaxation sous la forme suivante. Soit $\mathbf{Z}(\mathbf{X})$ le vecteur de composantes :

$$Z_i(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} H(X_i - E_c), \quad i \in \Lambda; \quad Z_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k \in \partial\Lambda \quad (4.22)$$

Donc $Z_i(\mathbf{X}) = 0$ si i est stable, et $Z_i(\mathbf{X}) = 1$ si i est actif. Soit $*$ le produit qui, à deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ associe le vecteur $\mathbf{w} = \mathbf{u} * \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, dont chaque composante w_i est le produit des composantes u_i, v_i . Soit enfin Δ la matrice du Laplacien discret sur Λ . On écrit la dynamique de relaxation comme l'itération de la *fonction de relaxation*:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \alpha \Delta [\mathbf{Z}(\mathbf{X}) * \mathbf{X}] \quad (4.23)$$

En termes de composantes :

$$F_i(\mathbf{X}) = X_i + \alpha \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} X_j H(X_j - E_c) - 2d\alpha X_i H(X_i - E_c) \quad (4.24)$$

qui est identique à (4.20). On voit clairement que la présence d'un seuil fait de l'équation (4.23) une équation de diffusion *singulière*¹² où le transport d'énergie ne s'effectue que via les sites actifs ($\mathbf{F}$ est l'identité si $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$), par un phénomène de réaction en chaîne. C'est bien sûr une composante essentielle des modèles de criticalité auto-organisée.

On a par ailleurs la condition de bord $X_i = 0, \forall i \in \partial\Lambda$. Lorsqu'un site voisin du bord relaxe, l'énergie cédée au bord est perdue, et on a donc *dissipation* par les bords. Cela entraîne la propriété suivante:

$$\forall \mathbf{X} \in \bar{\mathcal{M}}, \exists t < \infty, \text{ tel que } \mathbf{F}^t(\mathbf{X}) \in \mathcal{M} \quad (4.25)$$

où $\mathbf{F}^t$ est l'itéré t -i-ème de $\mathbf{F}$. Cela signifie simplement que toute configuration instable (d'énergie finie) redevient stable au bout d'un temps fini, par le processus de relaxation correspondant à une redistribution de l'énergie excédentaire. Une partie de celle-ci est éventuellement transportée jusqu'au bord, et ainsi dissipée. Notons cependant qu'une configuration peut redevenir stable même s'il n'y a pas de dissipation sur le bord (il suffit qu'après relaxation tous les sites aient une énergie inférieure au seuil). La propriété (4.25) implique par ailleurs que l'on peut donc prendre, sans perte de généralité, les configurations initiales dans $\mathcal{M}$.

En résumé la dynamique complète est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \in \mathcal{M} : \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{X} + \delta \mathbf{e}_a \quad (\text{excitation}) \\ \mathbf{X} \in \bar{\mathcal{M}} : \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (\text{relaxation}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Notons que la dynamique d'excitation est *aléatoire* alors que la dynamique de relaxation est *déterministe*. Par ailleurs, la définition de la dynamique (4.26) implique que l'addition d'énergie ne se produit que *lorsque tous les sites sont stables* (excitation *adiabatique*). Cette condition semble une condition nécessaire au phénomène de criticalité auto-organisée (voir eq. (4.16), section 4.1.2).

4.2.2 Avalanches

On caractérise la dynamique de relaxation par ses *avalanches*. Dans notre terminologie, une avalanche est le processus qui conduit, par la dynamique de relaxation, une configuration stable à la configuration stable suivante, après injection d'énergie. On caractérise alors une avalanche $\mathcal{C}$ par une liste d'ensembles :

12. Comparer avec l'équation (4.5).

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{C_1, \dots, C_t \dots C_{\tau(\mathcal{C})}\} \quad (4.27)$$

où:

$$C_t \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \Lambda \mid X_j(t) \geq E_c\} \quad (4.28)$$

est l'ensemble des sites actifs à la t -ième étape de l'avalanche, et où $\tau(\mathcal{C}) < \infty$, la *durée* de l'avalanche, est le plus petit nombre tel que $C_{\tau(\mathcal{C})+1} = \emptyset$. Dans cette définition le temps $t = 1$ est l'instant où l'on excite un site stable. Notons que la condition d'adiabaticité de l'excitation implique qu'une avalanche commence toujours par *un seul site actif*. La définition (4.27) inclut le cas où le site excité ne devient pas actif. Dans ce cas $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$. Dans le cas contraire $C_1 = \{i\}$ où i est le site excité.

La propriété (4.25) implique que toutes les avalanches ont une durée *finie* dans une boîte Λ finie. On a par ailleurs un nombre *fini* d'avalanches possibles dans une boîte finie. On peut donc également caractériser une avalanche par une paire d'indices (i, j) , où le premier indice fait référence au site initialement excité et $j = 1 \dots l(i)$ correspond à une énumération des avalanches possibles commençant par i , $l(i)$ étant le nombre total d'avalanches possibles¹³ commençant par i .

Il est aisé de voir [Blanchard et col., 1997, Blanchard et col., 2000] qu'à chaque avalanche (i, j) correspond un domaine convexe $\mathcal{M}_{(i,j)} \subset \mathcal{M}$. C'est l'ensemble des configurations d'énergie stables telles que l'excitation de i produit l'avalanche (i, j) . En effet, la définition (4.27) correspond à une suite hiérarchique d'inégalités associée à un arbre logique binaire. Ainsi, à l'étape 1, ayant fixé le site excité i , on n'a que deux possibilités. Ou bien $C_1 = \{i\}$ (i devient actif, ce qui correspond à $X_i + \delta \geq E_c$) ou bien $C_1 = \emptyset$ ce qui correspond à la condition $X_i + \delta < E_c$. D'un point de vue géométrique, l'égalité $X_i + \delta = E_c$ définit un hyperplan qui sépare (lorsque $E_c > \delta$) $\mathcal{M}$ en deux domaines convexes correspondant respectivement à des configurations d'énergie satisfaisant la condition $C_1 = \{i\}$, ou la condition $C_1 = \emptyset$. Si $C_1 = \emptyset$ il n'y a pas d'avalanche. Si $C_1 = \{i\}$, l'ensemble C_2 dans la définition (4.27) spécifie les sites qui relaxent à l'étape 2 (et par voie de conséquence ceux qui ne relaxent pas). Cela nous donne un nouvel ensemble d'inégalités du type:

$$X_k + \alpha(X_i + \delta) \begin{pmatrix} \geq \\ < \end{pmatrix} E_c, \quad k \in \mathcal{V}(i)$$

Pour chaque k l'égalité $X_k + \alpha(X_i + \delta) = E_c$ correspond à un hyperplan qui sépare $\mathcal{M}$ en deux domaines convexes associés respectivement au signe $<$ ou $\geq$. L'ensemble des configurations d'énergie correspondant à C_2 est une intersection de ces domaines. Cet ensemble est donc convexe. On procède ainsi itérativement en examinant les contraintes associées aux ensembles $C_3, \dots, C_{\tau(\mathcal{C})}$. On associe alors à chaque avalanche (i, j) un domaine convexe $\mathcal{M}_{(i,j)} \subset \mathcal{M}$. Par ailleurs, pour i fixé, les $\mathcal{M}_{(i,j)}$ forment une *partition* de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^{l(i)} \mathcal{M}_{(i,j)}; \quad \mathcal{M}_{(i,j)} \cap \mathcal{M}_{(i,k)} = \emptyset, \quad j \neq k \quad (4.29)$$

Bien sûr, la partition dépend de i . La structure hiérarchique des contraintes induit une structure hiérarchique sur les $\mathcal{M}_{(i,j)}$. Ainsi le domaine correspondant à des contraintes données $C_1, C_2, \dots, C_n$ contient tous les domaines correspondant aux contraintes $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots$. Donc plus le nombre de contraintes augmente plus le volume du domaine $\mathcal{M}_{(i,j)}$ diminue. En conséquence, les plus "grosses" avalanches correspondent au plus petit volume.

13. Ce nombre dépend des paramètres E_c, δ, ϵ , de la dimension du réseau d et de la taille du système L . Il diverge quand $L \rightarrow \infty$.

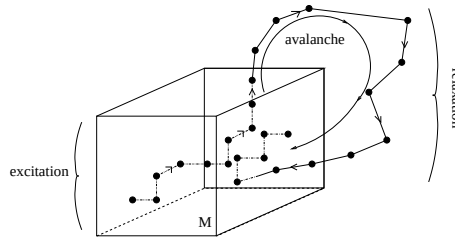


FIG. 2 – Dynamique du modèle de Zhang.

Ce procédé permet de classifier les configurations d'énergie en termes des avalanches qu'elles produisent lorsqu'elles sont excitées en un site donné. On utilise cette classification dans la section 4.2.11 pour définir un codage symbolique de la dynamique.

On définit maintenant un certain nombre d'observables d'avalanches. De manière générale on appellera *observable d'avalanche* une fonction n qui à une avalanche $\mathcal{C}$ associe un nombre $n(\mathcal{C})$. Les observables les plus utilisés sont la durée τ , l'aire a (nombre de sites *distincts* ayant relaxé dans l'avalanche), la taille :

$$s(\mathcal{C}) = \sum_{t=1}^{\tau(\mathcal{C})} \#C_t \quad (4.30)$$

(nombre *total* de sites ayant relaxé dans l'avalanche), le rayon de giration :

$$r(\mathcal{C}) = \sqrt{\frac{1}{s(\mathcal{C})} \sum_{i \in \mathcal{C}} [i - x(\mathcal{C})]^2} \quad (4.31)$$

où $x(\mathcal{C}) = \frac{1}{s(\mathcal{C})} \sum_{i \in \mathcal{C}} i$ est la barycentre de l'avalanche, etc ... On utilisera génériquement la lettre n pour un observable et on notera indifféremment $n(\mathcal{C})$ ou $n[(i,j)]$ pour la valeur de n dans l'avalanche correspondante. On notera enfin ξ_L^n la valeur maximale que l'observable n prend dans une système de taille L . Les grandeurs ξ_L^n sont finies pour L fini, mais on verra plus bas qu'elles *divergent* lorsque $L \rightarrow \infty$. Elles ont une interprétation physique essentielle. Rappelons que l'on injecte de l'énergie localement. ξ_L^a mesure l'extension spatiale maximale de l'avalanche induite par cette perturbation, ξ_L^s mesure cet effet en termes du nombre total de sites affectés et ξ_L^τ en terme de durée. La divergence de ces quantités indique clairement la présence d'un phénomène critique, puisqu'une perturbation locale peut induire une réponse macroscopique. Typiquement, $\xi_L^n \sim L^{\beta_n}$, et l'exposant β_n est une caractéristique de la loi de probabilité en taille finie (voir section 4.1.2).

4.2.3 Définition du système dynamique.

La dynamique d'une configuration $\mathbf{X}$ est caractérisée par la succession perpétuelle d'un intervalle de temps où $\mathbf{X}$ est stable et où l'on injecte de l'énergie pour le rendre instable, suivi d'un intervalle de temps où $\mathbf{X}$ est instable: on n'injecte plus d'énergie et l'énergie "excédentaire" est transportée dans le réseau par les avalanches, éventuellement jusqu'aux bords, jusqu'à ce que $\mathbf{X}$ redevienne stable, etc ... (voir la figure 2). L'évolution est donc entièrement déterminée par la configuration d'énergie initiale $\mathbf{X}$ et par la séquence (infinie) des sites excités au cours de l'histoire de $\mathbf{X}$.

Pour décrire le modèle de Zhang comme un système dynamique on introduit la notion de *séquence d'excitations* qui est la donnée des sites $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ que l'on va exciter successivement au cours de

l'histoire. Une séquence d'excitations, notée $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $a_i \in \Lambda$ est un élément de $\Sigma_\Lambda^+ = \Lambda^\mathbb{N}$ l'ensemble des séquences infinies à droite. On note $\sigma : \Sigma_\Lambda^+ \rightarrow \Sigma_\Lambda^+$ le *décalage à gauche*:

$$\sigma(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} (a_2, \dots, a_n, \dots) \quad (4.32)$$

Ce décalage nous permet de passer du n -ième site excité au $n + 1$ -ième, en prenant à chaque fois le premier symbole de la séquence. Par la suite on utilisera la conjugaison topologique¹⁴ entre le décalage $(\Sigma_\Lambda^+, \sigma)$ et l'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \rightarrow f(x) = Nx \bmod 1$. On notera $[\tilde{a}]_T \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{b} \in \Sigma_\Lambda^+ \mid b_1 = a_1, \dots, b_T = a_T\}$ l'ensemble des séquences de Σ_Λ^+ dont les T premiers symboles sont fixés (c'est donc un cylindre selon la définition donnée dans la note 14.).

L'espace de phase de notre système dynamique est $\Omega = \Sigma_\Lambda^+ \times \mathcal{D}$ et on note $\hat{\mathbf{X}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{a}, \mathbf{X})$ un point de Ω . La dynamique est donnée par l'application $\hat{\mathbf{F}}_\gamma : \Omega \rightarrow \Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \in \mathcal{M} \Rightarrow \hat{\mathbf{F}}_\gamma(\hat{\mathbf{X}}) &= (\sigma\tilde{a}, \mathbf{X} + \mathbf{e}_{a_1}\delta) & (excitation) \\ \mathbf{X} \in \bar{\mathcal{M}} \Rightarrow \hat{\mathbf{F}}_\gamma(\hat{\mathbf{X}}) &= (\tilde{a}, \mathbf{F}(\mathbf{X})) & (relaxation) \end{aligned} \quad (4.33)$$

qui définit complètement notre système dynamique. $\gamma = (E_c, \epsilon, \delta)$ est le vecteur des paramètres. On note en fait que E_c et δ ne sont pas indépendants. En effet les équations (4.26) sont inchangées si l'on divise $\mathbf{X}$ par δ et si l'on remplace E_c par $\frac{E_c}{\delta}$. Le paramètre $\frac{E_c}{\delta}$, appelé "rigidité locale", a été introduit par Cafiero et collaborateurs [52]. A part cela on a des contraintes sur les paramètres, telle que $0 < \epsilon < E_c$. On supposera par ailleurs que $E_c > \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$. On démontre en effet que sous cette condition un site ne peut relaxer deux fois de suite [Blanchard et col., 2000]. C'est une condition nécessaire à la démonstration de la proposition 1 ci-dessous. On supposera par ailleurs que $E_c < \infty$.

Il est naturel d'introduire les projections¹⁵ π^u et π^s telles que $\pi^u(\hat{\mathbf{X}}) = \tilde{a}$, $\pi^s(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{X}$. On note $\hat{\mathbf{X}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{F}}^t(\hat{\mathbf{X}})$, $\tilde{a}(t) = \pi^u(\hat{\mathbf{X}}(t))$ et $\mathbf{X}(t) = \pi^s(\hat{\mathbf{X}}(t))$. $\mathbf{X}(t)$ est donc la configuration d'énergie au temps t , issue de la configuration initiale $\mathbf{X}$, et où l'injection d'énergie se fait selon la séquence $\tilde{a} = \pi^u(\hat{\mathbf{X}})$.

Il est utile de définir la hiérarchie de temps *d'entrée* $\gamma_i(\hat{\mathbf{X}})$ dans $\mathcal{M}$ et de *sortie* $\sigma_i(\hat{\mathbf{X}})$ de $\mathcal{M}$:

$$\gamma_0(\hat{\mathbf{X}}) = 0 \quad (4.34)$$

$$\sigma_i(\hat{\mathbf{X}}) = \inf_{t > \gamma_{i-1}} \{\mathbf{X}(t) \in \bar{\mathcal{M}}\}, \quad i \geq 1 \quad (4.35)$$

$$\gamma_i(\hat{\mathbf{X}}) = \inf_{t > \sigma_i} \{\mathbf{X}(t) \in \mathcal{M}\}, \quad i \geq 1 \quad (4.36)$$

En termes d'avalanches, $\sigma_i(\hat{\mathbf{X}})$ (resp. $\gamma_i(\hat{\mathbf{X}})$) est le temps de départ (resp. le temps d'arrêt) de la i -ème avalanche se produisant lors de l'évolution de $\hat{\mathbf{X}}$ (Fig. 2). Le temps:

$$\tau_i(\hat{\mathbf{X}}) = \gamma_i(\hat{\mathbf{X}}) - \sigma_i(\hat{\mathbf{X}}) \quad (4.37)$$

14. Σ_Λ^+ a une structure topologique. C'est la topologie produit (théorème de Tychonov) qui est engendrée par les cylindres $\mathcal{C}_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1, \dots, n_k} = \{\tilde{a} \in \Sigma_\Lambda^+ \mid a_{n_i} = \alpha_i \ i = 1 \dots k\}$ (ensemble de séquences dont on a fixé k symboles). Le codage en base N permet d'associer à chaque séquence un nombre dans $[0, 1]$. La correspondance est biunivoque sauf pour une famille dénombrable de points, ceux qui ont plusieurs codes (ex: $\bar{0}$ et $\bar{1}$ en base 2). Cela définit un homéomorphisme h de Σ_Λ^+ privé de cette famille dans $[0, 1]$. Par ailleurs, $f = h \circ \sigma \circ h^{-1}$. D'autre part, $(\Sigma_\Lambda^+, \mathcal{F}_{\Sigma_\Lambda^+})$ est un espace probabilisable où $\mathcal{F}_{\Sigma_\Lambda^+}$ est la tribu engendrée par les cylindres. On dit que les systèmes dynamiques $(\Sigma_\Lambda^+, \mathcal{F}_{\Sigma_\Lambda^+}, \sigma, \mu_1)$ et $([0, 1], \mathcal{B}, f, \mu_2)$, où μ_1 (resp. μ_2) est invariante par σ (resp. f), sont *métriquement conjugués*, si h est un isomorphisme de $(\Sigma_\Lambda^+, \mathcal{F}_{\Sigma_\Lambda^+})$ dans $([0, 1], \mathcal{B})$ qui envoie μ_1 sur μ_2 .

15. Les exposants u, s signifient respectivement *unstable* et *stable* et seront justifiés plus bas.

correspond à la durée de la i -ième avalanche. Par ailleurs,

$$\omega_i(\hat{\mathbf{X}}) = \sigma_i(\hat{\mathbf{X}}) - \gamma_{i-1}(\hat{\mathbf{X}}) \quad (4.38)$$

est le nombre d'excitations entre la fin de l'avalanche $i - 1$ et le début de l'avalanche i . C'est le temps pendant lequel on injecte de l'énergie pour "alimenter" l'avalanche i .

On voit que la dynamique a une structure particulière. La dynamique de $\mathbf{X}$ dépend de $\tilde{a}$. La dynamique de $\tilde{a}$ ne dépend de $\mathbf{X}$ que par les temps $t \in [\gamma_i(\hat{\mathbf{X}}), \sigma_i(\hat{\mathbf{X}})]$, $i = 1 \dots \infty$ où le décalage σ est appliqué. La valeur des a_i , elle, est indépendante de $\mathbf{X}$. On a donc "presque"¹⁶ une structure de produit croisé (*skew product*). On verra dans la section 4.2.10 comment transformer le système dynamique pour qu'il devienne un produit croisé. Par ailleurs, la dynamique de $\tilde{a}$ sous l'action du système dynamique (4.33) est *intermittente*. On a l'action du décalage quand $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{M}$ et elle reste constante, sur des temps qui peuvent très long (taille de l'avalanche), lorsque $\mathbf{X}(t) \in \bar{\mathcal{M}}$. On note donc que le processus d'injection n'est certainement pas du bruit blanc. L'évolution de $\tilde{a}$ et de $\mathbf{X}$ correspond à deux processus couplés. La dynamique couplée de $\tilde{a}$ et de $\mathbf{X}$ est représentée dans la figure 3. C'est une représentation schématique puisque $\mathcal{M}$ est de dimension N .

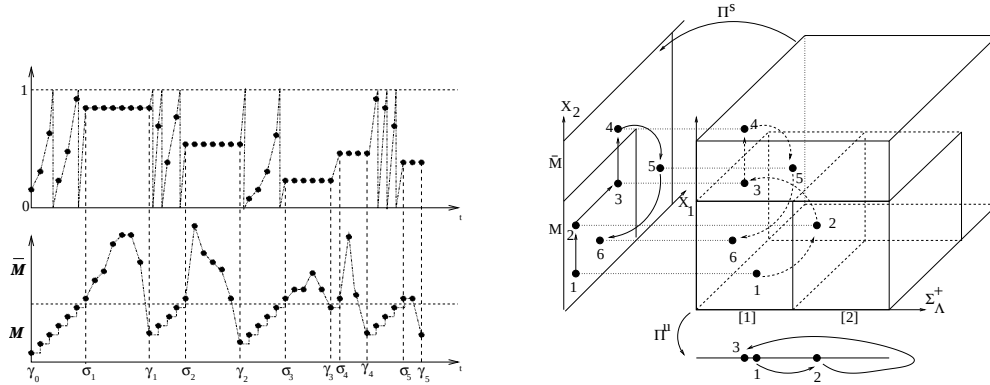


FIG. 3 — Représentation (schématique) du système dynamique (4.33). En haut à gauche : dynamique de $\tilde{a}$. En bas à gauche, dynamique de $\mathbf{X}$ (vue en dimension 1). A droite dynamique couplée pour $N = 2$ sites. $[1]$ (resp. $[2]$) est l'ensemble des suites qui commencent par 1 (resp. par 2).

On a vu dans la section 4.2.2 que chaque avalanche (i, j) correspond à un domaine $\mathcal{M}_{(i, j)} \subset \mathcal{M}$. Dans l'espace Ω , chaque domaine $\mathcal{M}_{(i, j)}$ correspond au domaine $\mathcal{P}_{(i, j)} \stackrel{\text{def}}{=} [i] \times \mathcal{M}_{(i, j)}$ où $[i]$ est l'ensemble des séquences d'excitations dont le premier symbole est i . Ainsi, par définition, tous les points $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{P}_{(i, j)}$ correspondent à une *unique* avalanche, l'avalanche (i, j) . La famille des $\mathcal{P}_{(i, j)}$ constitue une partition de $\Sigma_{\Lambda}^+ \times \mathcal{M}$. Nous appellerons *partition naturelle* pour des raisons qui apparaîtront dans les sections 4.2.10 et 4.2.11.

4.2.4 État stationnaire.

Cette section reprend un certain nombre de notions introduites dans le chapitre 1. L'idée sous-jacente au concept de criticalité auto-organisée (donc présente dans tous les modèles, pas seulement celui de Zhang) est la suivante. Il est implicitement supposé que on atteint asymptotiquement un état stationnaire, *indépendant* de la façon dont le système est préparé. Il convient alors de donner un sens précis à la notion d'état ainsi qu'à formuler, dans un langage de systèmes dynamiques, cette hypothèse.

16. On corrige ainsi une coquille de l'article [Cessac et col., 2001]. Les résultats présentés dans cet article sont néanmoins corrects puisqu'on utilise seulement l'indépendance de la séquence d'excitations vis-à-vis de la configuration d'énergie.

Cela nous conduira, dans cette section, à la conjecture 1. Par ailleurs, le régime asymptotique obtenu est hors-équilibre : le flux moyen d'énergie entrant est égal au flux moyen sortant par les bords. On observe de plus que l'état correspondant présente des caractéristiques remarquables (telles, bien sûr, qu'une statistique en loi de puissance pour les observables d'avalanches) que l'on étudiera tout au long de ce chapitre. Dans cette section on va d'abord donner une définition de l'état en termes de systèmes dynamiques, et examiner quelques unes de ses propriétés.

Comme on l'a argumenté dans la section 1.1 un état est une mesure de probabilité sur Ω . Ainsi l'état initial, caractérisant la façon dont le système est préparé, est une mesure de probabilité, $\hat{\mu}_L^{(0)}$, sur Ω . De même l'état à l'instant résultant de l'action de la dynamique sur $\hat{\mu}_L^{(0)}$ est la mesure $\hat{\mu}_L^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{F}}^{*t} \hat{\mu}_L^{(0)}$ donnée par :

$$\hat{\mu}_L^{(t)}[\mathcal{A}] = \hat{\mu}_L^{(0)}[\hat{\mathbf{F}}^{-t}(\mathcal{A})]$$

où $\mathcal{A}$ est un ensemble mesurable¹⁷ de Ω .

De même l'état stationnaire est une mesure de probabilité sur Ω caractérisant le comportement statistique des trajectoires en régime stationnaire. La condition de stationnarité correspond à l'invariance de l'état par la dynamique (4.33) c'est-à-dire :

$$\hat{\mu}_L(\hat{\mathbf{F}}^{-1}(\mathcal{A})) = \hat{\mu}_L(\mathcal{A})$$

Il existe en général une *infinité* de mesures invariantes [53] que l'on peut atteindre en changeant l'état initial.

La définition du modèle de Zhang suppose que les configurations d'énergie initiales et les séquences d'excitations soient indépendantes, donc que $\hat{\mu}_L^{(0)}$ ait la structure produit :

$$\hat{\mu}_L^{(0)} = \nu_L \times \mu_L^{(0)}$$

$\mu_L^{(0)}$ est la distribution initiale des configurations d'énergies. ν_L est la loi de probabilité des séquences d'excitations. Dans le modèle de Zhang, les sites excités sont choisis selon une loi de probabilité q_L , de manière indépendante. Par ailleurs q_L est indépendante du temps (le processus d'excitation est stationnaire). Cela signifie que ν_L est la *mesure de Bernoulli* de marginale q_L , c'est-à-dire la loi de probabilité sur $(\Sigma_\Lambda^+, \mathcal{F}_{\Sigma_\Lambda^+})$ qui associe à un cylindre $\mathcal{C}_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1 \dots n_k} = \{\tilde{a} \in \Sigma_\Lambda^+ \mid a_{n_i} = \alpha_i \ i = 1 \dots k\}$ la probabilité :

$$\nu_L[\mathcal{C}_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1 \dots n_k}] = \prod_{i=1}^N (q_L(i))^{m(i)} \quad (4.39)$$

où $m(i)$ est le nombre de symboles prenant la valeur i dans la suite finie $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. La condition de stationnarité du processus d'excitation correspond, du point de vue des systèmes dynamiques, à l'invariance de ν_L par l'action du décalage σ . De fait, on pourrait étendre la portée physique du modèle de Zhang en considérant des mesures plus générales que les mesures de Bernoulli : des mesures invariantes par σ mais où les sites excités ne sont pas indépendants. Cela correspondrait par exemple à introduire des effets de mémoire dans le processus d'excitation.

Ceci étant on pose :

$$\pi^u(\hat{\mu}_L^{(t)}) = \nu_L; \quad \pi^s(\hat{\mu}_L^{(t)}) = \mu_L^{(t)} \quad (4.40)$$

17. La structure produit impose en fait que les ensembles mesurables aient la forme $\mathcal{A} = \mathcal{C} \times \mathcal{B}$ où $\mathcal{C}$ est un ensemble mesurable de Σ_Λ^+ (cylindre) et $\mathcal{B}$ un ensemble mesurable de $\mathcal{D}$ (borélien).

et, respectivement:

$$\pi^u(\hat{\mu}_L) = \nu_L; \quad \pi^s(\hat{\mu}_L) = \mu_L \quad (4.41)$$

$\mu_L^{(t)}$ (resp. μ_L) est la loi marginale de $\hat{\mu}_L^{(t)}$ (resp. $\hat{\mu}_L$) sur les configurations d'énergies. Elle caractérise donc la distribution des configurations d'énergies à l'instant t (resp. en régime stationnaire). C'est essentiellement μ_L qui nous intéressera par la suite. La distribution de probabilité des séquences d'excitations étant invariante par la dynamique, la loi marginale de $\hat{\mu}_L^{(t)}$ sur Σ_A^+ est toujours ν_L , $\forall t$. En fixant ν_L , on fixe le processus d'injection d'énergie, et on fixe donc l'état stationnaire. Une excitation uniforme va produire un état où le transport d'énergie (loin des bords) est isotrope. En modifiant ν_L on peut briser cette isotropie et créer des courants d'énergie dirigés. On peut aussi créer un régime périodique en excitant périodiquement, etc ...

Ceci étant donné, la propriété minimale que l'état $\hat{\mu}_L$ doit avoir d'un point de vue physique est bien sûr l'*ergodicité* (eq. (1.6), section 1.1). On a vu dans la section 1.1 qu'un système dynamique sur un espace compact admet une infinité de mesures invariantes dont certaines sont ergodiques [53]. Par exemple une orbite périodique instable supporte une mesure ergodique et la moyenne temporelle le long de cet orbite obéit bien à (1.6) pour presque-toute condition initiale prise sur cette orbite. Or, on montre dans la section 4.2.6 que le système dynamique est hyperbolique. Il admet alors entre autres une infinité d'orbites périodiques instables, chacune portant une mesure ergodique et vers laquelle on peut converger en choisissant judicieusement la configuration d'énergie initiale et la séquence d'excitations (on peut par exemple prendre une séquence d'excitations périodique).

Cela nous montre qu'il *n'y a en général pas unicité de l'état stationnaire et que le régime asymptotique dépend de l'état initial* $\hat{\mu}_L^{(0)}$. Comme on ne peut donc pas espérer avoir la propriété de convergence vers une unique mesure invariante pour n'importe quel choix de l'état initial, il faut définir un critère pour choisir une "bonne" mesure. On a vu dans la section 1.1 que la mesure naturelle pour un physicien est la mesure de Sinai-Ruelle-Bowen. Il faut, dans le cadre du modèle de Zhang, en étendre quelque peu la définition. Dans ce cas, où la mesure d'excitations est imposée, nous dirons qu'une mesure $\hat{\mu}_L$ est ν_L *conditionnellement SRB* si¹⁸:

$$\hat{\mathbf{F}}^{*t}(\nu_L \times \mu_L^{(0)}) \xrightarrow{\text{faiblement}} \hat{\mu}_L, \text{ quand } T \rightarrow \infty \quad (4.42)$$

où $\mu_L^{(0)}$ est absolument continue [54].

Dans la littérature il est implicitement supposé (et pas contredit par les simulations numériques dans les régimes de paramètres explorés) que l'état stationnaire atteint de cette façon est *unique*. Cela signifie que la propriété (1.6) est vérifiée pour un ensemble de conditions initiales de mesure 1. On va donc par la suite faire la conjecture suivante.

Conjecture 1 *Pour L fini, il existe une unique mesure SRB pour le système dynamique (4.33), pour $d = 1, 2, 3$ et des valeurs génériques des paramètres E_c, ϵ, δ .*

Nous avons démontré cette conjecture dans le cas particulier où $d = 1$, $E_c \in [0, 1]$ (voir [Blanchard et col., 2000]). Nous discutons également dans cet article d'une méthodologie permettant de faire la preuve de l'ergodicité dans le cas général, mais en supposant que presque tous les points aient une variété stable locale suffisamment grande (voir la section 4.2.9).

18. On rappelle que cette définition suppose que la dynamique est topologiquement mélangeante. Plus généralement $\hat{\mu}_L$ est SRB si

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{F}}^{*t}(\nu_L \times \mu_L^{(0)}) \xrightarrow{\text{faiblement}} \hat{\mu}_L, \text{ quand } T \rightarrow \infty$$

Sous cette conjecture on appellera *état* l'unique mesure SRB de (4.33) et on la notera $\hat{\mu}_L$. Cette mesure contient toutes les informations relatives au régime stationnaire du modèle de Zhang. Elle joue en fait un rôle similaire à la distribution de Gibbs en mécanique statistique de l'équilibre avec toutefois deux différences essentielles. D'une part la dynamique sur les configurations d'énergie est hors équilibre, et d'autre part il n'y a pas, dans le modèle de Zhang, de fonction des configurations jouant le rôle de l'énergie¹⁹ ou du hamiltonien. En effet, la dynamique est non hamiltonienne et ce n'est pas une dynamique de gradient. On ne sait donc a priori pas écrire la mesure $\hat{\mu}_L$ sous la forme de Gibbs. On verra dans la section 4.3.2 que le formalisme thermodynamique de Sinai-Ruelle-Bowen permet néanmoins de définir une extension de la notion de mesure de Gibbs où l'opérateur dans l'exponentielle n'est pas le hamiltonien mais un opérateur dynamiquement pertinent.

Par la suite, le qualificatif “presque-sûrement” se rapportera à $\hat{\mu}_L$ ou, de manière équivalente à $\nu_L \times \mu_{Leb}$ où μ_{Leb} est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{D}$. On appellera point *générique* un point dans le support²⁰ de $\hat{\mu}_L$. On notera

$$\bar{\phi}_L = \int \phi d\hat{\mu}_L \quad (4.43)$$

la moyenne d'une fonction ϕ relativement à $\hat{\mu}_L$. A partir de $\hat{\mu}_L$ on définit ainsi toutes les grandeurs macroscopiques moyennes en régime stationnaire. On en définit un certain nombre dans la section suivante.

4.2.5 Grandeurs macroscopiques moyennes.

On appelle *taux d'injection* la probabilité d'exciter un site (injecter de l'énergie dans le système) à un instant donné, soit:

$$\bar{\omega}_L \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mu}_L(\mathcal{M}) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n(T, \hat{\mathbf{X}})} \omega_i(\hat{\mathbf{X}}) \quad (4.44)$$

où $\omega_i(\hat{\mathbf{X}})$ est défini dans l'équation (4.38) et où $n(T, \hat{\mathbf{X}})$ est le nombre d'avalanche ayant eu lieu sur les T premiers pas de temps de la trajectoire $\hat{\mathbf{X}}$.

La probabilité d'exciter le site i à un instant donné est $\hat{\mu}_L[\mathbf{X} \in \mathcal{M}, a_1 = i] = \bar{\omega}_L q_L(i)$. On note $\bar{\mathbf{h}}_L$ le vecteur de composantes :

$$\bar{h}_L(i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega}_L q_L(i) \delta \quad (4.45)$$

$\bar{h}_L(i)$ est donc l'énergie moyenne injectée par unité de temps au site i . On définit également :

$$\bar{h}_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{h}_L(i) = \frac{\bar{\omega}_L \delta}{N} \quad (4.46)$$

La probabilité que le site i soit actif à un instant donné est :

$$\rho_L(i) = \text{Prob}[X_i(t) \geq E_c] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mu}_L[\{\hat{\mathbf{X}} \mid X_i \geq E_c\}] \quad (4.47)$$

On note $\rho_L \stackrel{\text{def}}{=} \{\rho_L(i)\}_{i \in \Lambda}$ le vecteur correspondant. Il est appelé “densité de sites actifs” dans la littérature [46]. On introduit :

19. Le qualificatif “énergie” pour X_i n'est rien d'autre qu'un mot et la quantité (4.18) n'a aucune propriété dynamique particulière permettant de l'assimiler à une énergie physique.

20. $\hat{\mathbf{X}}$ est dans le support de $\hat{\mu}_L$ si tout ouvert contenant $\hat{\mathbf{X}}$ est de mesure positive.

$$\rho_L^{av} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda} \rho_L(i) \quad (4.48)$$

qui est la moyenne empirique des $\rho_L(i)$.

On définit également, à partir de $\hat{\mu}_L$, la distribution de probabilité $P_L(n)$ d'un observable d'avalanche n . Soit $\mathcal{P}_n$ l'union des domaines $\mathcal{P}_{(i,j)}$ (la définition de ces domaines est donnée dans la section 4.2.3) tels que $n[(i,j)] = n$. Alors :

$$P_L(n) = \hat{\mu}_L[\mathcal{P}_n] \quad (4.49)$$

On notera $\langle \cdot \rangle_L$ la moyenne relativement à P_L .

Les simulations numériques sur le modèle de Zhang [23, 55] montrent que, à partir d'un certain $n_0 > 0$, $P_L(n)$ est une loi de puissance tronquée pour les observables $n = a, s, \tau$. La troncature est due aux effets de bord et elle se réduit lorsque la taille augmente. Cela conduit donc à la conjecture suivante :

Conjecture 2 *Lorsque $L \rightarrow \infty$, $P_L(n)$ converge vers une distribution de probabilité $P^*(n)$ qui est une loi de puissance pour $n = n_0 \dots \infty$.*

On note :

$$P^*(n) = \frac{K}{n^{\tau_n}}, \quad n > n_0 > 0. \quad (4.50)$$

L'exposant τ_n est appelé *exposant critique* de l'observable n . K est une constante de normalisation.

Les extrapolations des mesures numériques indiquent que les exposants $\tau_a, \tau_s, \tau_\tau$ sont tels que

$$1 < \tau_n < 2 \quad (4.51)$$

Dans la section 4.2.10 nous montrons comment on peut interpréter cette inégalité, pour l'exposant de taille d'avalanche, en termes de la géométrie fractale de l'attracteur (plus exactement le support de $\hat{\mu}_L$). Il découle de la conjecture que ξ_L^n diverge lorsque $L \rightarrow \infty$. On montre en fait dans la section 4.2.8 que cette propriété peut être déduite des équations de transport. Par ailleurs les bornes sur l'exposant entraînent que, lorsque ξ_L^n diverge, $\langle n \rangle_L$ diverge également. L'état asymptotique lorsque $L \rightarrow \infty$ (dont on supposera l'existence) est donc caractérisé par une invariance d'échelle associée à la présence de loi de puissance, et à une divergence de la réponse locale à une perturbation.

4.2.6 Propriétés générales du système dynamique.

Nous nous intéressons maintenant de manière plus détaillée aux propriétés du système dynamique (4.33) avant de les relier aux propriétés de transport macroscopique dans la section suivante. On établit les résultats suivants [Blanchard et col., 1997, Blanchard et col., 1998, Blanchard et col., 2000].

1. Tout d'abord l'application de relaxation $\mathbf{F}$ est *linéaire et continue par morceaux*. Ceci est bien sûr dû à la présence de seuils dans la dynamique. L'ensemble de discontinuité de $\mathbf{F}$ est l'ensemble des points $\mathbf{X}$ tels que $\exists i \in \Lambda, X_i = E_c$. Ce sont les configurations d'énergie dans lesquelles au moins un des sites a une énergie *exactement égale* au seuil E_c . Ces points jouent un rôle fondamental dans la dynamique, puisque la plus infime perturbation d'un de ces points induit une évolution

21. On observe en effet une légère déviation à la loi de puissance pour des petits n . n_0 ne diverge apparemment pas quand $L \rightarrow \infty$.

différente (voir la section 4.2.9). Dans l'espace de phase Ω , l'ensemble de discontinuité de $\mathbf{F}$ correspond à ce que nous appelons l'*ensemble de singularité*:

$$\mathcal{S} = \left\{ \hat{\mathbf{X}} \in \Omega \mid \exists i \in \Lambda, X_i = E_c \right\} = \Sigma_{\Lambda}^+ \times \bigcup_{i=1}^N \mathcal{S}_i \quad (4.52)$$

où $\mathcal{S}_i$ est l'intersection de l'hyperplan $X_i = E_c$ avec $\mathcal{D}$. Par la suite on appellera $\Sigma_{\Lambda}^+ \times \mathcal{S}_i$ la i -ième *feuille* de $\mathcal{S}$. La présence de $\mathcal{S}$ est à la fois une source de complications mathématiques sérieuses, et une source de grande richesse physique (voir la section 4.2.9). Il y a cependant ici deux remarques importantes. D'une part le nombre de feuilles de singularité est *fini* quand L est fini. D'autre part, ces feuilles se *déplacent* continûment et parallèlement par variation de l'énergie critique E_c .

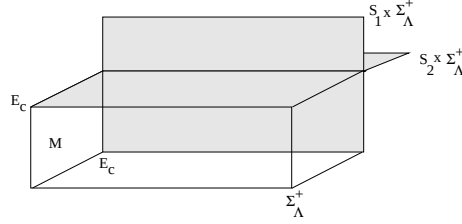


FIG. 4 – Ensemble de singularité pour $N = 2$.

- On note $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$, la matrice jacobienne²² de $\mathbf{F}$ au point $\mathbf{X}$. Comme $\mathbf{F}$ est linéaire par morceaux, cette matrice est tout à fait fondamentale puisque intimement liée au transport de l'énergie dans la dynamique de relaxation. En effet, la définition (4.20) indique clairement que $D\mathbf{F}_{\mathbf{X},ij}$, la composante i,j de $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$, caractérise le “flux”²³ d'énergie transporté de j vers i lors de la mise à jour de $\mathbf{X}$. De la même façon, l'application dérivée de $\mathbf{F}^t$, $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}^t$, caractérise les flux d'énergie en t pas de temps. Par la “chain-rule”, $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}^t = D\mathbf{F}_{\mathbf{X}(t)} \cdot D\mathbf{F}_{\mathbf{X}(t-1)} \dots D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$ et l'étude du transport sur des échelles de temps longues se ramène à l'étude de propriétés spectrales d'un produit de matrices $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}(t)}$ le long des trajectoires (voir la section 4.2.7). A noter que lorsque $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$, $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$ est l'identité.
- La conjugaison entre σ et $Nx \bmod 1$ permet par ailleurs de définir l'application dérivée $D\hat{\mathbf{F}}$ de $\hat{\mathbf{F}}$. Elle s'écrit comme une matrice $N + 1 \times N + 1$, ayant la structure bloc diagonale suivante:

$$D\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} b(\mathbf{X}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D\mathbf{F}_{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$b(\hat{\mathbf{X}})$ est un bloc de dimension 1×1 (donc un nombre) correspondant à la dynamique sur les séquences tel que $b(\mathbf{X}) = N$ si $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$ et $b(\mathbf{X}) = 1$ si $\mathbf{X} \in \bar{\mathcal{M}}$. Le second bloc est la matrice $N \times N$, $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$, correspondant à la dynamique de relaxation.

- La dynamique sur les séquences d'excitation est *dilatante* à chaque fois que $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$, puisque conjuguée à $Nx \bmod 1$, et neutre quand $\mathbf{X} \in \bar{\mathcal{M}}$. Cela correspond à une direction instable dans l'espace de phase avec un exposant de Lyapunov positif. En effet, l'exposant de Lyapunov $\lambda_L(0)$ associé à la dynamique de relaxation est donné par:

22. Pour les points de discontinuité, la définition (4.21) de la fonction de Heaviside permet de définir la dérivée “à gauche”, c'est-à-dire que l'on prend la limite à gauche sur chaque composante singulière. On supposera cependant ici que $\mathbf{X}$ est un point dont la trajectoire n'a pas d'intersection avec $\mathcal{S}$. Les effets de $\mathcal{S}$ sur la dynamique sont discutés dans la section 4.2.9.

23. C'est le rapport de l'énergie transporté de j vers i , soit $D\mathbf{F}_{\mathbf{X},ij}X_j$ sur l'énergie initialement en j , soit X_j .

$$\lambda_L(0) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(b(\mathbf{X}(t))) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \int \log(b(\mathbf{X})) d\mu_L(\mathbf{X}) = \bar{\omega}_L \log(N) \quad (4.54)$$

où $\bar{\omega}_L$ est le taux d'injection défini par (4.44). Donc, pourvu que $\bar{\omega}_L$ soit positif, $\lambda_L(0) > 0$. On montre par ailleurs (voir points suivants) que la dynamique de relaxation est contractante, ce qui signifie que $\lambda_L(0)$ est le *seul* exposant de Lyapunov positif. La relation (4.54) est très intéressante puisqu'elle lie une quantité physique caractérisant la dynamique macroscopique (taux d'injection) à une quantité microscopique caractérisant l'instabilité exponentielle des trajectoires. On a donc une forme traditionnelle de sensibilité aux conditions initiales dans le modèle de Zhang : une configuration d'énergie évolue différemment selon la séquence d'excitations qui lui est appliqué, et les trajectoires, dans l'espace étendu, se séparent localement. Cette forme de sensibilité aux conditions initiales est néanmoins assez triviale et a peu d'intérêt.

Si q_L est la loi uniforme, $\lambda_L(0)$ est également l'entropie de Kolmogorov-Sinai, notée h_{KS} , qui caractérise la vitesse à laquelle des trajectoires initialement indistinguables deviennent distinguables. Nous donnons une définition de l'entropie de Kolmogorov-Sinai (voir [56, 57, 53, 58] pour plus de détails). Soit $\mathcal{I}(\hat{\mathbf{X}}, T, \eta) = \left\{ \hat{\mathbf{Y}} \mid \forall 0 \leq t \leq T, d(\hat{\mathbf{X}}(t), \hat{\mathbf{Y}}(t)) < \eta \right\}$, l'ensemble des points dont la trajectoire est indistinguishable de celle de $\hat{\mathbf{X}}$, avec la résolution η , sur les T premiers pas de temps. Alors le théorème de Shannon-Mac Millan-Breiman établit que [56] :

$$\sup_{\eta > 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(\hat{\mu}_L \left[\mathcal{I}(\hat{\mathbf{X}}, T, \eta) \right] \right) = -h_{KS}$$

Cela signifie grosso-modo que $\hat{\mu}_L \left[\mathcal{I}(\hat{\mathbf{X}}, T, \eta) \right] \sim e^{-Th_{KS}}$. Donc si h_{KS} est positive la dynamique produit des trajectoires distinguables à vitesse exponentielle donnée par h_{KS} . La dynamique étant dilatante seulement dans la direction Σ_Λ^+ , l'entropie de Kolmogorov-Sinai est donnée par :

$$h_{KS} = -\bar{\omega}_L \sum_{i=1}^N q_L(i) \log [q_L(i)]$$

qui est égale à $\bar{\omega}_L \log(N)$ lorsque $q_L(i) = \frac{1}{N}$. L'effet de la dynamique d'excitation est donc d'injecter de l'entropie dans le système.

5. On montre que $\mathbf{F}$ est une *quasi-contraction*. Cela signifie que toutes les valeurs propres de $D\mathbf{F}_\mathbf{X}$ sont de module ≤ 1 . Plus précisément, pour chaque $\mathbf{X}$, on a la décomposition suivante :

$$\mathbb{R}^N = \mathcal{E}^-(\mathbf{X}) \oplus \mathcal{E}^0(\mathbf{X}) \quad (4.55)$$

$\mathcal{E}^-(\mathbf{X})$ est l'espace propre de $D\mathbf{F}_\mathbf{X}$ associé à des valeurs propres de module < 1 . On montre par ailleurs que $\mathcal{E}^-(\mathbf{X})$ est engendré par les vecteurs de la base canonique *correspondant à des sites actifs dans la configuration $\mathbf{X}$* . Donc, $\dim(\mathcal{E}^-(\mathbf{X})) = s(\mathbf{X})$, où $s(\mathbf{X})$ est le nombre de sites actifs dans la configuration $\mathbf{X}$ [Blanchard et col., 2000]. $\mathcal{E}^0(\mathbf{X})$ est un espace neutre dont toutes les valeurs propres sont égales à 1. Il est engendré par les vecteurs de la base canonique qui correspondent à des sites restant stables dans la configuration $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ (sites ne recevant pas d'énergie ou sites recevant de l'énergie sans pour autant devenir actifs).

6. Pour $\epsilon = 0$ (cas du modèle original de Zhang), on montre la présence d'un *noyau* dans la décomposition (4.55). En effet, le fait d'annuler l'énergie des sites actifs après relaxation implique que certaines colonnes (et lignes) de l'application tangente deviennent linéairement dépendantes. La dimension du noyau augmente lors de la composition des applications $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}(t)}$. Il est possible de majorer la dimension du noyau du produit de $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}(t)}$ le long de trajectoires typiques [Blanchard et col., 2000], voire de la calculer dans certains cas [Blanchard et col., 1999]. Quoi

qu'il en soit la présence de ce noyau est une source de complications inutiles. En effet, d'un point de vue physique, il n'y a rien qui impose à un site de perdre *toute* son énergie lors de la relaxation. L'introduction du paramètre ϵ nous permet de gagner un degré de liberté supplémentaire et de s'abstraire des problèmes de noyau, tout en gardant la physique sous-jacente.

7. Les propriétés de contraction de $\mathbf{F}$ sont liées aux sites actifs d'une autre façon. On démontre en effet la proposition suivante [Blanchard et col., 2000]:

Proposition 1 *Si $E_c > \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ alors le déterminant de $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$ est donné par:*

$$\det(D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}) = \epsilon^{s(\mathbf{X})} \quad (4.56)$$

où $s(\mathbf{X})$ est le nombre de sites actifs dans la configuration $\mathbf{X}$.

Ce résultat est tout à fait fondamental, puisqu'il lie la contraction dans l'espace de phase au nombre de sites actifs. De plus, par la chain-rule, on en déduit que la contraction en volume *au sein d'une avalanche $\mathcal{C}$* est donné par $\epsilon^{s(\mathcal{C})}$ où $s(\mathcal{C})$ est la *taille* de $\mathcal{C}$ (voir la section 4.2.10). La proposition 1 indique par ailleurs qu'il existe des directions où la contraction est très violente (elles correspondent en fait aux vecteurs engendrant le noyau lorsque $\epsilon = 0$).

8. Il est aisé de démontrer la propriété suivante [Blanchard et col., 2000].

Proposition 2 *Pour toutes valeurs du vecteur des paramètres γ , $N < \infty$, il existe un temps $t_0 < \infty$ tel que $\forall \hat{\mathbf{X}}, \forall t > t_0$, $\rho(D\mathbf{F}_{\hat{\mathbf{X}}}^t) < 1$.*

où $\rho()$ est le rayon spectral. Cette propriété signifie donc qu'après un temps suffisamment long, l'application $\mathbf{F}^t$ est *contractante* le long de toutes les trajectoires. On verra que la propriété de contraction est d'une part liée à la dissipation sur les bords (mais il peut y avoir contraction sans qu'il y ait dissipation), et d'autre part, qu'elle correspond à une perte d'entropie puisqu'elle conduit, asymptotiquement, à l'indistinguabilité de trajectoires initialement distinctes. Cette contraction n'est pas uniforme dans l'espace des $\mathbf{X}$ comme indiqué par le spectre de Lyapunov (voir Figure 2 dans l'article [Cessac et col., 2001]).

9. On rappelle la définition du spectre de Lyapunov. L'évolution de la norme euclidienne d'une perturbation infinitésimale autour de $\hat{\mathbf{X}}$ est donnée par la matrice $\hat{D}\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^t \cdot D\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^t$ où $\hat{D}\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^t$ est la transposée de $D\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^t$. Cette matrice a une structure en blocs (4.53) qui permet de séparer la partie excitation, correspondant comme on l'a vu plus haut à un exposant de Lyapunov positif, de la partie relaxation. On se concentre donc ici sur la matrice²⁴ $M(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{D}\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^t \cdot D\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^t$. Étant symétrique elle admet une base de vecteurs propres orthogonaux $\{\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{X}}, t)\}_{i=1}^N$ associés à des valeurs propres $\mu_i(\hat{\mathbf{X}}, t)$. Ces dernières caractérisent l'évolution en t pas de la norme d'une perturbation initialement dirigée selon $\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{X}}, t)$. Le théorème multiplicatif d'Oseledec [59] établit alors que, sous des conditions assez faibles²⁵, la limite:

$$\lambda_L(i) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log(\mu_i(\hat{\mathbf{X}}, t)) \quad (4.57)$$

existe presque-sûrement et elle presque-sûrement indépendante de $\hat{\mathbf{X}}$. Les $\lambda_L(i)$, $i = 1 \dots N$ sont les *exposants de Lyapunov* de la dynamique de relaxation. On convient d'ordonner ceux-ci selon la hiérarchie $\lambda_L(1) \geq \lambda_L(2) \geq \lambda_L(N)$. La proposition 2 indique que tous les $\lambda_L(i)$, $i = 1 \dots N$ sont *strictement négatifs* pour L fini. Une propriété générale de $M(\hat{\mathbf{X}}, t)$ est que chaque

24. Cette matrice dépend de $\hat{\mathbf{X}}$ et pas seulement de $\mathbf{X}$. En effet elle dépend de la *trajectoire* de $\mathbf{X}$ qui est conditionnée par la condition initiale et la séquence d'excitations.

25. $\int \log^+(\|D\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}\|) d\hat{\mu}_L < \infty$ et $\int \log^+(\|\hat{D}\hat{\mathbf{F}}_{\hat{\mathbf{X}}}^{-1}\|) d\hat{\mu}_L < \infty$, où $\log^+(x) = \max(\log(x), 0)$.

$\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{X}}, t)$ converge exponentiellement vers un vecteur $\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{X}})$ in $\mathbb{R}^N$, dépendant de $\hat{\mathbf{X}}$ [61]. Nous les appellerons “modes d’Oseledec”. Ils définissent une hiérarchie d’espaces emboîtés $\mathcal{V}_k(\hat{\mathbf{X}})$, engendrés par les vecteurs $\{\mathbf{v}_k(\hat{\mathbf{X}}), \dots, \mathbf{v}_N(\hat{\mathbf{X}})\}$, tels que :

$$\mathbb{R}^N = \mathcal{V}_1(\hat{\mathbf{X}}) \supset \mathcal{V}_2(\hat{\mathbf{X}}) \supset \dots \supset \mathcal{V}_N(\hat{\mathbf{X}})$$

(filtration d’Oseledec), et tels que la norme euclidienne d’une perturbation $\mathbf{v}$ dans le sous-espace $\mathcal{V}_i(\hat{\mathbf{X}}) \setminus \mathcal{V}_{i+1}(\hat{\mathbf{X}})$ évolue comme :

$$\|D\mathbf{F}_{\hat{\mathbf{X}}}^t \cdot \mathbf{v}\| = C(\hat{\mathbf{X}}, t) e^{\lambda_L(i)t} \|\mathbf{v}\| \quad (4.58)$$

où $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log C(\hat{\mathbf{X}}, t) = 0$ presque sûrement. Donc $\lambda_L(i)$ est le taux d’amortissement exponentiel de la perturbation $\|\mathbf{v}\|$. De même, la somme des k premiers exposants de Lyapunov donne la vitesse de contraction exponentielle d’une boule de perturbations dans l’espace engendré par $\{\mathbf{v}_1(\hat{\mathbf{X}}), \dots, \mathbf{v}_k(\hat{\mathbf{X}})\}$.

10. D’un point de vue phénoménologique les exposants de Lyapunov jouent un rôle fondamental. Dans l’article [Cessac et col., 2001] on montre qu’ils correspondent à des échelles de temps caractéristiques associées au transport de l’énergie dans le système (voir également la section 4.2.8). Par ailleurs, les modes d’Oseledec correspondant jouent le rôle de mode de diffusion anormale, prenant en compte le seuil dans l’équation de diffusion (4.23). Enfin, le théorème ergodique appliqué à l’équation (4.56) montre que :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_L(i) = \log(\epsilon) \bar{s}_L \quad (4.59)$$

Ce résultat lie la contraction moyenne en volume (quantité microscopique) au nombre moyen de sites excités par unité de temps (quantité macroscopique).

11. Il découle de cette analyse que le modèle de Zhang à taille L finie est faiblement²⁶ hyperbolique ($\lambda_L(0) > 0 > \lambda_L(1) \geq \lambda_L(2) \geq \lambda_L(N)$). L’espace tangent, d’un point générique et régulier²⁷ $\hat{\mathbf{X}}$ se décompose alors en un espace instable $\mathcal{E}^u(\mathcal{X}) = \Sigma_{\Lambda}^+$ où l’expansion moyenne est donnée par $\lambda_L(0)$ et un espace stable $\mathcal{E}^s(\mathcal{X}) = \mathbb{R}^N = \mathcal{V}_1(\hat{\mathbf{X}})$ où le taux exponentiel de contraction volumique est la somme des exposants de Lyapunov négatifs.
12. Ces propriété impliquent par ailleurs que les trajectoires s’accumulent asymptotiquement sur un ensemble invariant (attracteur) *fractal*. La géométrie de cet attracteur est d’une part intimement liée au spectre de Lyapunov et à l’entropie par la formule de Ledrappier-Young (4.99) [62]. Par ailleurs, les exposants de Lyapunov étant liés aux propriétés de transport on a également une relation entre la géométrie fractale de l’attracteur et le transport. Nous en discutons plus en détails dans la section 4.2.10.

4.2.7 Équations de transport.

On s’intéresse maintenant aux liens entre le transport macroscopique et la dynamique microscopique. La théorie que nous développons inclut en particulier les termes de bords, et c’est, à ma connaissance, la première fois qu’ils sont traités analytiquement dans le modèle de Zhang. Un certain nombre des résultats présentés dans cette section sont inclus dans l’article [Cessac et col., 2001] mais nous y ajoutons des résultats nouveaux publiés prochainement [Cessac et col., 2002 a]. En particulier,

26. Nous disons qu’un système dynamique est faiblement hyperbolique si tous les exposants de Lyapunov sont distincts de zéro. Un tel système est en général non uniformément hyperbolique, mais la théorie de Pesin [60, 61] a été développée pour ce type de systèmes.

27. Cette notion est définie dans la section 4.2.9.

l'approximation (4.69) de la densité de sites actifs est semble-t'il légèrement meilleure que l'approximation proposée dans l'article [Cessac et col., 2001] et s'interprète mieux. On a en fait remplacé l'énergie moyenne par site et par unité de temps, par l'énergie moyenne par site et par unité de temps, *sachant que le site est critique*. La loi d'échelle en taille reste néanmoins inchangée.

On va d'abord écrire un certain nombre d'équations fondamentales caractérisant le régime stationnaire. En premier lieu, la composante i , $i \in \Lambda$, du vecteur:

$$\bar{\mathbf{F}}_L - \bar{\mathbf{X}}_L = \int \alpha \Delta [\mathbf{Z}(\mathbf{X}) * \mathbf{X}] d\mu_L(\hat{\mathbf{X}}) = \int \alpha \Delta [\mathbf{Z}(\mathbf{X}) * \mathbf{X}] d\mu_L(\mathbf{X}) \quad (4.60)$$

correspond à la variation moyenne de l'énergie du site i , en un pas de temps. Clairement, le transport moyen correspond à un flux d'énergie dirigé vers les bords. En moyenne, donc, l'effet de la dynamique de relaxation est de faire perdre de l'énergie à chaque site. Chaque terme de (4.60) est donc négatif et correspond à l'énergie moyenne perdue par i en un pas de temps. La matrice Δ étant à coefficients constants (c'est le laplacien discret) l'intégrale (4.60) s'écrit:

$$\bar{\mathbf{F}}_L - \bar{\mathbf{X}}_L = \alpha \Delta \bar{\mathbf{U}}_L$$

où le vecteur

$$\bar{\mathbf{U}}_L \stackrel{\text{def}}{=} \int [\mathbf{Z}(\mathbf{X}) * \mathbf{X}] d\mu_L(\mathbf{X}) \quad (4.61)$$

a pour composantes:

$$\int Z_i(\mathbf{X}) X_i d\mu_L(\mathbf{X}) = \int_{\{\mathbf{X} \mid X_i \geq E_c\}} X_i d\mu_L(\mathbf{X}) = \rho_L(i) \bar{X}_{L,i}^+$$

où :

$$\bar{X}_{L,i}^+ \stackrel{\text{def}}{=} E[X_i \mid X_i \geq E_c] \quad (4.62)$$

est l'énergie moyenne du site i , *sachant qu'il est critique* et $\rho_L(i)$ est définie dans l'équation (4.47). $\bar{\mathbf{U}}_L$ est donc le vecteur qui caractérise l'énergie moyenne excédant le seuil pour chaque site. C'est bien l'énergie qui est diffusée, en moyenne, en un pas de temps.

Dans le régime stationnaire, l'énergie moyenne injectée par unité de temps $\bar{\mathbf{h}}_L$ est égale à l'énergie moyenne diffusée par unité de temps. On a donc l'équation de bilan:

$$\alpha \Delta \bar{\mathbf{U}}_L = -\bar{\mathbf{h}}_L \quad (4.63)$$

Cette équation est aisée à résoudre en projetant les vecteurs $\bar{\mathbf{U}}_L$ et $\bar{\mathbf{h}}_L$ sur la base des vecteurs propres du Laplacien, avec conditions aux bords nulles sur $\partial\Lambda$. Si l'on note $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ les coordonnées (discrètes) dans Λ , les conditions aux bords correspondent à $x_l = 0$ et $x_l = L + 1$, $l = 1 \dots d$ et les L^d modes propres sont donnés par:

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{L+1} \right)^{\frac{d}{2}} \prod_{l=1}^d \sin(k_l x_l)$$

où $\mathbf{k} = (k_1 = \frac{n_1}{L+1}, \dots, k_d = \frac{n_d}{L+1})$ est le vecteur d'onde correspondant au mode $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$. La valeur propre correspondante est :

$$s_{\mathbf{n}} = 2 \sum_{l=1}^d (\cos(k_l) - 1) \quad (4.64)$$

On pose :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}_L(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n}} U_{\mathbf{n}} \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \\ \bar{\mathbf{h}}_L(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n}} H_{\mathbf{n}} \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.65}$$

et l'équation (4.63) donne, dans la base propre:

$$U_{\mathbf{n}} = -\frac{H_{\mathbf{n}}}{\alpha s_{\mathbf{n}}}\tag{4.66}$$

On obtient donc l'énergie moyenne diffusée en un pas de temps en fonction du vecteur d'injection.

Un cas particulier intéressant, sur lequel nous allons nous concentrer par la suite, correspond à une injection uniforme. Dans ce cas :

$$U_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\bar{\omega}_L \delta}{N} \left(\frac{2}{L+1} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\prod_{l=1}^d C_{n_l}}{s_{\mathbf{n}}}\tag{4.67}$$

où :

$$C_{n_l} = \sum_{x=1}^L \sin(k_l x) = (-1)^{m_l} \frac{\sin(\frac{n_l \pi L}{2(L+1)})}{\sin(\frac{n_l \pi}{2(L+1)})}\tag{4.68}$$

avec $n_l = 2m_l + 1$.

Dans ce cas, on s'aperçoit numériquement que la répartition spatiale de $\bar{\mathbf{X}}_L^+$ est approximativement uniforme, sauf près des bords. Faisant l'approximation qu'elle est spatialement constante, égale à $\bar{X}_L^+$, on trouve l'équation suivante pour la densité de sites actifs:

$$\rho_L(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} A_{\mathbf{n}} \prod_{i=1}^d \sin(k_i x_i)\tag{4.69}$$

$$A_{\mathbf{n}} = -\left(\frac{2}{L+1} \right)^d \frac{\bar{\omega}_L \delta}{\alpha E_{tot}^+} \frac{\prod_{l=1}^d C_{n_l}}{s_{\mathbf{n}}}\tag{4.70}$$

où

$$E_{tot}^+ = \sum_{i=1}^N \bar{X}_{iL}^+ \sim N \bar{X}_L^+\tag{4.71}$$

La relation (4.69) est extrêmement bien vérifiée numériquement [Cessac et col., 2001, Cessac et col., 2002 a]. Ce calcul est, à ma connaissance, le premier calcul explicite de ρ_L . Cette approche est a priori généralisable au cas d'une excitation non uniforme, mais elle demande de connaître la distribution spatiale de $\bar{\mathbf{X}}_L^+$. C'est un travail en cours.

On déduit de l'équation (4.69) l'équation de ρ_L^{av} donnée par:

$$\rho_L^{av} = -\frac{\bar{\omega}_L \delta}{\alpha N E_{tot}^+} \gamma_L\tag{4.72}$$

où :

$$\gamma_L = \left(\frac{2}{L+1} \right)^d \sum_{\mathbf{n}} \frac{\prod_{i=1}^d C_{n_i}^2}{s_{\mathbf{n}}} < 0\tag{4.73}$$

L'équation (4.72) peut se réécrire:

$$\rho_L^{av} \bar{e}_L = \frac{\bar{\omega}_L \delta}{N} = \bar{h}_L \quad (4.74)$$

où:

$$\bar{e}_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{h}_L}{\rho_L^{av}} = \frac{\alpha E_{tot}^+}{|\gamma_L|} \quad (4.75)$$

s'interprète dimensionnellement comme une *énergie moyenne dissipée par site actif et par unité de temps*. Cette quantité apparaît donc naturellement dans les équations de transport. Nous l'avons calculée ici explicitement pour le modèle conservatif, mais nous avons étendu ce résultat à un modèle où l'énergie est dissipée également dans le réseau [Cessac et col., 2002 a].

Il est intéressant d'étudier la loi d'échelle de ces quantités lorsque $N \rightarrow \infty$. On montre que [Cessac et col., 2001]:

$$|\gamma_L| \sim c(L+1)^{d+2}$$

où c est une constante. Par ailleurs, $E_c \leq \bar{X}_L^+(i) < K$, $i = 1 \dots N$, puisque l'espace de phase est compact. Il s'en suit que :

$$\bar{e}_L \sim CL^{-2} \quad (4.76)$$

Cette loi d'échelle ne fait plus intervenir la dimension du réseau. L'exposant 2 est en fait l'exposant de la diffusion *normale*. On explique dans la section suivante ce résultat et on montre qu'il y a un lien entre $\bar{e}_L$ et le premier exposant de Lyapunov négatif.

Il faut enfin noter que $\bar{e}_L$ est proportionnelle à l'inverse de la taille moyenne d'avalanche. En effet, l'énergie moyenne perdue *par avalanche* est $\langle s \rangle_L \bar{e}_L$. Par ailleurs, l'énergie *moyenne* injectée par avalanche est simplement δ . Il s'en suit que:

$$\bar{e}_L = \frac{\delta}{\langle s \rangle_L} \quad (4.77)$$

ce qui nous permet de conclure que:

$$\langle s \rangle_L \sim L^2 \quad (4.78)$$

On trouve ainsi un résultat connu pour d'autres modèles (voir la section 4.1.2), valable en toutes dimensions²⁸. Nous l'obtenons comme un résultat naturel des équations de transport, et nous l'interprétons plus bas.

On montre par ailleurs dans la section suivante que la *durée* d'une avalanche diverge, lorsque $L \rightarrow \infty$, comme $\langle \tau \rangle_L \sim L^{\gamma_\tau}$, $\gamma_\tau > 1$. Comme $\bar{\omega}_L \sim \frac{1}{\langle \tau \rangle_L}$ il s'en suit que $\bar{\omega}_L \rightarrow 0$ comme $L^{-\gamma_\tau}$. Il découle alors de (4.72) que $\rho_L^{av} \sim L^{-\gamma_\tau+2-d}$, donc que $\rho_L^{av} \rightarrow 0$.

Les quantités $\bar{h}_L$, $\bar{e}_L$, ρ_L^{av} sont respectivement l'analogue des quantités h (taux d'injection d'énergie par site), ϵ (énergie dissipée par site critique), ρ (densité de sites actifs) introduites par Vespignani et ses collaborateurs dans [46] (voir eq. 4.16 partie 4.1.2). Dans notre cas, contrairement au modèle de Vespignani et col., les quantités $\bar{h}_L, \bar{e}_L$ ne sont pas des paramètres indépendants mais sont *bel et bien fixées par la dynamique et dépendent de L* . Nous venons donc de montrer (voir également [Cessac et col., 2001]) que la condition (4.16) est effectivement vérifiée dans le modèle de Zhang:

²⁸. En dimension $d = 1$, il est nécessaire d'avoir un nombre de "rebonds" sur les deux sites du bords proportionnel à L pour évacuer l'énergie excédentaire, ce qui explique la loi en L^2 .

$$\bar{h}_L \rightarrow 0, \bar{e}_L \rightarrow 0, \rho_L^{av} = \frac{\bar{h}_L}{\bar{e}_L} \rightarrow 0, \text{ lorsque } L \rightarrow \infty \quad (4.79)$$

mais c'est la *dynamique et en particulier la condition d'adiabaticité* qui impose naturellement cette condition. En quelque sorte les paramètres s'ajustent "d'eux-mêmes" lorsque $L \rightarrow \infty$. Cela a des effets intéressants sur la dynamique, effets que nous analysons dans la section suivante.

Par analogie avec (4.17) calculons maintenant

$$\chi_L = \frac{\partial \rho_L^{av}}{\partial \bar{h}_L} = \frac{1}{\bar{e}_L} \left[1 - \rho_L^{av} \frac{\partial \bar{e}_L}{\partial \bar{h}_L} \right] \quad (4.80)$$

qui correspond à la susceptibilité du modèle de Vespignani et col. A noter que, comme dans notre cas $\bar{e}_L, \bar{h}_L, \rho_L^{av}$ ne sont pas des paramètres libres, mais bel et bien des grandeurs moyennes caractéristiques de l'état $\hat{\mu}_L$, la seule façon qu'on a de faire varier ces quantités et de donner ainsi un sens à (4.80) est de faire varier les paramètres de contrôle E_c, δ, ϵ . Ici bien sûr, le plus judicieux est de faire varier δ . Dans l'équation (4.75) γ_L ne dépend pas des paramètres (il ne dépend que de d et L). Donc, $\frac{\partial \bar{e}_L}{\partial \bar{h}_L} = \frac{N}{|\gamma_L|} \frac{\partial \bar{X}_L^+}{\partial \bar{h}_L}$. On peut alors faire l'hypothèse que l'énergie moyenne $\bar{X}_L^+$ et $\bar{h}_L$ dépendent régulièrement du paramètre δ , et donc que $\frac{\partial \bar{X}_L^+}{\partial \bar{h}_L}$ est bornée. Il s'en suit que le terme $\rho_L^{av} \frac{\partial \bar{e}_L}{\partial \bar{h}_L}$ tend vers zéro quand $L \rightarrow \infty$. On en conclut alors que χ_L *diverge* comme $\frac{1}{\bar{e}_L}$, donc proportionnellement à la taille moyenne d'une avalanche par la relation (4.77). On retrouve donc un résultat similaire à celui de Vespignani et col., mais avec un calcul exact.

A remarquer que pour la version non conservative du modèle de Zhang introduite dans [Cessac et col., 2002 a], χ_L *diverge seulement si on a conservation locale de l'énergie*. Cela montre, pour le modèle de Zhang, la nécessité d'une loi de conservation de l'énergie locale pour avoir un système critique auto-organisé.

4.2.8 Exposants de Lyapunov et transport.

On a vu dans la section 4.2.6 que la composante i, j de $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}^t$ représente le flux d'énergie allant de j vers i , en t pas de temps, partant de la configuration initiale $\mathbf{X}$ évoluant le long de la trajectoire $\hat{\mathbf{X}}$. On a vu par ailleurs que l'équation de $\mathbf{F}$ est une équation de diffusion singulière. Si le transport était donné par de la diffusion normale, $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}^t$ serait simplement proportionnelle à Δ^t et il serait naturel de caractériser le transport en termes des modes propres de Δ (modes de Fourier). Cependant, la présence d'un seuil dans la définition de $\mathbf{F}$ a deux implications. D'une part, les modes de Fourier ne diagonalisent plus $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$. D'autre part les modes propres de $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$ dépendent de $\mathbf{X}$. Dans ce cas, il pourrait sembler naturel de s'intéresser aux modes propres et valeurs propres de $D\mathbf{F}_{\mathbf{X}}^t$, en étudiant leur asymptotique lorsque $t \rightarrow \infty$. Malheureusement, il n'y a aucune raison que ces quantités aient une limite.

A contrario, on a vu dans la section 4.2.6 que les exposants de Lyapunov et les modes d'Oseledec associés, caractérisant la contraction locale sous l'action de $\mathbf{F}$ sont parfaitement bien définis. Ces quantités sont par ailleurs intimement associées au transport dans le régime stationnaire. On montre en effet dans [Cessac et col., 2001] les résultats suivants. Tout d'abord, une partie du spectre (exposants les plus négatifs) correspond simplement à des modes "rapides" stabilisant la dynamique sur son attracteur. Ils correspondent à une contraction très violente en un pas de temps (pour $\epsilon = 0$ ils correspondent aux directions du noyau) et ils ne participent pas au transport (voir [Cessac et col., 2001]).

Au contraire, les modes "lents" sont associés au transport de l'énergie au sein du réseau et à la dissipation sur les bords. Une large partie du spectre est en effet obtenue *analytiquement* en calculant les valeurs singulières de l'opérateur $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui agit sur un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ par:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + 2\alpha\Delta(\rho_L * \mathbf{v}) \quad (4.81)$$

On a un excellent accord entre les modes de Lyapunov les plus lents et les valeurs singulières de cet opérateur (voir la figure 2 de l'article [Cessac et col., 2001]).

Cet opérateur a par ailleurs une interprétation intéressante. C'est l'opérateur de transition d'une marche aléatoire ou la probabilité de saut²⁹ au site i est $2\rho_L(i)$. C'est donc l'opérateur de Laplace-Beltrami correspondant à une diffusion sur une variété dont la métrique est donnée par la densité de sites actifs. Comme on l'a vu dans la première partie une approche classique dans le domaine de la criticalité auto-organisée est de décrire le transport de l'énergie, sur des temps beaucoup plus long que la durée moyenne d'une avalanche, par une diffusion normale. En termes de marche aléatoire cela correspond à une marche *uniforme* sur le réseau, où la probabilité de saut ne dépend pas du site. Si l'on remplace dans l'équation (4.81) la densité non uniforme ρ_L par une densité constante ρ_L^{av} on observe deux choses.

D'une part, le premier exposant de Lyapunov (le plus lent) reste bien approché par l'approximation de diffusion normale, c'est-à-dire qu'il est asymptotiquement bien approximé par :

$$\lambda_L(1) \sim -\rho_L^{av} L^{-2} \quad (4.82)$$

La loi d'échelle (4.82) s'interprète aisément en termes de l'opérateur de diffusion (4.81) et de la marche aléatoire associée. Un exposant de Lyapunov est l'inverse d'un temps caractéristique $t_L(1) = \frac{1}{|\lambda_L(1)|}$. Or $t_L(1) = \frac{1}{\rho_L^{av}} L^2$ est exactement le temps caractéristique pour qu'une particule atteigne le bord, et donc disparaisse, dans une diffusion normale avec probabilité de saut ρ_L^{av} . L'exposant $\lambda_L(1)$ s'interprète donc comme un *taux de fuite de l'énergie vers les bords*. Cet argument qualitatif est par ailleurs confirmé par le théorème 2 de l'article [Cessac et col., 2001]. L'énergie transportée en moyenne étant l'énergie excédentaire $\bar{X}_L^+$, l'énergie moyenne dissipée par site et par unité de temps est $\lambda_L(1)\bar{X}_L^+$. Elle est aussi donnée par $\rho_L^{av}\bar{e}_L$, d'où l'on tire :

$$\bar{e}_L \sim \frac{\bar{X}_L^+}{L^2}$$

Cela permet donc de comprendre pourquoi l'énergie dissipée par site actif, $\bar{e}_L$, a une loi d'échelle en L^{-2} , indépendamment de la dimension d . De manière plus générale, les moyennes temporelles apparaissant dans la section 4.2.7, et donc notamment $\bar{e}_L$, correspondent à une limite où le temps devient infini. Cette limite est donc dominée par $\lambda_L(1)$. Cela permet ainsi de comprendre pourquoi l'approximation de diffusion normale donne de bons résultats lorsqu'on s'intéresse seulement au transport moyen sur l'échelle de temps la plus lente.

A *contrario*, le reste du spectre est clairement différent du spectre de diffusion normale (voir la figure 2 de l'article [Cessac et col., 2001]). On en déduit donc que sur des échelles de temps intermédiaires (notamment de l'ordre de la durée d'une avalanche), le transport est bien *anormal*. De fait, l'exposant de diffusion anormale est lié à la partie du spectre de Lyapunov correspondant à ce régime intermédiaire (voir ci-dessous). Cela permet donc de réconcilier deux points de vue apparemment contradictoires.

On exhibe par ailleurs une propriété intéressante. Il semble que le spectre de Lyapunov ait une propriété de "Finite Size Scaling". Plus précisément on montre numériquement que les spectres obtenus pour différents L peuvent être mis en correspondance avec une courbe "universelle" $\lambda(x)$ par la transformation :

29. Le facteur 2 apparaît car un site ne peut relaxer deux fois de suite. On obtient $\mathcal{L}$ en considérant la dynamique de transport d'un processus correspondant à deux pas de temps de la dynamique initiale (voir [Cessac et col., 2001]). L'équation de bilan de la marche aléatoire correspond à l'équation (4.63) car l'énergie moyenne transportée en deux pas de temps par un site actif est $\frac{\bar{X}_L^+}{2}$ (ce site ne peut être actif deux instants successifs et il ne transfère rien quand il est stable).

$$\lambda_L(i) = L^{-d\tau_\lambda} \lambda(iL^{-d}), i = 1 \dots L^d \quad (4.83)$$

où τ_λ est associé à l'exposant caractérisant la loi d'échelle de la durée d'avalanche lorsque $L \rightarrow \infty$ (voir la figure 5 de [Cessac et col., 2001]).

On en déduit que l'exposant τ_λ est lié à l'exposant γ_τ de la durée d'avalanche par la relation:

$$\gamma_\tau = d\tau_\lambda + 2 - d$$

Notons que τ_λ dépend de d et aussi, a priori, des paramètres E_c, ϵ, δ .

Le temps $t_L(i) = \frac{1}{|\lambda_L(i)|}$ correspond à un temps caractéristique dans les équations de transport. En particulier le temps $t_L(i_0) = \langle \tau \rangle_L$, (resp. l'exposant $\lambda_L(i_0)$), définit, dans le spectre de Lyapunov, les modes correspondant au transport sur l'échelle de temps d'une avalanche. $\lambda_L(i_0)$ correspond donc à un point de *crossover* dans le spectre. Au point de crossover, on s'attend à ce que les effets de contraction dus à la redistribution de l'énergie au sein du réseau (modes rapides) et les effets dus à la dissipation sur les bords (modes lents) soient du même ordre. La diffusion étant anormale au sein d'une avalanche avec un exposant z , le temps nécessaire pour atteindre le bord est de l'ordre de L^z , donc $t_L(i_0) \sim L^z$ ce qui implique que:

$$z = \gamma_\tau = d\tau_\lambda + 2 - d \quad (4.84)$$

qui nous donne l'exposant de diffusion en termes de l'exposant de renormalisation τ_λ . Les valeurs numériques calculées dans [Cessac et col., 2001], en dimension $d = 2$, ne contredisent pas ce résultat (on trouve une valeur de $2\tau_\lambda$ assez proche de la valeur connue de z). En dimension 1 l'accord est excellent (fig. 5). Néanmoins il serait bon de fonder ce résultat sur des arguments plus solides. Il serait sans doute possible de calculer τ_λ par les techniques de renormalisation mises en place par Pietronero et ses collaborateurs pour les modèles de criticalité auto-organisée [47]. Ce travail est en cours.

On note que $z \leq 2$, ce qui indique que:

$$\tau_\lambda \leq 1$$

Comme $z = 1$ en dimension 1 et $z = 2$ pour $d \geq 4$ on s'attend à ce que $\tau_\lambda(d)$ soit une fonction croissante dans $[0,1]$, telle que $\tau_\lambda(1) = 0$ et $\tau_\lambda(d) = 1$ pour $d \geq 4$. On a représenté Figure 5 le spectre de Lyapunov, renormalisé par (4.83), en dimension $d = 1$, avec $\tau_\lambda = 0$. L'accord est excellent.

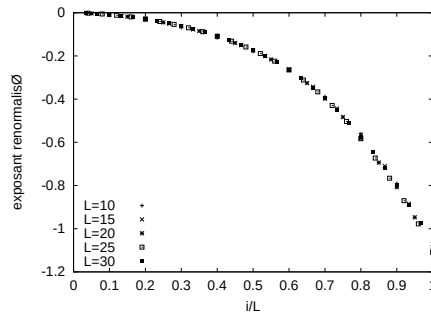


FIG. 5 – spectre de Lyapunov, renormalisé par (4.83), en dimension $d = 1$, $E_c = 2.2, \epsilon = 0.1$, avec $\tau_\lambda = 0$.

Ces résultats conduisent par ailleurs à une propriété importante du système dynamique. Si le modèle de Zhang est hyperbolique à taille finie, il perd cette propriété à la limite thermodynamique

$L \rightarrow \infty$ car une partie (extensive) du spectre de Lyapunov tend vers 0. En effet, on a vu que $\bar{\omega}_L$ tend vers zéro comme $L^{-\gamma\tau}$ et donc que l'exposant de Lyapunov positif $\lambda_L(0) \rightarrow 0$. On en conclut par ailleurs que le modèle asymptotique a une *entropie nulle*. D'autre part, l'équation (4.48) implique que $\rho_L^{av} \rightarrow 0$ et donc que $\lambda_L(1) \rightarrow 0$. En fait, la relation (4.83) entraîne qu'une partie extensive du spectre négatif tend vers zéro, même si la *somme* des exposants négatifs, elle, *diverge* comme $L^{d(1-\tau\lambda)}$.

L'absence d'hyperbolicité semble une condition nécessaire à l'existence d'un comportement critique à la limite thermodynamique. En effet, dans un système hyperbolique les fonctions de corrélations décroissent *exponentiellement vite* et la convergence vers l'équilibre se fait à vitesse exponentielle. Au contraire, on attend, dans un système atteignant un état critique à la limite thermodynamique, un ralentissement critique et une décroissance algébrique des fonctions de corrélations.

On aimerait donc étudier plus en détail les propriétés de l'état lorsque $L \rightarrow \infty$. C'est un travail encore en développement qui repose sur la construction d'une dynamique symbolique pour le système dynamique (4.33) et la construction de mesures de Gibbs au sens de Sinai-Ruelle-Bowen. La section suivante est consacrée à la première condition à cette construction : l'existence de variétés stables locales, et à l'obstacle majeur : la présence d'un ensemble de singularité. Nous discutons également les implications physiques fascinantes de la présence de cet ensemble. La section 4.3.2 est consacrée au formalisme thermodynamique.

4.2.9 Sensibilité aux conditions initiales, variétés instables, stables.

On a vu plus haut que le modèle de Zhang est faiblement hyperbolique. Pour les difféomorphismes, la théorie de Pesin [60, 61] permet de montrer qu'il existe des variétés appelées respectivement, variétés stables locales et variétés instables locales, localement tangentes à l'espace instable $\mathcal{E}^u(\hat{\mathbf{X}})$ (resp. l'espace stable $\mathcal{E}^s(\hat{\mathbf{X}})$). Nous en donnons la définition ci-dessous. L'existence de ces variétés permet de construire une partition remarquable, finie, dite *partition de Markov*, permettant de coder la dynamique par une chaîne de Markov sur un nombre fini d'états (de symboles). L'étude de la dynamique, et en particulier de la mesure naturelle en est ainsi grandement simplifiée. Dans le modèle de Zhang, la présence de singularités complique le problème mais en enrichit le comportement. Dans cette partie nous discutons de la structure des variétés stables, instables, ainsi que le lien avec des propriétés physiques originales du modèle.

Tout d'abord, comme on l'a vu, le modèle de Zhang possède une direction instable Σ_Λ^+ . On appelle variété instable de $\hat{\mathbf{X}}$ l'ensemble³⁰:

$$\mathcal{W}^u(\hat{\mathbf{X}}) = \left\{ \hat{\mathbf{Y}} \in \Omega \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(\hat{\mathbf{F}}^{-t}\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{F}}^{-t}\hat{\mathbf{X}}) = 0 \right\} \quad (4.85)$$

Pour fixer les idées, si $\hat{\mathbf{X}}$ est un point fixe, $\mathcal{W}^u(\hat{\mathbf{X}})$ est l'ensemble des points qui convergeraient vers $\hat{\mathbf{X}}$ si l'on "remontait le temps". La structure du modèle de Zhang implique que tout point de Ω admet une variété instable:

$$\mathcal{W}^u(\hat{\mathbf{X}}) = \left\{ \hat{\mathbf{Y}} \in \Omega \mid \pi^s(\hat{\mathbf{Y}}) = \pi^s(\hat{\mathbf{X}}) \right\} \quad (4.86)$$

C'est-à-dire l'ensemble des points qui ont la même configuration d'énergie que $\hat{\mathbf{X}}$. La variété instable de $\hat{\mathbf{X}}$ est donc Σ_Λ^+ , ou $[0,1]$ dans la conjugaison. On a vu que la présence de cette direction instable donnait lieu à de la sensibilité aux conditions initiales.

30. On note que cette définition implique que $\hat{\mathbf{F}}$ soit inversible, ce qui n'est à priori pas le cas pour le modèle de Zhang. Néanmoins il est possible de rendre un système non inversible inversible en introduisant une coordonnée supplémentaire codant les branches inverses. Par exemple la fonction $2x \bmod 1$ n'est pas inversible. Par contre, l'application du boulanger, dont la projection sur l'axe x est $2x \bmod 1$, est inversible, la coordonnée y codant en quelque sorte la branche inverse. On utilisera implicitement ce type de construction ici.

Nous discutons maintenant d'une forme plus exotique de sensibilité aux conditions initiales, et physiquement plus intéressante, due à la présence de seuils dans la dynamique. Intéressons nous à la stabilité d'une trajectoire lorsque l'on perturbe la configuration d'énergie initiale. Pour ce faire on considère la trajectoire d'un point $\hat{\mathbf{X}}$, qu'on appelle trajectoire mère, ainsi que l'évolution concomitante d'une famille de trajectoires "filles" correspondant à perturber la *configuration d'énergie* $\mathbf{X}$ avec une perturbation de norme $\leq \eta$, mais à garder la *même séquence d'excitations*. En d'autres termes, on s'intéresse à l'évolution d'une famille de conditions initiales, $\mathcal{H}(\mathbf{X}, \eta)$ telles que, $\forall \hat{\mathbf{Y}} \in \mathcal{H}(\mathbf{X}, \eta)$, $\pi^s(\hat{\mathbf{Y}}) \in \mathcal{B}(\mathbf{X}, \eta)$, où $\mathcal{B}(\mathbf{X}, \eta)$ est la boule, dans $\mathcal{D}$, de centre $\mathbf{X}$ et de rayon η , mais où $\pi^u(\hat{\mathbf{Y}}) = \pi^u(\hat{\mathbf{X}})$, $\forall \hat{\mathbf{Y}}$. Supposons que la trajectoire de $\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)$ soit telle que :

$$\exists \nu > 0, \forall t \geq 0, d(\hat{\mathbf{F}}^t(\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)), \mathcal{S}) > \nu \quad (4.87)$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de singularité (4.52). Alors la proposition 2 implique que la *trajectoire de tout point de $\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)$ converge asymptotiquement vers la trajectoire de $\hat{\mathbf{X}}$* . Cette convergence se fait par ailleurs à vitesse exponentielle, mais pas uniformément (voir la Figure 6). En effet, la vitesse de contraction exponentielle moyenne est donnée par les exposants de Lyapunov³¹ $\lambda_L(i)$. L'évolution d'une perturbation dépend donc de sa projection sur les modes d'Oseledec (équation (4.58)). Ainsi, le diamètre de la boule à l'instant t , pour t suffisamment grand, est de l'ordre de :

$$\text{diam} \left(\pi^s \left[\hat{\mathbf{F}}^t(\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)) \right] \right) \sim \eta e^{\lambda_L(1)t} \quad (4.88)$$

et son volume de l'ordre de :

$$\mu_{Leb} \left(\pi^s \left[\hat{\mathbf{F}}^t(\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)) \right] \right) \sim \eta^N e^{\sum_{i=1}^N \lambda_L(i)t} \quad (4.89)$$

Ce qu'il faut surtout retenir ici, est le fait que, pour un point $\hat{\mathbf{X}}$ satisfaisant à (4.87) la perturbation est *exponentiellement vite amortie*. La trajectoire de $\hat{\mathbf{X}}$ est donc *robuste* à une perturbation d'amplitude $\leq \eta$. Cela signifie par ailleurs, que les trajectoires issues de $\mathcal{H}(\mathbf{X}, \eta)$ sont *asymptotiquement indistinguables* de celle de $\hat{\mathbf{X}}$.

Considérons maintenant maintenant le cas d'un point ne satisfaisant pas la condition (4.87). Pour fixer les idées supposons qu'il existe donc un temps t_0 tel que

$$\hat{\mathbf{F}}^{t_0}(\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

L'ensemble $\mathcal{S}$, de codimension 1, sépare alors l'image $\hat{\mathbf{F}}^{t_0}(\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta))$ de $\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)$ au temps t_0 en domaines $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k$. Cela signifie qu'au temps t_0 , pour tout couple $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$ il existe des sites, *actifs* pour toutes les configurations d'énergie de $\mathcal{E}_i$ mais qui sont *stables* dans toutes les configurations d'énergie de $\mathcal{E}_j$. Autrement dit, si l'on considère une trajectoire perturbée $\hat{\mathbf{Y}}$ telle que, au temps t_0 $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}$ sont séparées par $\mathcal{S}$, alors on peut trouver au moins un site k qui est actif dans $\mathbf{X}$ et stable dans $\mathbf{Y}$ (ou vice-versa). Cela signifie que l'évolution a conduit les deux trajectoires dans une situation où $X_k(t_0)$ est juste en dessus du seuil, et $Y_k(t_0)$ est juste en dessous (voir la figure 6). La distance entre ces deux configurations à l'instant suivant est alors :

$$d(\mathbf{X}(t+1), \mathbf{Y}(t+1)) \geq E_c(1 - \epsilon)$$

alors que la distance à l'instant était de l'ordre de $\eta e^{\lambda_L(1)t}$ par l'équation (4.88).

On a donc une *séparation violente des trajectoires, en un pas de temps*. Un observateur qui préparerait deux systèmes l'un dans l'état $\hat{\mathbf{X}}$, l'autre dans l'état $\hat{\mathbf{Y}}$ verrait, jusqu'au temps t_0 deux

31. On suppose ici que $\hat{\mathbf{X}}$ est un point générique, en sorte que les exposants de Lyapunov de $\hat{\mathbf{X}}$ sont les $\lambda_L(i)$. La définition de l'exposant de Lyapunov négatif maximal implique que $\forall \epsilon > 0, \exists t_0 \text{ t.q. } \forall t > t_0, e^{(\lambda_L(1) - \epsilon)t} \eta \leq \text{diam} \left(\pi^s \left[\hat{\mathbf{F}}^t(\mathcal{H}(\hat{\mathbf{X}}, \eta)) \right] \right) \leq e^{(\lambda_L(1) + \epsilon)t} \eta$

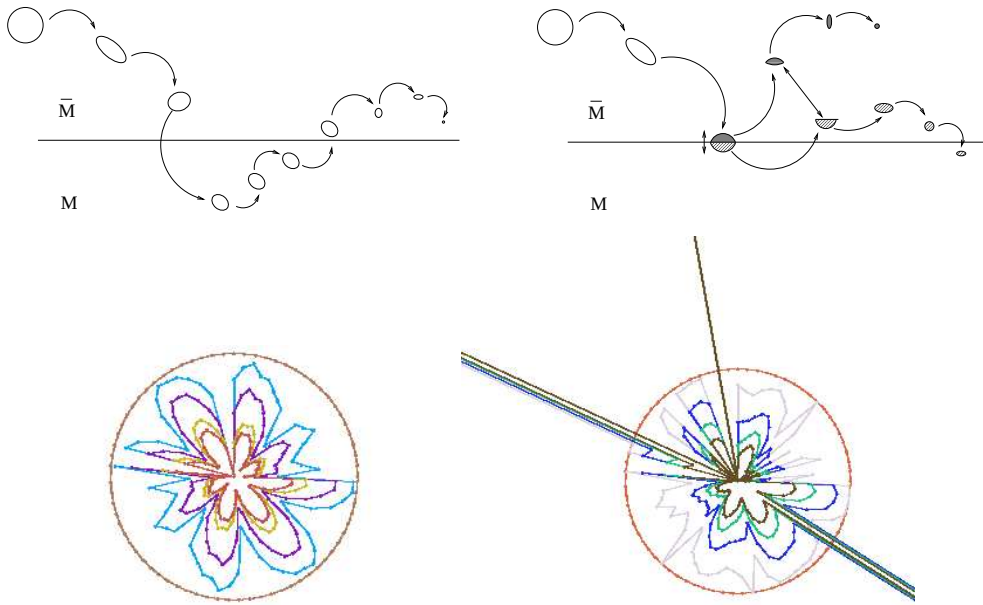


FIG. 6 – Évolution d’une boule de condition initiale projetée dans un plan de l’espace des configurations d’énergies. En haut à gauche la boule est contractée asymptotiquement sans jamais intersecter $\mathcal{S}$. En haut à droite, la boule intersecte $\mathcal{S}$ et se sépare en deux morceaux qui ont ensuite une évolution différente. La distance maximale entre configurations, représentée par des flèches, augmente violemment. En bas. Simulation numérique de l’évolution d’une boule de perturbations autour d’une configuration d’énergie. Un point à distance η du centre et dans la direction faisant un angle $\frac{k\pi}{N}$ (resp. $-\frac{k\pi}{N}$) avec l’axe des abscisses correspond à ajouter (resp. retrancher) η à l’énergie du site k . Une couleur correspond à un instant donné. En bas à gauche. Amortissement asymptotique. En bas à droite. Effet de l’ensemble de singularité.

systèmes avec une évolution similaire, et conclurait à la robustesse du système aux perturbations ou aux erreurs dans la condition initiale, et, donc, à une certaine prédictibilité du comportement. Au contraire, à l’instant $t_0 + 1$ il verrait les deux systèmes évoluer différemment, soudainement, et conclurait à une forme intermittente de sensibilité aux conditions initiales et d’imprédictibilité. A noter par ailleurs que si le site k relaxe à l’instant t_0 dans la configuration $\mathbf{Y}$ il peut induire par la suite une avalanche de grande taille.

Cette forme de sensibilité aux conditions initiales, due aux seuils, est assez exotique et peut devenir vraiment intéressante si l’on considère que le modèle de Zhang, ou une variante, est une bonne approximation de phénomènes naturels, tels que les tremblements de terre. A noter par ailleurs qu’on a une forme de singularité rencontrée également, en systèmes dynamiques, dans les billards (ou les flippers!!): deux trajectoires proches peuvent avoir une évolution différente si l’une d’elle heurte un bumper et pas l’autre. C’est une forme “faible” de sensibilité aux conditions initiales. Elle ne se produit que lorsque une trajectoire approche “suffisamment près” la singularité, ce qui correspond à des temps caractéristiques de l’ordre de $\frac{1}{\bar{\mu}_L(\mathcal{U}_\delta \mathcal{S})}$ où $\mathcal{U}_\delta \mathcal{S}$ est un δ -voisinage de $\mathcal{S}$, $\delta > 0$ (voir plus bas).

Cependant, pour que cet effet soit réellement pertinent, il convient d’en discuter la généricité. En d’autres termes, si l’on choisit des conditions initiales au hasard, quelle est la probabilité (au sens de la mesure de Lebesgue) d’observer cet effet? Nous n’avons pas de résultat analytique répondant à cette question, mais par contre le numérique nous donne une information essentielle. Soit

$$\mathcal{U}_\eta \mathcal{S} = \left\{ \hat{\mathbf{Y}} \in \Omega \mid d(\hat{\mathbf{Y}}, \mathcal{S}) \leq \eta \right\} \quad (4.90)$$

ensemble qu'on appelle η -voisinage de $\mathcal{S}$. Nous avons estimé numériquement Fig. 7 la probabilité $\mu_L \{\mathcal{U}_\eta(\mathcal{S})\}$ qui correspond donc à la probabilité qu'un point typique s'approche à une distance inférieure ou égale à η de l'ensemble de singularité.

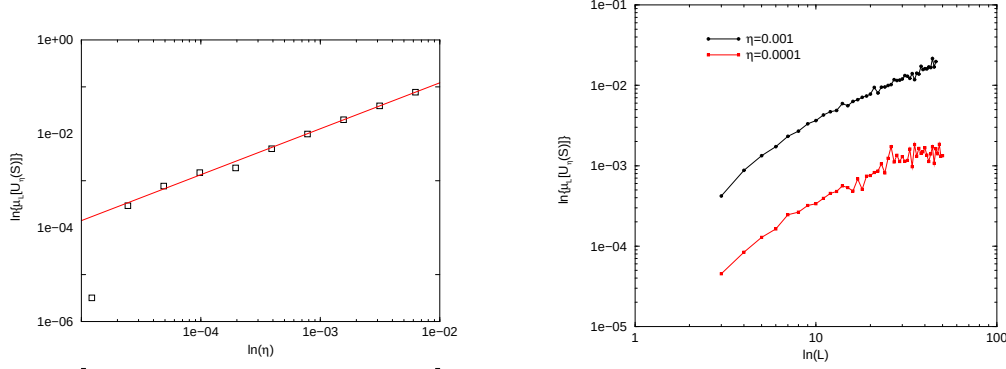


FIG. 7 – Probabilité $\mu_L \{\mathcal{U}_\eta(\mathcal{S})\}$ qu'un point typique s'approche à une distance inférieure ou égale à η de l'ensemble de singularité, avec $E_c = 2.2, \epsilon = 0.1$ en fonction de η avec $L = 30$ (Fig. 7a) et en fonction de L , (Fig. 7b).

On note alors deux points importants. D'une part, cette probabilité est non nulle (et non négligeable) pour $\eta > 0$. Cela signifie par exemple que si l'on perturbe une trajectoire avec une amplitude de l'ordre de 10^{-3} , on verra, pour un système de taille $L = 30$, l'effet de sensibilité aux conditions initiales en moyenne tous les 100 pas de temps!! Notons par ailleurs que cette probabilité augmente avec L . le phénomène de sensibilité aux conditions initiales est donc essentiel dans ce modèle. D'autre part, $\mu_L \{\mathcal{U}_\eta(\mathcal{S})\}$ tend vers zéro comme η^α , (avec $\alpha \sim 1$) lorsque η tend vers 0.

Ce dernier point est lié à une question fondamentale pour la suite: l'existence d'une variété stable locale pour des points génériques. On appelle variété stable locale de diamètre η de $\hat{\mathbf{X}}$, l'ensemble:

$$\mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{X}}) = \left\{ \hat{\mathbf{Y}} \in \Omega \mid d(\hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{X}}) < \eta, \forall t \geq 0 \right\} \quad (4.91)$$

On montre que, dans un système hyperbolique, $\mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{X}})$ est localement tangente à l'espace stable de $\hat{\mathbf{X}}$, que $\hat{\mathbf{F}}(\mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{X}})) \subset \mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{X}}))$, et enfin que:

$$\exists C > 0, \exists 0 < \theta < 1, t.q. \forall \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}} \in \mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{X}}), d(\hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{Z}}) \leq C \theta^t d(\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}), \forall t \geq 0$$

Cette dernière propriété signifie exactement qu'une perturbation d'amplitude $\leq \eta$ est exponentiellement amortie. Dans le modèle de Zhang, $\mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{X}})$ appartient nécessairement à $\mathcal{D}$, où la dynamique est contractante.

Nous dirons qu'un point $\hat{\mathbf{X}}$ est *régulier* s'il a une variété stable locale de diamètre $\eta > 0$. La propriété 2 devrait suffire à assurer l'existence d'une variété stable locale. De fait, un point ayant la propriété (4.87) est régulier. Cependant, de par la présence de l'ensemble de singularité $\mathcal{S}$, certains points peuvent ne pas avoir de variété stable locale (les points dont la trajectoire s'accumule sur $\mathcal{S}$ n'en ont pas). On voudrait maintenant connaître la $\hat{\mu}_L$ -mesure des points réguliers. En effet, seuls les points du support de $\hat{\mu}_L$ sont ceux qui nous intéressent dans le régime asymptotique. On établit alors le résultat suivant [Blanchard et col., 1998, Cessac et col., 2002 a].

Proposition 3 Si pour $\delta > 0$ suffisamment petit :

$$\hat{\mu}_L [\mathcal{U}_\delta(\mathcal{S})] \leq C \delta^\alpha \quad (4.92)$$

avec $C > 0$, $\alpha > 0$ alors $\hat{\mu}_L$ presque-tout point a une variété stable locale de diamètre positif.

La preuve repose sur l'argument suivant. L'existence d'une variété stable locale de diamètre positif d'un point $\hat{\mathbf{X}}$ dans le support de $\hat{\mu}_L$ est assurée si l'on peut trouver un nombre $0 > \gamma > \lambda_L(1)$, et un temps $t_0 < \infty$ tel que $\forall t > t_0$, $d(\mathcal{T}^t \hat{\mathbf{X}}, \mathcal{S}) > e^{\gamma t}$. En effet, dans ce cas une boule suffisamment petite autour de $\hat{\mathbf{X}}$ est asymptotiquement contractée, plus vite qu'elle n'approche $\mathcal{S}$ et donc tous les points de cette boule appartiennent à la variété stable de $\hat{\mathbf{X}}$. Par conséquent, l'ensemble des points qui n'ont pas de variété stable est inclus dans l'ensemble:

$$\{\hat{\mathbf{X}} \mid \forall t_0 \geq 0, \exists t \geq t_0, d(\mathcal{T}^t \hat{\mathbf{X}}, \mathcal{S}) \leq e^{\gamma t}\} = \bigcap_{t_0=0}^{\infty} \bigcup_{t=t_0}^{\infty} \mathcal{T}^{-t}(\mathcal{U}_{e^{\gamma t}}(\mathcal{S}))$$

Par le lemme de Borel-Cantelli la mesure de cet ensemble est nulle si la série $\sum_{t=0}^{\infty} \hat{\mu}_L[\mathcal{U}_{e^{\gamma t}}(\mathcal{S})]$ converge. C'est vrai si la condition (4.92) est satisfaite.

Nous n'avons pas de résultat rigoureux ou analytique prouvant que $\hat{\mu}_L[\mathcal{U}_{\delta}(\mathcal{S})] \leq C\delta^{\alpha}$ mais la simulation présentée Fig. 7a semble conforter ce point de vue. Le numérique est donc encore une fois un guide formidable (avec toutes les précautions dont il faut entourer les conclusions) puisqu'il nous donne une "piste" possible pour faire la preuve de l'existence des variété stable locale pour les points génériques, existence de laquelle découle l'existence d'une partition de Markov finie (voir section 4.2.11) et qui est une étape importante vers la preuve de l'existence d'une unique mesure SRB (voir [Blanchard et col., 2000]).

Notons par ailleurs que $\hat{\mu}_L[\mathcal{U}_{\delta}(\mathcal{S})]$ est la probabilité qu'un site approche la valeur E_c à moins de δ au cours de son évolution. Elle peut-être obtenue à partir de la densité d'énergie qui a été calculée numériquement par de nombreux auteurs, dont Zhang. La densité d'énergie présente d'ailleurs une structure remarquable en pics (voir la figure 8a) que personne, à ma connaissance, n'a jamais vraiment élucidé (voir néanmoins [55] pour un calcul heuristique de la position des pics).

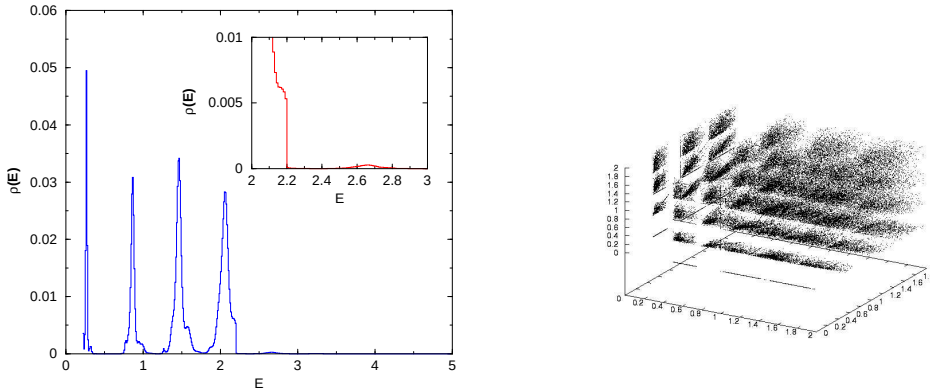


FIG. 8 — . A gauche (Fig. 8a): Probabilité $\rho(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_L[\mathbf{X} \mid \exists i \in \Lambda, X_i \in [E - \iota, E + \iota]]$, pour $d = 2$, $L = 30$, $E_c = 2.2$, $\epsilon = 0.1$, $\delta = 1$, $\iota = 10^{-6}$. L'insert est un zoom autour de E_c . A droite (Fig. 8a): Attracteur (restreint à $\mathcal{M}$) pour $d = 1, L = 3, E_c = 2, \epsilon = 0, \delta = 1$. Les lignes sont une pathologie due au choix $\epsilon = 0$.

En particulier je ne connais pas de calcul analytique de cette densité. Ce serait bien sûr utile pour estimer la probabilité qu'un site soit dans un voisinage $[E_c - \eta, E_c + \eta]$ de E_c , et de connaître également la dépendance en taille de cette probabilité. Il est possible que les équations de transport nous permettent d'accéder à cette probabilité, mais c'est un travail qui reste à effectuer. La figure 8a représente la probabilité $\rho(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_L[\mathbf{X} \mid \exists i \in \Lambda, X_i \in [E - \iota, E + \iota]]$ qui est la probabilité qu'au

moins un site ait une énergie entre $[E - \iota, E + \iota]$ où ι est un paramètre numérique (ici égal à 10^{-6}). La probabilité qu'un site s'approche à moins de η de E_c est donc donnée par $\int_{E_c - \eta}^{E_c + \eta} \rho(E) dE$. On voit que la densité a un saut à droite pour $E = E_c$ (à cause de l'inégalité stricte $X_i > E_c$ dans la définition d'un site instable) mais surtout *qu'elle semble absolument continue à gauche*. Cela corrobore l'exposant $\alpha \sim 1$ donnant le comportement local de $\hat{\mu}_L[\mathcal{U}_\delta(\mathcal{S})]$ lorsque $\delta \rightarrow 0$, exposant obtenu numériquement Fig. 7 a.

A noter que la densité de probabilité de l'énergie d'un site donné, $\rho_i(E) = \mu_L[\mathbf{X} \mid X_i \in [E - \iota, E + \iota]]$, a la même forme, quel que soit i . Cette figure nous apprend énormément sur le support de la mesure invariante. Ainsi, $\rho_i(E)$ est la projection de μ_L sur la direction i . Puisque $\rho_i(E)$ a la même forme quel que soit i , cela suggère que l'espace de phase n'est pas rempli uniformément (figure 8b). Les résultats sur le spectre de Lyapunov suggèrent enfin que, du point de vue du transport, c'est la projection de $\hat{\mu}_L$ sur les premiers modes d'Oseledec qui est importante. Il serait intéressant d'écrire une équation donnant la mesure conditionnelle sur le mode le plus lent, notamment.

4.2.10 Système de Fonctions Itérées.

Jusqu'à présent nous avons considéré le système dynamique (4.33) en termes d'une dynamique locale en temps et en espace. Il existe cependant un autre point de vue, plus conforme aux considérations apparaissant dans la littérature de la criticalité auto-organisée où *l'avalanche* est l'objet principal d'étude, et ouvrant des perspectives nouvelles. Ce point de vue est suggéré par la section 4.2.2. Dans cette section on a en effet vu que l'on pouvait partitionner l'espace de phase en domaines tels que tous les points de ce domaine correspondent à une unique avalanche. Une avalanche est un processus qui associe à une configuration stable une autre configuration stable, résultat d'un processus d'excitation déstabilisant le système, suivi d'un processus de relaxations en chaîne le restabilisant. On définit alors une famille d'applications $T_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $i \in \Lambda$. Pour chaque i , l'application T_i envoie une configuration de $\mathcal{M}$ sur la configuration stable lui succédant, après excitation du site i et (éventuellement) avalanche (Fig. 2). Cette application est donnée par:

$$T_i(\mathbf{X}) = F^{\tau(i, \mathbf{X})}(\mathbf{X} + \delta \mathbf{e}_i), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{M} \quad (4.93)$$

où $\tau(i, \mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t \geq 0, F^t(\mathbf{X} + \delta \mathbf{e}_i) \in \mathcal{M}\}$ est la durée de l'avalanche obtenue en excitant i dans la configuration $\mathbf{X}$.

On peut voir T_i comme une application de premier retour³². On construit alors un nouveau système dynamique où l'espace de phase est maintenant $\Omega = \Sigma_\Lambda^+ \times \mathcal{M}$. On va conserver la notation $\hat{\mathbf{X}} = (\tilde{a}, \mathbf{X})$ pour un point de Ω mais $\mathbf{X}$ est maintenant une configuration d'énergie *stable*. L'évolution est alors déterminée par le système dynamique:

$$\mathcal{T}(\hat{\mathbf{X}}) \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma \tilde{a}, T_{a_1}(\mathbf{X})) ; \quad \hat{\mathbf{X}} \stackrel{\text{def}}{=} (a, \mathbf{X}) \quad (4.94)$$

où $\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \Omega$. Ce système a une structure de produit croisé (*skew product*). En effet, l'évolution de $\mathbf{X}$ est pilotée par la séquence d'excitations $\tilde{a}$, mais l'évolution de $\tilde{a}$ est maintenant *entièrement indépendante* de $\mathbf{X}$. On appelle $\hat{\mu}'_L$ la mesure correspondant à $\hat{\mu}_L$ dans ce système dynamique. $\hat{\mu}'_L$ a une structure produit:

$$\hat{\mu}'_L = \nu_L \times \mu_L$$

32. En termes du système dynamique (4.33), le temps moyen de retour dans $\mathcal{M}$ est $\frac{1}{\bar{\omega}_L}$. Ce temps diverge donc lorsque $L \rightarrow \infty$. Il s'en suit que le système dynamique (4.94) n'est pas bien défini lorsque $L \rightarrow \infty$. Dans la version non conservative du modèle de Zhang sur laquelle nous travaillons actuellement, $\bar{\omega}_L$ reste fini quand $L \rightarrow \infty$, dans le régime non conservatif. Cela permet de prolonger la dynamique lorsque $L \rightarrow \infty$ [Cessac et col., 2002 a].

Chaque application T_i , $i \in \Lambda$, est *affine par morceaux*. Elle hérite en effet des singularités de $\mathbf{F}$: ce sont les préimages des feuilles par les itérés $\hat{\mathbf{F}}^t$, $t = 1 \dots \tau(i, \hat{\mathbf{X}})$. La structure de l'ensemble de singularité de $\mathcal{T}$ est donc plus complexe que celle de $\mathcal{S}$. De fait, pour chaque i , $\mathcal{M}$ se décompose en domaines où T_i est affine: ces domaines sont, *par définition*, exactement les domaines $\mathcal{M}_{(i,j)}$ définis dans la section 4.2.2. On note $T_{(i,j)}$ la j -ième composante affine. On a alors une propriété essentielle. Il y a une correspondance *biunivoque* entre l'application $T_{(i,j)}$ et l'avalanche (i,j) . Ainsi les applications $T_{(i,j)}$ jouent en quelque sorte le rôle des opérateurs de relaxation (toppling operators) introduits par Dhar dans le modèle de tas de sable abélien (voir section 4.1.2). Cependant, la structure de modèle de Zhang est plus complexe puisque les applications $T_{(i,j)}$ ne commutent pas et ne préservent pas la mesure de Lebesgue.

On peut donc caractériser chaque avalanche (resp. chaque application) par une paire de symboles (i,j) , $i \in \Lambda$, $j = 1 \dots n(i)$. On peut caractériser la composition des $T_{(i,j)}$ par un graphe de transition $\mathcal{G}$. Une transition $(i,j) \rightarrow (k,l)$ est dite *légitime* si:

$$T_{(i,j)}(\mathcal{M}_{(i,j)}) \cap \mathcal{M}_{(k,l)} \neq \emptyset \quad (4.95)$$

L'interprétation de cette propriété en termes d'avalanches est simplement qu'il existe des configurations dans $\mathcal{M}_{(i,j)}$, qui, après avoir évolué sous l'avalanche (i,j) donneront lieu à l'avalanche (k,l) si le site k est excité. A noter que la structure hiérarchique de la partition induit sans doute des propriétés sur le graphe, certainement liées aux lois de puissance observées, mais l'exploration de cette voie reste à effectuer.

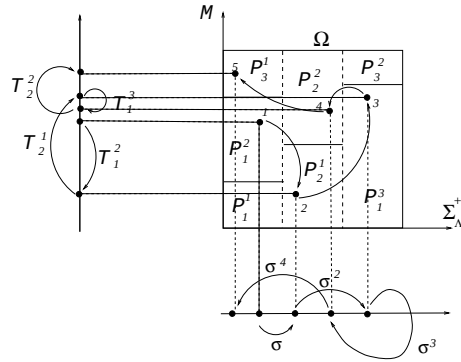


FIG. 9 – Système dynamique (4.94).

On dispose ainsi d'une famille d'applications $T_{(i,j)}$ dont la composition est régie par le graphe $\mathcal{G}$, et où le chemin le long du graphe est déterminé en partie aléatoirement. Plus précisément, le premier symbole (site excité) est choisi aléatoirement avec probabilité q_L . Par ailleurs la propriété 2 indique que pour toute composition le long de ce graphe, il existe un temps fini où l'application composée est contractante. On a ainsi ramené la dynamique du modèle de Zhang à un *système de fonctions itérées probabiliste, sur graphe* (graph directed probabilistic iterated functions system) [66, 67, 68, 69]. La définition et les propriétés de ce système sont discutées dans l'article [Blanchard et col., 2000] joint en annexe. Pour l'essentiel les conclusions sont les suivantes.

1. D'une part, en tant que système de fonctions itérées, le système dynamique admet un attracteur fractal. Si le graphe admet un ensemble irréductible d'états récurrents, cet attracteur est unique. La propriété d'irréductibilité découle de l'hypothèse 1. On a ainsi une définition claire de ce qu'est "l'attracteur SOC" [28].

2. L'application $\mathcal{T}$ est dilatante sur Σ_Λ^+ avec un taux d'expansion N . La proposition 2 implique que chaque $T_{(i,j)}$ est une quasi-contraction. Par ailleurs, la propriété 2 entraîne que $\mathcal{T}^t$ est contractante pour un t suffisamment grand mais *fini*. On peut aussi définir des exposants de Lyapunov pour le système dynamique (4.94). Ceux-ci se déduisent des $\lambda_L(i)$ par une simple reparamétrisation du temps (voir [Cessac et col., 2001]). Pour les différencier des $\lambda_L(i)$ on les notera $\chi_L(i)$, $i = 0 \dots N$, où $\chi_L(0) = \log(N)$.
3. Dans cette description, le théorème ergodique et la propriété (1) donnent la relation (voir [Cessac et col., 2001]):

$$\sum_{i=1}^N \chi_L(i) = \log(\epsilon) \langle s \rangle_L \quad (4.96)$$

qui lie la *contraction locale* à la *taille moyenne* des avalanches.

4. Les exposants de Lyapunov $\chi_L(i)$ sont directement liés à la géométrie de "l'attracteur" (en fait le support de la mesure invariante). D'une part, il existe une dimension, la dimension de Kaplan-Yorke [70], directement calculable via le spectre de Lyapunov. L'avantage de cette dimension est donc d'être aisément calculable numériquement. Par ailleurs, selon la conjecture de Kaplan-Yorke, la dimension de Kaplan-Yorke est égale à la dimension de Hausdorff du support de $\hat{\mu}'_L$ si $\hat{\mu}'_L$ est SRB.

D'autre part, il existe une relation naturelle (formule de Ledrappier-Young [62]) liant les exposants de Lyapunov négatifs, les dimensions de Hausdorff partielles, et l'entropie inverse. Les dimensions partielles, $\sigma_L(i)$, sont associées à la décomposition d'Oseledec de l'espace tangent (voir la section 4.2.6). De la même façon que l'on définit une variété stable et instable localement tangente aux espaces stables et instables, on peut décomposer ces variétés en sous-variétés localement tangente et de même dimension que les espaces d'Oseledec. Plus précisément, dans notre cas particulier on décompose $\mathcal{W}^s(\hat{\mathbf{X}})$ en une filtration $\mathcal{W}^s(\hat{\mathbf{X}}) = \mathcal{W}_1^s(\hat{\mathbf{X}}) \supset \mathcal{W}_2^s(\hat{\mathbf{X}}) \supset \dots \supset \mathcal{W}_N^s(\hat{\mathbf{X}})$ où :

$$\mathcal{W}_i^s(\hat{\mathbf{X}}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \hat{\mathbf{Y}} \in \Omega \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(\hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{Y}}) \leq \lambda_L(i) \right\}$$

est localement tangente à l'espace d'Oseledec $\mathcal{V}_i(\hat{\mathbf{X}})$ et a même dimension. On voit que sur cette variété la vitesse de contraction est dominée par l'exposant de Lyapunov $\lambda_L(i)$. On définit alors la dimension de Hausdorff locale $\delta_L(i)$:

$$\delta_L(i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \hat{\mu}'_L(\mathcal{B}_i(\hat{\mathbf{X}}, \epsilon))}{\log \epsilon} \quad (4.97)$$

où $\mathcal{B}_i(\hat{\mathbf{X}}, \epsilon)$ est une ϵ -boule de centre $\hat{\mathbf{X}}$ dans $\mathcal{W}_i^s(\hat{\mathbf{X}})$. Alors $\sigma_L(i) = \delta_L(i) - \delta_L(i+1)$, $i = 1 \dots N-1$ est la dimension transverse de $\hat{\mu}'_L$ sur $\mathcal{W}_i^s(\hat{\mathbf{X}}) \setminus \mathcal{W}_{i+1}^s(\hat{\mathbf{X}})$. Elle est $\hat{\mu}'_L$ presque-sûrement constante si $\hat{\mu}'_L$ est ergodique. Ces dimensions locales permettent de caractériser la structure fractale de l'attracteur. En général celui-ci n'est pas homogène et, localement, la dimension varie selon la direction d'Oseledec (penser par exemple à un système de fonction itérés générant un Cantor à N dimensions, où les coefficients de contraction sont différents dans chaque dimension).

La même décomposition peut-être faite sur $\mathcal{W}^u(\hat{\mathbf{X}})$, mais celle-ci est de dimension 1 dans le modèle de Zhang. Par contre, la dimension de Hausdorff partielle correspondante, $\sigma_L(0)$ est égale à 1 seulement si q_L est la mesure uniforme. La formule de Ledrappier-Young lie la dimension $\sigma_L(0)$, l'exposant de Lyapunov positif et l'entropie du système dynamique H_L^+ (qui est aussi l'entropie du décalage, puisque les autres directions sont contractantes):

$$\sigma_L(0) = \frac{H_L^+}{\log(N)} = -\frac{\sum_{i=1}^N q_L(i) \log(q_L(i))}{\log(N)} \quad (4.98)$$

Bien sûr, $\sigma_L(0) = 1$ pour une mesure d'excitation uniforme $q_L(i) = \frac{1}{N}$.

Si l'on considère maintenant le système dynamique "rétrograde", où l'on inverse la flèche du temps³³, la formule de Ledrappier-Young donne:

$$-\sum_{i=1}^N \chi_L(i) \sigma_L(i) = H_L^- \quad (4.99)$$

où H_L^- est l'entropie rétrograde, c'est à dire l'entropie obtenue en inversant la flèche du temps. Si la dynamique est inversible on a simplement $H_L^- = H_L^+$. Sinon elle est de la forme générale $H_L^+ - \log(J_N)$ où J_N est le nombre moyen de préimages en régime stationnaire [Blanchard et col., 2000]. Plus précisément, soit $J_N(\hat{\mathbf{X}})$ le nombre de préimages de $\hat{\mathbf{X}}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $\hat{\mathbf{Y}}$ tels que $\mathcal{T}(\hat{\mathbf{Y}}) = \hat{\mathbf{X}}$. On a alors $J_N = \int J_N(\hat{\mathbf{X}}) d\hat{\mu}'_L(\hat{\mathbf{X}})$. Bien sûr $J_N \leq N$. Il est difficile d'estimer J_N . Dans [Blanchard et col., 2000] nous exhibons un cas, en dimension 1 où ce nombre est N . La formule de Ledrappier-Young indique alors que toutes les dimensions de Hausdorff sont nulles. De fait, on montre que l'attracteur est composé d'un nombre fini de points.

D'un point de vue physique la formule de Ledrappier-Young s'interprète, dans le modèle de Zhang, comme une équation de bilan entropique caractérisant l'état stationnaire. En effet, les exposants de Lyapunov négatifs correspondent, dans ce modèle, à une hiérarchie de temps caractéristiques associés au transport, à la dissipation sur les bords, et plus qualitativement à l'homogénéisation du paysage d'énergie dans le système par la dynamique de relaxation. Cela induit une perte d'entropie (d'un point de vue local, la contraction dans l'espace de phase correspond à une perte d'information puisque des trajectoires initialement différentes deviennent indistinguables). Au contraire, la dynamique d'excitation injecte de l'énergie et de l'entropie dans le système. Qualitativement, elle tend à augmenter l'inhomogénéité du paysage d'énergie. L'équation de Ledrappier-Young traduit l'équilibre entre ces deux phénomènes. Notons que les dimensions de Hausdorff locales interviennent dans ce bilan, car la projection de la mesure invariante sur l'espace stable n'est pas absolument continue.

5. Supposons maintenant que la loi de distribution asymptotique de taille d'avalanche, $P^*(s)$, ait la forme (4.50). Nous déduisons de la formule de Ledrappier-Young des bornes sur l'exposant critique. En effet (4.99) implique que :

$$\sum_{i=1}^N |\chi_L(i)| \geq \log(N) - \log(J_N) \quad (4.100)$$

Donc d'après l'équation (4.96) :

$$\langle s \rangle_L = \sum_{s=1}^{\xi_L^s} s P_L(s) \geq \frac{\log(N) - \log(J_N)}{|\log \epsilon|} \quad (4.101)$$

Si $J_N < N$ cela implique que $\langle s \rangle_L$ diverge plus vite que $\log(N)$ quand $L \rightarrow \infty$. Si l'on suppose que l'on a une loi de probabilité obéissant à la conjecture (2) avec $\xi_L^s \sim L^{\beta_s}$ on a :

33. Il est amusant de faire la remarque suivante. Si l'on remonte le temps l'énergie est injectée sur les bords, à grande échelle, et elle est dissipée aux petites échelles. Le spectre de Lyapunov inverse correspond au transfert des grandes échelles vers les petites.

$$\tau_s \leq 2 \quad (4.102)$$

avec égalité si $\sum_{i=1}^N |\chi_L(i)| = \log(N)$, ce qui correspond, d'après la formule de Ledrappier-Young, à un attracteur où toutes les dimensions partielles sont identiques (et restent bornées loin de zéro quand $L \rightarrow \infty$). A contrario, pour un attracteur non uniforme, on l'inégalité stricte. Cette remarque suggère un lien plus profond entre la géométrie fractale de l'attracteur et les propriétés d'échelle de la distribution de tailles d'avalanches. L'exploration de cette possibilité est en cours de développement. Nous en disons quelques mots dans la section 4.3.2.

4.2.11 Dynamique Symbolique

Supposons que $\hat{\mathbf{X}}$ soit un point régulier. Alors tous les points de $\mathcal{W}_\eta^s(\hat{\mathbf{X}})$ ont asymptotiquement la même trajectoire. Donc, tous ces points sont *équivalents* du point de vue du régime stationnaire. Cette remarque ouvre la perspective de remplacer la dynamique asymptotique de (4.33), qui fait intervenir une infinité non dénombrable de configurations, par une dynamique symbolique concernant une infinité *dénombrable*, voire un nombre *fini* de symboles. Ceci, en partitionnant judicieusement l'espace de phase en cellules constituées de configurations d'énergie asymptotiquement indistinguables. Cette construction est brièvement décrite dans cette section. On y montrera par ailleurs que, sous certaines conditions, on peut décrire le système dynamique (4.33) par une *chaîne de Markov* sur les symboles, finie, ergodique, dont l'état stationnaire correspond à $\hat{\mu}'_L$. Par ailleurs, on peut choisir la partition correspondante en sorte que les symboles aient aussi une signification en termes d'avalanches.

On a vu dans la section 4.2.10 que l'on pouvait constituer une partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_{(i,j)}\}_{i=1\dots N, j=1\dots l(i)}$ de $\Sigma_\Lambda^+ \times \mathcal{M}$ où $\mathcal{P}_{(i,j)} = [i] \times \mathcal{M}_{(i,j)}$ est tel que toute configuration $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_{(i,j)}$ subit l'avalanche (i,j) par excitation de i . Cette partition permet donc de coder la dynamique avec un codage pertinent en termes d'avalanches. On rappelle le principe de la dynamique symbolique. Soit $\mathcal{Q}$ une partition de $\Sigma_\Lambda^+ \times \mathcal{M}$, $\mathcal{Q} = \cup_{\omega \in \mathcal{I}} \mathcal{Q}_\omega$, on l'on énumère les éléments de la partition par un indice ω , appartenant à un ensemble de symboles $\mathcal{I}$, *fini ou dénombrable*. A chaque $\hat{\mathbf{X}}$ on associe la chaîne bi-infinie $\tilde{\omega} = \dots \omega_{-n} \omega_{-n+1} \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots \omega_{n-1} \omega_n \dots$ telle que le symbole ω_n spécifie l'élément de partition où se situe $\hat{\mathbf{X}}(n)$: $\omega_n = \alpha$ si et seulement si $\hat{\mathbf{X}}(n) \in \mathcal{Q}_\alpha$. La transition entre symboles est décrite par un graphe de transition $\mathcal{G}$ et une matrice de transition $\mathcal{A}$. Une transition $\omega \rightarrow \omega'$ est légale si $\mathcal{Q}_{\omega'} \cap \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{Q}_\omega) \neq \emptyset$. La matrice de transition $\mathcal{A}$ est alors définie par: $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{\omega, \omega'})_{\omega, \omega' \in \mathcal{I}}$ avec $\mathcal{A}_{\omega, \omega'} = 1$ si la transition est légale et $\mathcal{A}_{\omega, \omega'} = 0$ autrement. Le graphe de transition est constitué de sommets $\omega \in \mathcal{I}$ et de liens orientés $\omega \rightarrow \omega'$ pour toutes les paires (ω, ω') telles que $\mathcal{A}_{\omega, \omega'} = 1$. Les règles de transition données par $\mathcal{A}$ définissent une grammaire des séquences admissibles. Soit $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{X}^+$) l'ensemble des séquences légales bi-infinies (resp. infinies à droite).

La partition naturelle $\mathcal{P}$ est un exemple d'une telle partition. Elle permet de produire un codage symbolique de la dynamique, nous informant d'autre part de l'avalanche se produisant à chaque instant. On remplace alors la dynamique initiale par un simple décalage sur les symboles, où les transitions possibles sont déterminées par le graphe de transition. Cependant, pour que le codage soit utile il faut que la partition choisie soit telle que la correspondance entre les points de Ω et la suite de symboles soit essentiellement biunivoque à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle près. La dynamique sur Ω correspond alors, par la conjugaison, à une dynamique de décalage $\sigma_{\mathcal{A}}$ sur les séquences $\tilde{\omega}$.

La dynamique symbolique permet par ailleurs de simplifier l'étude de l'état stationnaire. En effet, on ramène l'étude d'une distribution de probabilité sur Ω , espace non dénombrable, à une distribution de probabilité sur l'ensemble des symboles $\mathcal{I}$. Dans le cas des systèmes dynamiques hyperboliques sans singularités, on peut, à partir des variétés stables et instables locales, fabriquer une partition remarquable, *finie*, appelée *partition de Markov*. Pour cette partition, l'état stationnaire sur les symboles est la mesure invariante d'une *chaîne de Markov* et la matrice de transfert est la matrice d'incidence

du graphe avec une pondération statistique sur les transitions légales. On peut donc déterminer les propriétés de l'état à partir de propriétés de la matrice de transition. Dans notre cas, une partition est une partition de Markov si, pour tout couple ω, ω' tel que $\mathcal{A}_{\omega, \omega'} = 1$:

$$(i) \quad \pi^u(\mathcal{T}(B_\omega)) \supset \pi^u(B'_\omega) \quad (4.103)$$

$$(ii) \quad \pi^s(\mathcal{T}(B_\omega)) \subset \pi^s(B'_\omega) \quad (4.104)$$

Malheureusement, si la condition (i) est vérifiée pour la partition naturelle, la condition (ii), elle, ne l'est pas en général, puisque l'image d'un atome intersecte plusieurs atomes. Dit autrement, la propriété (ii) pour la partition naturelle signifierait que l'avalanche qui succède à une autre avalanche est toujours *entièrement déterminée* par le site qu'on active et *ne dépend pas* de la configuration d'énergie.

La question qui se pose alors est: peut-on, à partir de la partition naturelle, générer une partition plus fine, mais finie, qui soit une partition de Markov. L'avantage d'une telle construction serait d'avoir la propriété de Markov, tout en gardant l'information sur la dynamique d'avalanche. Cette construction nécessite que l'ensemble des points réguliers soit de mesure 1, ce que nous ne savons pas établir rigoureusement mais qui semble conforté par nos expériences numériques (voir section 4.2.9). Dans le cas où le support de la mesure invariante intersecte l'ensemble de singularité, on peut encore construire une partition de Markov, mais dénombrable [64].

Dans la section 4.3.2, nous exposons comment, à partir de la dynamique symbolique, on peut construire un formalisme thermodynamique permettant de définir une extension de la notion de mesure de Gibbs, pour lesquelles la distribution de probabilité n'est pas construite via le hamiltonien, mais, plus généralement, via un opérateur associé à des propriétés dynamiques.

4.3 Développements et conclusion.

Dans cette partie nous décrivons brièvement les récents développements de notre théorie ainsi que des résultats indépendants de cette approche.

4.3.1 Singularité de Lee-Yang.

Le concept même de criticalité auto-organisée implique un parallèle avec les phénomènes critiques et nombre de concepts fédérateurs (tels exposants critiques ou classes d'universalité) sont une transposition directe des notions existantes en mécanique statistique de l'équilibre. Cependant même si plusieurs auteurs ont tenté de clarifier ce rapprochement [36, 45], à ma connaissance, aucune méthode générale d'analyse n'en a émergé.

En mécanique statistique, les transitions de phase sont associées à une singularité dans le potentiel thermodynamique (énergie libre ou pression par exemple): selon la classification des Ehrenfest, la transition est d'ordre k si l'énergie libre est $\mathcal{C}^{k-1}$ mais pas $\mathcal{C}^k$. Cette singularité se manifeste, dans de nombreux exemples, par un *phénomène de Lee-Yang* [71]. Dans ces exemples, la fonction de partition s'écrit comme un polynôme dans une variable, telle l'activité, qui est une fonction des paramètres de contrôle (potentiel chimique, température, champ magnétique extérieur, etc....), fonction que l'on peut étendre au plan complexe. Les zéros de ce polynôme sont, à taille finie, disjoints de l'axe réel et l'énergie libre est analytique dans un voisinage de cet axe. L'énergie libre étant la fonction génératrice des cumulants, il en découle que les cumulants et les moments sont finis à taille finie. Lorsque la taille tend vers l'infini les zéros s'accumulent en général sur des courbes dans le plan complexe (lignes de Stokes) [72, 73, 74]. Lee et Yang puis Grossmann et Rozenhauer [75] ont montré que, sous des conditions très générales, l'énergie libre par spin obéit à l'équation électrostatique de Poisson (elle joue le rôle du potentiel) où la densité de zéros sur la ligne de Stokes joue le rôle d'une densité

de charge. La traversée de cette ligne par variation des paramètres de contrôle conduit donc à une singularité à un certain ordre de dérivée de l'énergie libre, cet ordre de cette singularité dépendant du comportement local de la densité [72, 73].

De manière générale, lorsqu'il y a coexistence de phase, les courbes où les zéros s'accumulent séparent le plan complexe en régions d'analyticité pour l'énergie libre, chaque région correspondant à une phase, et la traversée de ces lignes correspond à une transition de phase. L'exemple le plus connu est le cercle unité, dans le plan $z = e^h$, où h est l'extension au plan complexe du champ magnétique, pour le modèle d'Ising. Les zéros de la fonction de partition se trouvent sur le cercle unité quelle que soit la taille, mais, lorsque celle-ci tend vers l'infini, et en dessous de la température critique, ils s'accumulent de manière dense sur tout le cercle. (Ils s'accumulent par contre sur une courbe en forme de C , ne touchant pas l'axe réel positif, à haute température). Il découle alors du théorème de Vitali³⁴ que le cercle définit deux domaines ouverts du plan complexe (intérieur et extérieur) où l'énergie libre par spin est analytique³⁵. Ces deux régions correspondent respectivement aux phases $+$ et $-$. Au contraire, sur le cercle, il y a une accumulation de zéros, au point de l'axe réel où l'on dérive l'énergie libre pour obtenir les cumulants ($h = 0$) (phénomène de Lee-Yang). Il en résulte une perte d'analyticité et un saut dans la dérivée correspondant à une transition de phase du premier ordre. L'exposant δ est par ailleurs associé au comportement local de la densité de zéros en $h = 0$. Ces résultats ont été généralisés depuis à de nombreux modèles [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 74]. Par ailleurs des techniques ont été développées qui permettent de localiser les lignes de Stokes [84, 85].

Une approche complémentaire s'est par ailleurs développée notamment dans des articles de Itzykson et col. [86], Fisher [87], Glasser et col. [88]. Dans ces travaux, on fait l'analyse en taille finie des zéros de la fonction de partition et on regarde leur comportement d'échelle. On montre alors que ce comportement est lié aux exposants critiques associés à la transition de phase. On a donc une trace de cette transition dans le comportement en taille finie. Cette idée a depuis été développée dans de nombreux articles, où l'on relie en particulier le comportement de la densité de zéros à la transition de phase [82, 83].

Pour citer un exemple, on montre notamment que dans le plan température complexe, les zéros (dits zéros de Fisher) du modèle d'Ising se situent sur une courbe dont la tangente au point correspondant à la température critique T_c a un angle constant avec l'axe réel lorsque V varie. Cet angle est lié à l'exposant critique de l'énergie libre comme fonction de la température réduite $t = \frac{T-T_c}{T_c}$. En deux mots, l'idée consiste à écrire l'énergie libre par spins, à volume fini, sous la forme:

$$f_V(t) = f_s(t, V) + f_r(t)$$

où $f_r(t)$ est régulière et $f_s(t, V)$ est singulière quand $V \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow 0$. A la limite thermodynamique, $f_s^\pm(t) \sim A_\pm |t|^{2-\alpha}$, où $A_\pm$ sont des constantes universelles et où $\pm$ caractérisent les deux phases magnétiques à basse température, et α l'exposant critique de la chaleur spécifique. A taille finie, l'analyse de Privman et Fisher [87] montre que la partie singulière est de la forme :

$$f^s(t, V) = \frac{1}{V} W[t(AV)^{\frac{1}{2-\alpha}}] \quad (4.105)$$

où W est une fonction universelle telle que

34. Soit $f_n(z)$ une suite de fonctions, chacune régulière dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan complexe; supposons que $|f_n(z)| \leq M$, $\forall n$, $\forall z \in \mathcal{D}$ et supposons enfin que $f_n(z)$ tende vers une limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, pour une suite de points convergeant dans $\mathcal{D}$. Alors $f_n(z)$ converge uniformément vers une limite, *analytique en z* , dans toute région bornée par un contour intérieur à $\mathcal{D}$.

35. On montre en effet que l'énergie libre par spin $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log(Z_N(z))$ existe $\forall z > 0$. Le théorème de Vitali implique alors que l'énergie libre est analytique à l'intérieur (et à l'extérieur du cercle par une transformation $h \rightarrow -h$, $z \rightarrow \frac{1}{z}$). Sur le cercle, la limite existe mais elle n'est plus analytique.

$$W(\tau) \sim \frac{A_+}{A} \tau^{2-\alpha} \text{ lorsque } \tau \rightarrow +\infty \quad (4.106)$$

$$W(\tau) \sim \frac{A_-}{A} (-\tau)^{2-\alpha} \text{ lorsque } \tau \rightarrow -\infty \quad (4.107)$$

avec $\tau = t(AV)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ et $A = [A_+^2 + A_-^2 - 2A_+A_- \cos(\pi\alpha)]^{\frac{1}{2}}$. Il en découle que les zéros de Fisher sont donnés par :

$$t_V(n) = \left[\frac{2\pi}{(A_+^2 + A_-^2 - A_+A_- \cos(\pi\alpha))} \frac{n}{V} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} e^{i(\pi-\phi)} \quad (4.108)$$

L'angle ϕ est donc indépendant de la taille. Il est lié à $A_{\pm}, \alpha$ par :

$$\tan[(2-\alpha)\phi] = \frac{\left[\cos(\pi\alpha) - \frac{A_-}{A_+} \right]}{\sin(\pi\alpha)}$$

Cette situation, où les zéros approchent la singularité avec un angle *constant* ϕ et où le module à une loi d'échelle proportionnelle au volume sera qualifié de *scaling normal* par la suite.

Notre approche de la criticalité auto-organisée par les systèmes dynamiques suggérerait la possibilité de définir un formalisme thermodynamique (dans le sens de Sinai, Ruelle, Bowen) pour lequel on pouvait construire l'analogie formel de la fonction de partition et de l'énergie libre, pour une fonction (potentiel) qui n'est pas le hamiltonien, mais une quantité dynamiquement pertinente. Les grandes lignes de cette idée sont développées dans la section suivante. Le point important ici est qu'elle suggérerait qu'une singularité de type Lee-Yang pouvait se produire pour la fonction génératrice des lois de probabilités des observables d'avalanches. Une étude des zéros de cette fonction génératrice et des propriétés de scaling des zéros était alors envisageable, indépendamment du formalisme thermodynamique, en considérant des propriétés très générales de distribution de probabilité convergeant vers une loi de puissance dans le sens de la conjecture 2. Il découle en fait directement de cette conjecture qu'une telle singularité existe bel et bien.

Avec Jean-Louis Meunier nous nous sommes intéressés à ce problème. L'article [Cessac & Meunier, 2002] présenté dans l'annexe y est entièrement consacrée. Les résultats obtenus sont généraux: ils s'appliquent a priori à n'importe quel modèle de criticalité auto-organisée ayant des distributions de taille d'avalanche, convergeant vers une loi de puissance, avec une loi d'échelle en taille finie du type (4.14) ou (4.15). Plus généralement donc, ils caractérisent la convergence d'une loi de probabilité vers une loi limite en loi de puissance. En résumé nos conclusions sont les suivantes:

1. Si l'on considère une loi de probabilité convergeant vers une loi de la forme (4.50) avec un exposant critique obéissant aux bornes (4.51), la fonction log-génératrice (fonction génératrice des cumulants) développe une singularité lorsque $L \rightarrow \infty$, associée à un phénomène de Lee-Yang.
2. Nous calculons explicitement ces zéros pour des lois de probabilités dont on contrôle le terme de cut-off. Nous avons en particulier montré analytiquement que la présence d'un exposant critique supérieur à 1 dans la loi de puissance induit un comportement anormal en taille. Plus précisément alors que l'angle formé par les zéros de Lee-Yang est constant et directement lié à l'exposant critique α dans le modèle d'Ising par exemple, on observe dans les systèmes SOC une violation logarithmique de ce scaling. Au contraire, pour une loi de puissance d'exposant³⁶ $\tau < 1$ le scaling est normal (angle constant).

³⁶ La probabilité limite n'existe évidemment pas dans ce là. On peut cependant étudier la loi de puissance tronquée d'un système de taille finie, et analyser le comportement en taille des zéros de Lee-Yang.

3. Par ailleurs, nous avons mis en évidence une autre violation de scaling, induite elle par les effets d'échantillonnage fini, inhérents au calcul numérique et pouvant conduire à des conclusions erronées sur le comportement d'échelle des modèles SOC, lorsque l'on extrapole à la limite thermodynamique. Ce phénomène, non traité dans la littérature criticalité auto-organisée est particulièrement visible sur les zéros de Lee-Yang.

Notons que l'ensemble des résultats analytiques obtenus n'est pas réductible aux modèles SOC mais, plus généralement, concerne le lien entre les zéros de Lee-Yang et la perte d'analyticité de la fonction caractéristique de certaines familles de lois de probabilités dont les lois de puissances sont un exemple. L'article [Cessac & Meunier, 2002] comprend des résultats analytiques généraux et des résultats expérimentaux sur le modèle de Zhang. En collaboration avec E. Fitoussi (étudiant en maîtrise de Physique faisant un stage d'initiation à la recherche) nous étudions d'autres modèles, tels le modèle de Bak, Tang, Wiesenfeld, et le modèle abélien, en vue de dégager des caractéristiques universelles dans la distribution des zéros de Lee-Yang, mais aussi d'étudier systématiquement les effets dus aux biais numériques dans l'extrapolation vers la limite thermodynamique pour chacun de ces modèles.

4.3.2 Formalisme thermodynamique.

L'ensemble de nos résultats suggère que le modèle de Zhang constitue un exemple où l'on peut établir une connexion effective (pas seulement formelle) entre la théorie des systèmes dynamiques et la mécanique statique hors-équilibre. De tels exemples sont peu nombreux. On sait construire, dans les systèmes hyperboliques, des mesures de Gibbs pour lesquelles la distribution de probabilité n'est pas définie via le hamiltonien, mais, plus généralement, via un opérateur associé à des propriétés dynamiques. Un exemple typique est le jacobien le long des trajectoires. (Le théorème démontré dans [Blanchard et col., 2000] permet d'associer la mesure de Gibbs ainsi construite à la loi de probabilité de taille d'avalanche, voir l'équation (4.120)). Il est alors possible de développer un formalisme thermodynamique [89, 90, 91] dans lequel des quantités sont définies en pure analogie avec la mécanique statistique usuelle et permettent d'obtenir des informations sur la dynamique. Nous donnons maintenant les grandes lignes de cette construction dans le cadre de la théorie que nous avons développé.

Supposons que, à taille finie, pour une valeur donnée des paramètres γ on sache construire une partition de Markov finie, en subdivisant la partition naturelle. Cela signifie qu'une avalanche correspond à un symbole ω mais plusieurs symboles peuvent en général correspondre à la même avalanche. Plus précisément, à chaque ω on associe un double indice $(i(\omega), j(\omega))$ où le premier indice fait référence au site excité où l'avalanche débute et où le second indice spécifie l'avalanche. On renvoie à la section (4.2.11) pour les notations et définitions.

$\mathcal{A}$, la matrice d'incidence associée, a la propriété suivante. Soit D_ω^+ l'ensemble des éléments qui succèdent à ω dans le graphe de transition (et D_ω^- l'ensemble des prédécesseurs). On a $\#D_\omega^+ \geq N$, $\forall \omega$ puisque après l'avalanche correspondant à ω on peut exciter chaque site de Λ . Par ailleurs, la définition (4.103) de la partition de Markov implique que si $\beta, \gamma \in D_\omega^+$ et $\beta \neq \gamma$, alors nécessairement $i(\beta) \neq i(\gamma)$. Donc $\#D_\omega = N$, $\forall \omega$. En conséquence, $\mathcal{A}$ a *exactement* N composantes non nulles par ligne, chacune correspondant à un des N choix possibles du site excité.

On construit alors la matrice de transition de la chaîne de Markov, $\mathcal{W}$ à partir de $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}_{\omega, \omega'}$ étant la probabilité de la transition $\omega \rightarrow \omega'$. Puisque le site excité est choisi avec probabilité q_L $\mathcal{W}_{\omega, \omega'} = q_L(i(\omega))$. En particulier, si l'excitation est uniforme, la probabilité de transition de tout indice ω vers n'importe lequel de ces successeurs est $\frac{1}{N}$. Dans ce cas :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{N} \mathcal{A} \quad (4.109)$$

Ce résultat est encore vrai si la partition de Markov est dénombrable. On voit que $\mathcal{W}$ est une matrice diluée puisque sa dimension est au moins égale au nombre d'avalanches possibles, lui même borné inférieurement par la taille maximale (resp. aire, taille) ξ_L^s , qui croît comme une puissance de L . La proportion de composantes non nulles par lignes, r_L est donc inférieure à $\frac{N}{\xi_L^s}$, et tend vers zéro quand $L \rightarrow \infty$. Cela permet d'espérer obtenir quelques propriétés sur le spectre de $\mathcal{W}$, en particulier son gap spectral (peut-être par une théorie de matrice aléatoire).

L'ensemble des symboles $\mathcal{I}$ se décompose en noeuds transients et récurrents. Soit $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ l'ensemble des noeuds récurrents et $\mathcal{N}_L \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathcal{R}(\mathcal{I})$ le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(\mathcal{I})$. La conjecture 1 implique que l'ensemble des noeuds récurrents est irréductible³⁷.

Par ailleurs, la propriété (1.7) de convergence vers l'équilibre correspond à demander que $\mathcal{W}$ soit primitive³⁸. Dans ce cas, par le théorème de Perron-Frobenius, $\mathcal{W}$ a une unique valeur propre 1 et un unique vecteur propre à gauche m_L , correspondant à l'unique probabilité invariante de la chaîne de Markov [94]. $m_L(\omega)$ est non nulle seulement si $\omega \in \mathcal{R}(\mathcal{I})$. par ailleurs, partant de n'importe quelle distribution initiale v sur $\mathcal{I}$ on a :

$$m_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{v} \mathcal{W}^t \quad (4.110)$$

qui est l'analogie de la propriété (1.7) définissant la mesure SRB. D'autre part, il y a alors un gap spectral entre la seconde valeur propre de plus grand module et 1. Ce gap donne la vitesse de décroissance exponentielle des corrélations et aussi la vitesse de convergence vers l'équilibre. Si le modèle de Zhang a un comportement critique lorsque $L \rightarrow \infty$ et si la propriété de partition de Markov reste vraie dans cette limite³⁹, on devrait donc avoir un gap spectral tendant vers zéro quand $L \rightarrow \infty$. Cela permettrait peut-être de mettre en évidence un exposant caractérisant la divergence de la longueur de corrélation lorsque la taille du système tend vers l'infini.

m_L caractérise la probabilité d'occurrence des symboles récurrents en régime stationnaire. Elle donne en particulier accès aux distributions de probabilité des observables d'avalanche, par la relation:

$$P_L(n) = \sum_{\omega \in \mathcal{I}, n(\omega)=n} m_L(\omega) \quad (4.111)$$

où $n(\omega)$ est la valeur de l'observable n dans l'avalanche correspondant au symbole ω . A la loi marginale m_L correspond la loi conjointe $\tilde{\mu}_L$ sur l'espace des séquences symboliques infinies, $\mathcal{X}$. On obtient $\tilde{\mu}_L$ grâce à l'équation de Chapman-Kolmogorov permettant de définir la mesure de n'importe quel cylindre fini $[\tilde{\omega}]_T = \omega_1 \dots \omega_T$:

$$\tilde{\mu}_L([\tilde{\omega}]_T) = m_L(\omega_1) \mathcal{W}_{\omega_1 \omega_2} \mathcal{W}_{\omega_2 \omega_3} \dots \mathcal{W}_{\omega_{T-1} \omega_T} \quad (4.112)$$

Le théorème de Kolomogorov [92] montre alors qu'il existe alors une unique mesure (modulo les événements de mesure nulle) qui satisfait à (4.112) pour tous les cylindres. La mesure $\tilde{\mu}_L$ est conjuguée à la mesure SRB par le codage symbolique.

37. Cela *n'est pas* en contradiction avec le caractère dilué de $\mathcal{W}$. Par exemple, on peut prouver que pour une matrice diluée avec $K(m)$ composantes non nulles uniformément distribuées sur chaque ligne, m étant la taille de la matrice, l'ensemble des noeuds est presque-sûrement constitué d'un cluster irréductible et récurrent quand m tend vers l'infini pourvu que $K(m) > \log(m)$ [93]

38. Il existe $n \geq 1$ tel que, pour chaque couple i, j $\mathcal{W}^n(i, j) > 0$, c'est-à-dire qu'il y a un chemin connectant i, j avec probabilité positive.

39. Si elle n'est pas vérifiée, on peut définir l'analogie de $\mathcal{W}$ sur un espace de densités de probabilités sur Ω , l'opérateur de Perron-Frobenius. Dans les systèmes hyperboliques, cette opérateur a un gap spectral caractérisant la vitesse de décroissance exponentielle des corrélations et aussi la vitesse de convergence vers l'équilibre. La perte d'hyperbolicité discutée dans la section 4.2.8 est une condition nécessaire à une décroissance algébrique des corrélations et au ralentissement critique.

La connaissance de la matrice de transition $\mathcal{W}$ permet en principe de déterminer m_L et le gap spectral. Malheureusement sa structure fine n'est pas connue en général. Un cas intéressant mais très spécifique se produit lorsque le nombre de prédécesseurs de ω , $\#D_\omega^-$, est également égal à N , $\forall \omega$. Cela se produit par exemple en dimension 1 pour $E_c \in]1, 2]$, $\epsilon = 0$ [Blanchard et col., 2000]. Dans ce cas $\mathcal{W}$ est bi-stochastique et m_L est la *mesure uniforme*, $m_L(\omega) = \frac{1}{N_L}$, sur $\mathcal{R}(\mathcal{I})$.

Nous discutons maintenant brièvement du formalisme thermodynamique. On trouvera les détails dans [91, 90, 57, 58]. Tout d'abord, plutôt que de considérer l'espace des séquences bi-infinies $\mathcal{X}$ il est classique de ne considérer que les séquences infinies à droite correspondant à l'espace $\mathcal{X}^+$. Il existe une analogie formelle entre une suite de $\mathcal{X}^+$ et une chaîne de spins monodimensionnelle de spins de "Potts" prenant leurs valeurs dans $\mathcal{I}$. La matrice de transition $\mathcal{A}$ joue le rôle d'un potentiel de coeur dur puisque, si le spin au point t de la chaîne a une valeur ω_t , le spin suivant (en $t + 1$) ne peut prendre ses valeurs que dans le sous-ensemble de $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{A}_{\omega_t, \omega_{t+1}} = 1$. Les autres transitions sont interdites. Ce formalisme permet d'étudier des mesures ergodiques dynamiquement pertinentes en tant qu'analogie formel des mesures de Gibbs dans une chaîne de spins.

Sur $\mathcal{X}^+$ on définit une distance $d_\theta(x, y) = \theta^N$ on $\mathcal{X}^+$, où N est le plus grand entier non négatif tel que $x_i = y_i$, $i < N$ et où $0 < \theta < 1$ [58]. Cela définit une topologie sur cet ensemble et on note $F(\mathcal{X}^+)$ l'espace des fonctions telles que :

$$var_n(\phi) \leq C\theta^n, n \geq 0 \quad (4.113)$$

pour un $C > 0$, un $\theta \in]0, 1[$, et où $var_n(\phi) = \sup \{|\phi(x) - \phi(y)|, x_i = y_i, i < n\}$. (Cette propriété correspond, en mécanique statistique, à la décroissance exponentielle des interactions avec la distance, assurant l'existence d'une limite thermodynamique [84, 96]). Un élément de $F(\mathcal{X}^+)$ est appelé un *potentiel*. Un potentiel de *rang fini* d'ordre r est tel que $\phi(x) = \phi(y)$ si $x_i = y_i$ pour $0 \leq i < r$. Cela signifie que ϕ dépend seulement des r premiers symboles (resp. des r premiers spins). Tout potentiel de rang infini peut-être approximé uniformément dans $F_\theta(\mathcal{X}^+)$ par une séquence de potentiels de rang r . Un potentiel de rang 1 est appelé *potentiel de Bernoulli*.

Soit :

$$S_T\phi(\tilde{\omega}) = \sum_{t=1}^T \phi(\sigma_{\mathcal{A}}^t \tilde{\omega})$$

où ϕ est un potentiel et où $\sigma_{\mathcal{A}}$ est le décalage sur les séquences avec une grammaire donnée par $\mathcal{A}$. On définit la *fonction de partition à taille finie* par :

$$Z_T(\phi) = \sum_{\tilde{\omega} \in \mathcal{X}_T^+} \exp S_T\phi(\tilde{\omega}) \quad (4.114)$$

et la *pression* (resp. l'énergie libre par spin) par :

$$\mathcal{F}(\phi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(\phi) \quad (4.115)$$

On peut prouver que cette limite existe pourvu que ϕ décroisse suffisamment vite (eq.(4.113)), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de "transition de phase" si le potentiel appartient à $F(\mathcal{X}^+)$. Une mesure invariante μ_ϕ est une *mesure de Gibbs* si il existe A tel que $\forall T > 0$ et $\omega \in \mathcal{X}_T^+$

$$A^{-1} \leq \frac{\mu_\phi([\tilde{\omega}]_T)}{e^{S_T\phi(\tilde{\omega}) - T\mathcal{F}(\phi)}} \leq A \quad (4.116)$$

Cela signifie que μ_ϕ est exponentielle avec un poids correspondant à la somme des valeurs de ϕ sur le cylindre $[\tilde{\omega}]_T$. ϕ joue ainsi le rôle de l'énergie dans la distribution de Gibbs de la mécanique

statistique. Comme $Z_T(\phi) \sim e^{T\mathcal{F}(\phi)}$ la mesure d'un cylindre de longueur T est $\sim \frac{\exp(\sum_{t=1}^T \phi(\sigma^t \tilde{\omega}))}{Z_T(\phi)}$. Cela correspond, en mécanique statistique, à fixer les T premiers spins et à intégrer sur tous les autres.

La mesure μ_ϕ satisfait un *principe variationnel* analogue au principe de minimisation de l'énergie libre en mécanique statistique. Soit $h(\mu)$ l'entropie d'une mesure μ alors la quantité

$$h(\mu) + \int \phi d\mu$$

admet un *unique maximum* pour $\mu = \mu_\phi$, égale à la pression $\mathcal{F}(\phi)$, si $\mathcal{A}$ est primitive (*principe variationnel*). La mesure qui maximise $\mathcal{F}(\phi)$ est naturellement appelée *état d'équilibre*. Tout état d'équilibre est un état de Gibbs.

La pression a d'autres caractéristiques communes avec l'énergie libre. Elle est convexe, et surtout c'est la fonction génératrice des valeurs moyennes d'observables relativement à μ_ϕ . Plus précisément on montre [58, 57] que, si $\phi, \eta \in F_\theta$, et si l'on pose $\mathcal{P}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(\phi + t\eta)$, où $t \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathcal{P}'(0) = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\phi + t\eta) \right|_{t=0} = \int \eta d\mu_\phi \stackrel{\text{def}}{=} E[\eta]_\phi \quad (4.117)$$

où $E[\cdot]_\phi$ est la moyenne par rapport à μ_ϕ . On a là une formule tout à fait analogue à celle qui donne l'aimantation en dérivant par rapport à un champ magnétique local externe. De même :

$$\sigma_\phi^2(\eta) = \mathcal{P}''(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E[\eta(t)\eta(0)]_\phi - E[\eta]_\phi^2 \quad (4.118)$$

où $E[\eta(t)\eta(0)]_\phi - E[\eta]_\phi^2$ est la fonction de corrélation de η , au temps t , relativement à la mesure μ_ϕ . cette formule se généralise aux corrélations entre différents observables et à des ordres plus élevés [50] donnant par exemple accès à des coefficients de transport de Green-Kubo dans certains modèles [50, 51].

On donne maintenant quelques exemples de potentiels pertinents pour l'étude du modèle de Zhang. Tout d'abord la mesure SRB $\hat{\mu}_L$ est l'état d'équilibre qui maximise le potentiel $-\log(\det(\pi^u(D\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{x}}}))$) [57]. Dans le modèle de Zhang ce potentiel est constant égal à $-\log(N)$ si l'excitation est uniforme. Il s'en suit, par le principe variationnel que, dans le modèle de Zhang, la mesure SRB maximise l'entropie. Comme l'entropie métrique maximale est l'entropie topologique $\log(N)$, il en découle que la mesure SRB a une pression nulle dans ce modèle si l'excitation est uniforme⁴⁰.

On peut également introduire d'autres potentiels, généralisant celui que l'on vient de voir et donnant à la fois des informations sur la distribution des tailles d'avalanches et sur la géométrie fractale de l'attracteur. Considérons d'abord la famille à un paramètre:

$$\phi_\beta^1(\tilde{\omega}) = -\log(N) + \beta \log(\det(DT_{\omega_1})) \quad (4.119)$$

et appelons μ_β l'état de Gibbs correspondant (les potentiels ϕ_β^1 sont Bernoulli et donc obéissent à (4.113)).

Pour $\beta = 0$ on retrouve la mesure SRB. Par ailleurs, la quantité $\log(\det(DT_{\omega_1}))$ est la contraction volumique induite par $\mathcal{T}$ dans l'espace des configurations d'énergie. L'équation (4.56) liant le déterminant de la matrice jacobienne à la taille d'avalanche implique:

$$\phi_\beta^1(\tilde{\omega}) = -\log(N) + \beta \log(\epsilon)s(\omega_1) \quad (4.120)$$

40. De manière plus générale la pression pour cet observable est liée à l'entropie du décalage sur les séquences d'excitations.

et il est aisé de retrouver l'équation (4.96) qui lie la contraction locale à la taille moyenne des avalanches en utilisant la propriété (4.117).

Plus généralement, on peut obtenir la distribution de probabilité d'un observable d'avalanche n à partir du potentiel :

$$\phi_\eta(t, \tilde{\omega}) = -\log(N) + \eta_t n(\omega_t) \quad (4.121)$$

où $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_t, \dots)$, et :

$$Z_T(\eta_1, \dots, \eta_T) = N^{-T} \sum_{\omega \in \mathcal{X}_T^+} e^{\sum_{t=1}^T \eta_t n(\omega_t)} \quad (4.122)$$

Cette fonction la forme du fonctionnelle génératrice (qui n'est pas sans rappeler la fonctionnelle génératrice (2.18) du chapitre 2). En effet la pression :

$$\mathcal{F}_L(\eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(Z_T(\eta_1, \dots, \eta_T)) \quad (4.123)$$

génère les corrélations d'ordre k de l'observable n :

$$\left. \frac{\partial^k \mathcal{F}_L(\eta)}{\partial \eta_1 \dots \partial \eta_k} \right|_{\eta=0} = \langle n_1; n_2; \dots; n_k \rangle_L \quad (4.124)$$

En particulier, les cumulants $C_L(k)$ de $P_L(n)$ sont donnés par :

$$\left. \frac{\partial^k \mathcal{F}_L(\eta)}{\partial \eta_1^k} \right|_{\eta_1=0} = C_L(k) = \left. \frac{\partial^k G_L(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} \quad (4.125)$$

où :

$$G_L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \log(\langle e^{tn} \rangle_L) = \log\left(\sum_{n=0}^{\xi_L^n} P_L(n) e^{tn}\right) \quad (4.126)$$

est la fonction génératrice des cumulants de $P_L(n)$.

Ceci reste malheureusement très formel tant que l'on n'a pas plus d'informations notamment sur $\mathcal{W}$. Néanmoins, l'expression (4.123) a au moins un intérêt: c'est par elle que nous est venue l'idée d'analyser des modèles de criticalité auto-organisée par les zéros de Lee-Yang. L'idée est en effet que, si à la limite thermodynamique on a effectivement perte d'hyperbolicité, évanescence du gap spectral, et l'analogue d'un phénomène critique, on devrait voir une perte d'analyticité dans (4.123). Cette fonction étant hors d'accès pour l'instant, l'idée était alors de considérer la fonction (4.126), aisément accessible numériquement. La visualisation numérique du phénomène de pincement pour les zéros de $\exp(G_L(t))$, lorsque L grandit, fut un moment de grande émotion...

Pour en finir avec les potentiels, deux mots sur les liens possibles entre géométrie fractale de l'attracteur et propriétés des avalanches. Le potentiel :

$$\phi_{\beta,q}^2(\tilde{\omega}) = -q \log(N) + \beta \log(\det(DT_{\omega_1})) = -q \log(N) + \beta \log(\epsilon) s(\omega_1) \quad (4.127)$$

permet, dans les systèmes de fonctions itérées *conformes*, de calculer le spectre multifractal. A chaque q correspond un unique $\beta(q)$ tel que :

$$\mathcal{F}_L^2(\phi_{\beta(q),q}) = 0 \quad (4.128)$$

et le spectre multifractal est la transformée de Legendre de $\beta(q)$ [69]. Bien que le modèle de Zhang ne soit pas conforme, ce potentiel, qui fait intervenir explicitement la taille des avalanches peut, peut-être, nous livrer quelques informations utiles.

Dans un système de fonctions itérées non conforme le potentiel qui permet de calculer le spectre multifractal est construit ainsi [95]. Soient $\alpha_i(\tilde{\omega}, k)$, $i = 1 \dots N, k = 1 \dots \infty$ les valeurs singulières de l'application $T_{\omega_k} \circ \dots \circ T_{\omega_1}$ ordonnées en sorte que $1 \geq \alpha_1(\tilde{\omega}, k) \geq \dots \geq \alpha_N(\tilde{\omega}, k) > 0$ (remarquons qu'il y a un k fini tel que, $\forall \tilde{\omega}, \forall l > k, 1 > \alpha_1(\tilde{\omega}, l)$). On définit :

$$g_\beta(\tilde{\omega}, k) = \alpha_1(\tilde{\omega}, k) \alpha_2(\tilde{\omega}, k) \alpha_{j-1}(\tilde{\omega}, k) (\alpha_j(\tilde{\omega}, k))^{\beta-j+1}, \quad \text{if } 0 < \beta \leq N \quad (4.129)$$

$$g_\beta(\tilde{\omega}, k) = (\det(T_{\omega_k} \circ \dots \circ T_{\omega_1})^{\frac{\beta}{N}}) = \epsilon^{\frac{\beta}{N} \sum_{l=1}^k s(\omega_l)}, \quad \text{if } \beta \geq N \quad (4.130)$$

où dans l'équation (4.129), j est l'entier tel que $j-1 < \beta \leq j$. On considère le potentiel (sous-additif⁴¹) :

$$\phi_{\beta, q, k}^3(\tilde{\omega}) = -q \log(N) + \log(g_\beta(\tilde{\omega}, k)) \quad (4.131)$$

et la pression;

$$\mathcal{F}_L^3(\phi_{\beta, q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{\omega \in \chi_k^+} \phi_{\beta, q, k}^3(\tilde{\omega}) \quad (4.132)$$

Il existe alors un unique $\beta \equiv \beta(q)$ tel que la pression $\mathcal{F}_L^3$ correspondante s'annule [95]. Les nombres $\beta(q)$ sont les dimensions de Reyni, et le spectre multifractal est la transformée de Legendre de $\beta(q)$. Le problème est bien sûr de relier les valeurs singulières des T_ω aux propriétés des avalanches. Ce travail est en cours.

Dans cet ordre d'idée un des points que nous explorons actuellement est le suivant. On a montré plus haut qu'il existe une relation entre la structure fractale de l'attracteur et l'exposant critique de taille d'avalanche. Comme la dimension de Hausdorff dépend continûment du paramètre de seuil (énergie critique) une question naturelle est : l'exposant critique de taille d'avalanche est-il aussi une fonction de la dimension de Hausdorff et donc du paramètre? En collaboration avec S. Sequeira (étudiante en thèse à Bielefeld sur le thème "Méthodes d'analyses de systèmes critiques auto-organisés") et Ph. Blanchard, nous nous intéressons à cette question. Nous calculons actuellement la dimension de Kaplan-Yorke (identique à la dimension de Hausdorff si la mesure est SRB), obtenue directement à partir du spectre de Lyapunov, et nous étudions sa dépendance dans l'énergie critique. Nous étudierons ensuite la dépendance de l'exposant critique.

4.3.3 Conclusion.

Dans ce chapitre nous avons montré comment les techniques des systèmes dynamiques et de la mécanique statistique pouvaient être combinées pour obtenir des résultats originaux sur un modèle de criticalité auto-organisée, le modèle de Zhang. Outre ce qu'ils nous apprennent sur la criticalité auto-organisée, ils montrent également que ce modèle au comportement extrêmement riche est l'un des rares exemples de systèmes dynamiques pour lesquels on peut faire un passage du microscopique vers le macroscopique. On a vu qu'il y avait un certain nombre de questions techniques à résoudre, directement liées à des propriétés physiques. En particulier, si l'on parvient assez bien à décrire le système à taille finie, on a vu tout au long de ce chapitre que, lorsque la taille tend vers l'infini, un grand nombre de difficultés mathématiques surgissent. Durant les années où nous avons travaillé sur ce sujet, nous avons essayé de mettre en place un formalisme thermodynamique, permettant ensuite, de définir la limite thermodynamique de façon analogue à la mécanique statistique. On a vu cependant,

41. On considère donc ici le cadre plus général d'un formalisme thermodynamique non additif (voir [97, 98]).

notamment dans la section 4.3.2 que le chemin restant était encore long. Le challenge est néanmoins important. D'une part, il s'agit de développer des nouvelles méthodes d'analyse pour des systèmes exhibant des singularités et des corrélations à longue portée, certainement pertinents pour modéliser des phénomènes naturels. D'autre part, ces techniques pourraient permettre, par un effet retour, d'analyser de façon différente des systèmes dynamiques plus simples. Cela ouvre quelques perspectives dont je discute dans le chapitre suivant.

Ce travail de longue haleine a été très enrichissant pour moi, à bien des égards. Mais finalement, je dirais que la plus grande leçon, et le sujet qui m'anime le plus maintenant, a été de découvrir certes que les effets de taille finis pouvaient d'une part permettre d'anticiper le comportement limite, certes qu'ils pouvaient induire des comportements d'une certaine façon beaucoup plus complexes que celui du système limite, mais surtout, qu'il était *possible de les analyser*. Cela ouvre d'autres perspectives brièvement évoquées dans le chapitre suivant.

Bibliographie

- [1] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K., "Self organised criticality: An explanation of $1/f$ noise", Phys. Rev. Lett., Vol 59, Num 4, (1987), 381- 384.
- [2] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K., "Self organised criticality", Phys. Rev. A., Vol 38, Num 1, (1988), 364-374.
- [3] Scholz, C.H., "The mechanics of earthquakes and Faulting", Cambridge University Press (1990).
- [4] Scholz, C.H., in T. Riste and D. Sherrington (eds.), "Spontaneous formation of space time structures and criticality", Dordrecht, Kluwer (1991).
- [5] Sornette D. in T. Riste and D. Sherrington (eds.), "Spontaneous formation of space time structures and criticality", Dordrecht, Kluwer (1991).
- [6] Durin G., Bertotti G., Magni A., Fractals 3, 351, (1995). Spasojevic D., Burkvic S., Milosevic S., Stanley H.E., Phys. Rev. E 54, 2531, (1996).
- [7] Field S., Witt J., Nori F., Ling X., Phys. Rev. Let. 74, 1206, (1995).
- [8] Plourde B., Nori F., Bretz M., Phys. Rev. Let. 71, 2749, (1993)
- [9] Lilly M.P., Finley P.T., Hallock R.B., Phys. Rev. Let., 71, 4186, (1993). Sahimi M., Rev. Mod. Physics, 65, 1393, (1993).
- [10] Petri A., Paparo G., Vespignani A., Allipi A., Constantini M., Phys. Rev. Let., 73, 3423, (1994).
- [11] Lu E.T., Hamilton R.J., Astrophys. J., 380, L89, (1991).
- [12] Bak P., Paczuski M., Shubik M., Physica A, 246, 430, (1997).
- [13] Bak P., Chen K., Scheinkman J.A., Woodford M., Recherche Economique, 47, 3, (1993).
- [14] Bak P., Sneppen K., Phys. Rev. Let., 71, 4083, (1993).
- [15] Gould S.J., Paleobiology 3, 135, (1977).
- [16] Raup M.D., Science 231, 1528, (1986).
- [17] Gutenberg G., Richter C.F., Ann. Geophys., (CNRS), 9, 1, (1956)
- [18] GK Zipf, "Selective Studies and the Principle of Relative Frequency in Language" (?, 1932) GK Zipf, "Psycho-Biology of Languages", Houghton-Mifflin, 1935; MIT Press, 1965. GK Zipf, "Human Behavior and the Principle of Least Effort" (Addison-Wesley, 1949).
- [19] Blanchard Ph., Bolz G., Krüger T., "Stochastic modelling on random graphs of the spread of sexually transmitted diseases", in M. Schauzu, editor. Progress in AIDS-Research in the Federal Republik of Germany, München 1990, MMV-Verlag; "Modelling AIDS-epidemics or any venereal diseases on random graphs", in J.-P. Gabriel, C. Lefèvre, P. Picard, editors, Stochastic Processes in Epidemic Theory, vol. 86 of Lecture Notes in Biomathematics, Berlon, Heidelberg, 1990; Blanchard Ph., Krüger T., "Die Ausbreitung von AIDS: Zufall und Komplexität" in A. Bachern, M. Jünger, R. Schrader, editors, "Mathematik in der Praxis" (Springer, 1995).
- [20] Chialvo D.H., Bak P., Neuroscience, 90, 1137, (1999).
- [21] Clastres X. "Codage de l'information visuelle dans les réseaux neuromimétiques", Thèse de doctorat, 1998.

- [22] Bak P. "How Nature works: the science of Self-Organized Criticality.", Springer-Verlag (1996), Oxford University Press (1997).
- [23] Zhang Y-C. "Scaling theory of Self-Organized Criticality", Phys. Rev. Lett., Vol 63, Num 5 (1988), 470-473.
- [24] Pietronero L., Tartaglia P., Zhang Y.C., "Theoretical studies of Self-Organized Criticality", Physica A 173, (1991), 22-44.
- [25] D. Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990) D. Dhar and S.N. Majumdar, J. Phys. A **23**, 4333 (1990); S.N. Majumdar and D. Dhar, Physica A **185**, 129 (1992). D. Dhar and R. Ramaswamy, Phys. Rev. Lett. **63**, 1659 (1989).
- [26] Pour une revue voir D. Dhar "Studying Self-Organized Criticality with exactly solved models", cond-mat/9909009 et "The Abelian sandpile and related models", cond-mat/9808047.
- [27] Dhar D., Ruelle Ph., Sen S., Verma D.N., "Algebraic aspects of abelian sandpile models", J. Phys. A, 28, 805, (1995).
- [28] Jensen H.J., "Self-Organized Criticality Emergent Complex Behavior in Physical and Biological systems", Cambridge Lecture Notes in Physics 10, Cambridge University Press (1998).
- [29] Ma S.K., "Modern theory of critical phenomena", Benjamin-Cummings reading (1976).
- [30] Hohenberg P.C., Halperin B.I., Rev. Mod. Phys., 49, 435, (1977).
- [31] Hwa T., Kardar M., "Dissipative transport in open systems: an investigation of Self-Organized Criticality", Phys. Rev. Lett. Vol 62, Num. 16, 1813, (1989).
- [32] Grinstein G., Lee D.H., Sachdev S., "Conservation laws, anisotropy, and self-organized criticality in noisy non-equilibrium systems", Phys. Rev. Lett., Vol. 64, Num. 16, 1813, (1990).
- [33] Hentschel H.G.E., Family F., "Scaling in open dissipative systems", Phys. Rev. Lett., Vol 66, Num 15, 1982 (1991).
- [34] Carlson J.M., Chayes J.T., Grannan E.R., Swindle G. H., "Self-Organized Criticality in sandpile: Nature of the critical phenomenon.", Phys. Rev. A, Vol. 42, Num. 4, 2467, (1990). Carlson J.M., Chayes J.T., Grannan E.R., Swindle G. H., "Self-Organized Criticality and singular diffusion", Phys. Rev. Lett., Vol. 65, Num. 20, 2547, (1990).
- [35] Kipnis C., Olla S., Varadhan S. R. S., Com. Pure App. Math., 42, 115, (1989).
- [36] Bak P., Tang C., "Critical exponents and scaling relations for Self-Organized critical phenomena", Phys. Rev. Lett., Vol 60, Num 23, 2347-2350, (1988).
- [37] Manna S., "Large scale simulation of avalanche cluster distributions in sandpile models", Jour. Stat. Phys., Vol 59, Num 1/2, 509, (1990).
- [38] Grassberger P., Manna S., "Some more sandpiles", J. Phys France, 51:1077, (1990)
- [39] Bantay P., Jànosi M., "Self-organization and anomalous diffusion", Physica A 185, (1992), 11-18. Bantay P., Jànosi M., "Avalanche dynamics from anomalous diffusion", Phys. Rev. Lett., Vol 68, Num 13, 2058, (1992).
- [40] Díaz-guilera, "Dynamic renormalization group approach to self-organized critical phenomena", Europhys. Lett. 26 (3), (1994), 177-182; Díaz-guilera, "Noise and dynamics of self-organized critical phenomena", Phys. Rev. A, Vol 45, Num 12, (1992), 8551-8558.
- [41] Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou S., "Scaling and universality in avalanches", Phys. Rev. A, Vol 39, Num 12, 6524-6527, (1989)
- [42] Lise S., Paczuski M., "Self-Organized Criticality and Universality in a Nonconservative Earthquake Model", Phys. Rev. E, Vol. 63, (2001); eprint cond-mat/0008010
- [43] Tebaldi C., De Menech M., Stella A., "Multifractal scaling in the Bak-Tang-Wiesenfeld Sandpile",
- [44] Pastor-Satorras R., Vespignani A., "Anomalous scaling in the Zhang model", Eur. Phys. J. B 18, 197-200 (2000); eprint cond-mat/0010223

- [45] Sornette D., "Critical phase transitions made self-organized: a dynamical system feedback mechanism for self-organized criticality.", J. Phys. I, France, 2, 2065, (1992). Sornette D., Johansen A., Dornic I., "Mapping Self-Organized Criticality onto Criticality", J. Phys. France 5 (1995) 325-335. Lee M., Sornette D., "Novel mechanism for discrete scale invariance in sandpile models", cond-mat/9903402.
- [46] Vespignani A., Zapperi S., "How self-organized criticality works: A unified mean-field picture." *Physical Review E* **57**, 6345 (1998).
- [47] L. Pietronero, A. Vespignani, and S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. **72**, 1690 (1994); A. Vespignani, S. Zapperi, and L. Pietronero, Phys. Rev. E **51**, 1711 (1995).
- [48] C. Maes, F. Redig, E. Saada and A. Van Moffaert (2000) On the thermodynamic limit for a one-dimensional sandpile process, Markov Processes and Related Fields 6, 1-21.
- [49] Conférence Eurandom, Décembre 2001, Eindhoven.
- [50] Gaspard P. "Chaos, scattering and statistical mechanics", Cambridge Non-Linear Science series 9, (1996).
- [51] "AN INTRODUCTION TO CHAOS IN NONEQUILIBRIUM STATISTICAL MECHANICS", Cambridge University Press, (1999)
- [52] Cafiero R., Loreto V., Pietronero L., Vespignani A., Zapperi S., "Local rigidity and self-organized criticality for avalanches", Europ. Let., 29, (2), 111, (1995).
- [53] Katok A., Hasselblatt B., "Introduction to the modern theory of dynamical systems", Kluwer (1998).
- [54] Ruelle D. "Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics", preprint chao-dyn 9812032.
- [55] Luebeck S. "Large-scale simulations of the Zhang sandpile model", Phys. Rev. E., Vol. 56, Num. 2, 1590-1594, (1997)
- [56] Young L.S. "Ergodic theory of differentiable dynamical systems"
- [57] Keller G., "Equilibrium states in ergodic theory", Cambridge university press (1998)
- [58] Parry W., Pollicott M. "Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics", Collection Asterisque 187-188, Société Mathématique de France, (1990).
- [59] Oseledec V.I., "A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems.", Transaction of the Moscow Mathematical Society, 19 (1968), 179-210.
- [60] Pesin Y. "Lyapunov characteristic exponents and ergodic properties of smooth dynamical systems with an invariant measure", Sov. Math. Dok., 17, 196-199, (1976). Pesin Y., "Families of invariant manifolds corresponding to non-zero Lyapunov exponents", Izvestija, 10, 1261-1305 (1976); Pesin Y, Sinai Y, "Hyperbolicity and stochasticity of dynamical systems", Math. Phys. Rev., 2, 53-115, (1981)
- [61] Pollicott M. "Lectures on ergodic theory and Pesin Theory on compact manifolds", London Math. Soc., Lect. Notes Series 180, Cambridge University Press, (1993).
- [62] Ledrappier F., Young L. S., "The metric entropy for diffeomorphisms", Annals of Math. 122, (1985) 509-574
- [63] Koroliouk V., Portenko N., Skorokhod A., Tourbine A., "Aide-Mémoire de théorie des probabilités et de statistique mathématique", Editions Mir, Moscou. (1978).
- [64] Krueger T., Troubetzkoy S. "Markov partitions and shadowing for nonuniformly hyperbolic systems with singularities, Ergodic Theory Dynamical Systems 12 487-508, (1992).
- [65] Sarig O.M., "Thermodynamic formalism for countable markov shifts", Ergod. Th. & Dyn. Sys. 19, 1565-1593, (1999).
- [66] Hutchinson J. E. "Fractals and Self-Similarity", Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No 5 (1981)

- [67] Barnsley M., "Fractals everywhere", Academic Press, Boston (1988).
- [68] Falconer K. "Fractal geometry", John Wiley - sons, 199..
- [69] Falconer K. "Techniques in fractal geometry", John Wiley - sons, 1997.
- [70] Eckmann J.P., Ruelle D., "Ergodic Theory of Strange attractors" Rev. of Mod. Physics, 57, 617 (1985). Eckmann J.P., Kamphorst O., Ruelle D., Ciliberto S. Phys. Rev. A, 34, 4971 (1986).
- [71] Yang C.N, Lee T.D., "Statistical theory of equations of state and phase transitions I. Theory of condensation", Phys. Rev., Vol 87, Num 3, 404-409 (1952); "Statistical theory of equations of state and phase transitions II. Lattice Gas and Ising model", Phys. Rev., Vol 87, Num 3, 410-419 (1952).
- [72] Abe, R. "Note on the critical behaviour of Ising ferromagnets", Prog. Theor. Phys., Vol. 38, Num. 1 (1967)
- [73] Suzuki M., "A theory of the second order transition in spin systems", Prog. Theo. Phys., Vol. 38, Num. 6, 1225-1242, (1967).
- [74] M. Biskup, C. Borgs, J.T. Chayes, L.J. Kleinwaks, R. Kotecky, "A General Theory of Lee-Yang Zeros in Models with First-Order Phase Transitions", preprint math-ph/0004003, to appear in Phys. Rev. Lett
- [75] Grossmann S., Rosenhauer W., "Phase transitions and the distribution of temperature zeros of the Partition function", Zeit. Phys., 218, 138 (1967).
- [76] Ruelle D., Com. Math. Phys., 31, 265-277, (1973).
- [77] Newman C.M., "Nondiscrete spins and the Lee-Yang Theorem", Constructive Quantum Field Theory (G. Velo and A.S. Wightman, Eds.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, 321-325; "Zeros of the partition function for generalized Ising systems", Commun. Pure Appl. Math 27 (1974), 143-159; "Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee-Yang theorem", Commun. Math. Phys. 41 (1975)
- [78] Lieb E., Sokal A.D., "A General Lee-Yang Theorem for one component and multicomponent ferromagnets", Com. Math. Phys., 80, 153-179, (1981).
- [79] Borgs C., Imbrie J.Z., Com. Math. Phys., 123, 305-328, (1989).
- [80] Salas J., Sokal A.D., "TRANSFER MATRICES AND PARTITION FUNCTION ZEROS FOR ANTIFERROMAGNETIC POTTS MODELS. 1. GENERAL THEORY AND SQUARE LATTICE CHROMATIC POLYNOMIAL." e-Print Archive: cond-mat/0004330; Sokal A.D., "CHROMATIC POLYNOMIALS, POTTS MODELS AND ALL THAT", Physica A279:324-332,(2000) e-Print Archive: cond-mat/9910503.
- [81] Salas J., Sokal A.D., "LOGARITHMIC CORRECTIONS AND FINITE SIZE SCALING IN THE TWO-DIMENSIONAL FOUR STATE POTTS MODEL", J.Statist.Phys.88:567-615,1997
- [82] Janke W., Kenna R. "The strength of first and second order phase transitions from partition function zeroes", Jour. Stat. Phys., Vol 102, Num 5/6, 1221-1227 (2001)
- [83] Creswick R.J., Kim S.Y., "Finite-Size Scaling of the density of zeros of the partition function in first and second order transitions", Vol. 56, Num. 3, (1997).
- [84] Ruelle D. "Statistical Mechanics: Rigorous results" Benjamin, New York (1969).
- [85] Ruelle D., "Grace-like polynomials", preprint math-ph/0009030
- [86] Itzykson C., Pearson R.B., Zuber J.B., "Distribution of zeros in Ising and Gauge models", Nuclear Physics B220[FS8], 415-433, (1983).
- [87] Privman V., Fisher M.J., "Universal critical amplitudes in finite-size scaling", Phys. Rev. B, Vol. 30, Num. 1, (1984).
- [88] Glasser M.L., Privman V., Schulman L.S., "Complex-temperature-plane zeros: Scaling theory and multicritical mean-field models", Phys. Rev. B, Vol 33, Num. 4 (1987).

- [89] Sinai Ya. G. , “Gibbs measures in ergodic theory”, Russ. Math. Surveys, 27 No 4, 21-69, (1972)
- [90] Ruelle D. “Thermodynamic formalism” (1978). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- [91] Bowen R. “Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms”, Lect. Notes in Math., Vol. 470, Berlin: Springer-Verlag (1975).
- [92] Skorhokod “Processus aléatoires”, Editions Mir, Moscou.
- [93] Flajolet Ph., Theoretical Computer Science 215(1-2), 1999, pp. 371-381.
- [94] Seneta, “Non-Negative matrices”, G. Allen and Unwin, London, (1973).
- [95] Falconer K.J., “Generalized dimensions of measures on self-affine sets”, Nonlinearity 12, (1999), 877-891.
- [96] Meyer D.H., “The Ruelle-Araki transfer operator in classical statistical mechanics”, Lecture Notes in Physik, 123, Springer-Verlag.
- [97] Falconer K.J., “Bounded distortion and dimension for non-conformal repellers”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 115, 315-334, (1994)
- [98] Barreira L.M., “A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems”, Ergod. Theor. Dynam. Syst. 16, 871-927, (1998).

Chapitre 5

Annexe B

Cette annexe contient quatre articles originaux.

1. Blanchard Ph., Cessac B. Krüger T., "A dynamical system approach to SOC models of Zhang's type." *Jour. of Stat. Phys.*, 88 (1997), 307-318.
2. Blanchard Ph., Cessac B., Krüger T., "What can one learn about Self-Organized Criticality from Dynamical System theory?". *Jour. of Stat. Phys.*, 98 (2000), 375-404.
3. Cessac B., Blanchard Ph., Krüger T., "Lyapunov exponents and transport in the Zhang model of Self-Organized Criticality.", *Phys. Rev. E*, Vol. 64, 016133, 1-16, (2001).
4. Cessac B., Meunier J.L., "Anomalous scaling and Lee-Yang zeroes in Self-Organized Criticality.", *Phys. Rev. E*, Vol 65, 036131, 1-18 (2002).

Chapitre 6

Nouvelles perspectives.

Dans les trois sections suivantes je décris très brièvement mes nouvelles directions de recherche.

6.1 Transport d'information dans un réseau d'unités chaotiques.

En collaboration avec J.A. Sepulchre (chercheur INLN) et S. Rolandez (stagiaire de DEA) nous nous intéressons au problème suivant. Etant donné un système dynamique formé d'un grand nombre d'unités couplées qui interagissent de façon non-linéaire, l'approche traditionnelle des systèmes dynamiques à grands nombres de degrés de liberté ou de la physique statistique est de considérer un ensemble de variables globales du système, ("paramètres d'ordre", variables macroscopiques moyennes) qui rendent compte de manière précise de l'état du système étudié, ainsi que des changements d'états (bifurcation ou transitions de phase). Dans cette approche, on ne s'intéresse donc pas au comportement individuel des unités du réseau. Il existe cependant des systèmes dynamiques dans lesquels il est nécessaire de considérer le comportement individuel des unités. Un exemple typique est celui du réseau de neurones présenté dans le chapitre 2 où les liens synaptiques peuvent être modifiés suivant certaines règles d'apprentissage. Dans ce type de système, la différenciation des unités, qui existe naturellement, peut se manifester de façon dynamique ou être renforcée au cours du temps. Cette intuition justifie le point de vue qu'il peut-être aussi utile de regarder la dynamique à un niveau plus fin que ne le permet l'approche macroscopique. Ainsi un certain nombre de questions émergent naturellement. Etant donné un réseau d'unités couplées, interagissant de façon non linéaire et non symétrique, est-il possible de mettre en évidence:

- Une différenciation dynamique: Certaines unités ont-elles un rôle plus important que d'autres dans la dynamique. Par exemple que se passe t'il si l'on soumet une unité donnée à une perturbation? si l'on enlève cette unité du réseau? Ou, au contraire, ont-elles toutes un rôle équivalent?
- Y a t'il création de circuits dynamiques d'influence entre unités, créés par la conjonction de la connectivité initiale et du couplage non linéaire? Y a t'il une connectivité effective où certaines unités sont plus influentes que d'autres?
- La notion d'influence ou de différenciation dynamique est-elle statique ou évoluant lentement dans le temps?

Que l'on pense à la dynamique neuronale, à la dynamique de réseaux immunitaires ou génomique, à la dynamique d'Internet ou à la dynamique boursière où les agents jouent le rôle d'unités, ce type de question mérite d'être posé. Pour y apporter des éléments de réponse, nous développons actuellement des outils théoriques et numériques tels une matrice de connectivité effective calculée à partir de la fonction de corrélation entre unités, la susceptibilité dynamique, ou l'information mutuelle. Ces outils sont d'abord testés sur le réseau de neurones présenté chapitre 2. Les informations obtenues par

ces différentes méthodes permettent de classer les unités par “groupes d’influence”. L’analyse de ces derniers met en évidence certains circuits le long desquels a lieu un transfert d’information. D’autre part on peut mettre en évidence que certaines unités du réseau, sont cruciales au sein d’un régime dynamique donné. Modifier ou supprimer ces unités a des conséquences dynamiques marquées, alors qu’il n’en est rien pour d’autres unités ayant une connectivité effective restreinte.

A plus long terme nous voulons appliquer ces outils à des exemples plus généraux (modèles dans un premier temps). Ce thème fait l’objet d’une proposition de thèse pour la rentrée prochaine.

6.2 Corrélations d’échelles dans des systèmes hiérarchiques.

Le domaine des systèmes complexes est en pleine expansion depuis environ 20 ans et les modèles proposés dans ce cadre couvrent un champ très vaste débordant largement la physique (biologie, épidémiologie, finance,...). Il est néanmoins remarquable que les concepts fondamentaux et les outils analytiques utilisés restent issus de domaines traditionnels de la physique et des mathématiques (mécanique statistique, systèmes dynamiques, probabilités, ...), mais nécessitent malheureusement souvent un passage à la limite (limite “thermodynamique” en temps ou en espace) structurellement inaccessibles aux moyens numériques. Il est donc crucial de développer des méthodes analytiques permettant de contrôler les effets de taille finie.

Ce type d’analyse s’est notamment développé dans le cadre de l’étude des systèmes critiques en mécanique statistique (Finite Size Scaling, Zéros de la fonction de partition, etc... [86, 88, 81]). Comme exposé dans la section 4.3.1 nous avons proposé récemment une approche similaire dans le cadre de la criticalité auto-organisée. Comme dans les systèmes critiques “classiques”, cette approche s’est révélée fructueuse d’un point de vue théorique (calcul d’exposants critiques) et pratique (contrôle fin des biais induits par les simulations numériques). Nous souhaitons maintenant élargir cette analyse à d’autres systèmes. En collaboration avec Jean-Louis Meunier, nous faisons actuellement l’étude numérique et analytique des effets de taille finie et des corrélations d’échelle dans un modèle dynamique de fragmentation présentant une grande richesse de comportements (multifractalité, structure hiérarchique, phase désordonnée). Des applications, notamment vers le traitement du signal, pourraient être envisagées à long terme.

6.3 Zéros de Lee-Yang et systèmes dynamiques.

Dans les systèmes dynamiques on sait construire, comme en mécanique quantique, un opérateur d’évolution sur l’espace des observables (opérateur de Koopman) et sur l’espace des densités (opérateur de Perron-Frobenius). Ces deux opérateurs sont adjoints. Les valeurs propres de l’opérateur de Perron-Frobenius (résonances de Ruelle-Pollicott) permettent de caractériser le temps caractéristique d’évolution vers l’équilibre et la vitesse de décroissance des fonctions de corrélations [50]. La décroissance des fonctions de corrélations est donnée par le gap spectral entre la première valeur propre (correspondant à l’état d’équilibre) et la seconde. Dans un système hyperbolique il existe un gap spectral dans le spectre de Perron-Frobenius et la décroissance des fonctions de corrélations exponentielle. Au contraire, lorsque le système perd l’hyperbolicité, le gap spectral tend vers zéro et la décroissance est algébrique. Ce phénomène correspond, en mécanique statistique, à la divergence de la longueur de corrélation, qui peut être calculée dans de nombreux cas, comme le gap spectral d’une matrice, appelée matrice de transfert ou matrice de Kramer-Wannier [96]. Dans certains cas, (lorsqu’il existe une partition de Markov finie) l’opérateur de Perron-Frobenius s’écrit comme une matrice formellement analogue à la matrice de transfert. Cela suggère que des techniques d’analyse utilisées en mécanique statistique pour analyser les phénomènes critiques puissent être utilisées, en les adaptant, pour caractériser des régimes où un système dynamique perd l’hyperbolicité. Nous avons débuté une activité de recherche sur ce

6.4 Conclusion générale.

Dans ce mémoire, j'ai montré comment les concepts et techniques de la mécanique statistique et des systèmes dynamiques pouvaient être avantageusement mariés pour analyser des systèmes dynamiques à grand nombre de degrés de liberté, mais sortant du cadre usuel de la mécanique statistique. Ce genre de situation se rencontre de plus en plus fréquemment dans le cadre des systèmes complexes. Ici, les modèles proposés sont issus d'une volonté de comprendre des phénomènes naturels, sortant du domaine d'analyse de la physique traditionnelle, où les interactions entre agents induisent des dynamiques variées et complexes (biologie, épidémiologie, économie, sociologie, etc ...).

Au cours de mon travail de recherche destiné à développer de telles méthodes, j'ai progressivement évolué d'une optique où la limite thermodynamique était le point central de l'analyse, vers une approche plus concentrée sur les systèmes de grande taille, mais *finie*. Comme le lecteur l'a peut être entrevu dans le bref exposé de mes nouvelles directions de recherche, l'analyse de ces systèmes est maintenant mon objectif principal, et ce, pour plusieurs raisons.

D'une part, et c'est une évidence, les systèmes réels sont de taille finie. Or, même si la limite thermodynamique est un outil d'analyse puissant, elle efface quelque peu des phénomènes essentiels inhérents à la taille finie. De fait, pour les systèmes présentés dans ce mémoire, on s'aperçoit finalement que le comportement à taille finie est d'un certain point de vue plus complexe que le système limite. La richesse de comportement dynamique dans le réseau de neurones du chapitre 2 est incomparablement plus grande que celle du système limite; les systèmes critiques auto-organisés sont associés à une simple loi de puissance à la limite thermodynamique, alors que les effets de taille finie sont beaucoup plus subtils.

Mais les effets de taille finis sont également inhérents aux simulations numériques. Mon sentiment est alors que, dans les situations où l'on prétend simuler un système complexe avec notamment des interactions à longue portée en espace et temps, il est absolument essentiel de bien s'assurer que le numérique n'induit pas de complexité supplémentaire. Le numérique étant l'outil principal d'analyse de ces systèmes, cette question me semble tout à fait fondamentale.

Enfin, et ce n'est pas la raison qui me motive le moins, il n'y a que très peu de résultats dans ce domaine, et pour ainsi dire, tout est à faire.

Depuis que j'ai commencé le métier de chercheur, je travaille dans une ambiance pluridisciplinaire, à étudier des systèmes somme toutes assez éloignés de la culture de base d'un physicien. Je souhaite renforcer cet aspect, et de plus en plus, interagir avec mes collègues d'autres disciplines, en leur apportant mon expertise pour l'analyse de situations concrètes éventuellement tournées vers des applications.

Chapitre 7

Annexe C.

7.1 Curriculum vitae de Bruno CESSAC.

Né le 29 Mars 1967, Nationalité Française. Marié, une fille.

Maître de Conférences de l'Université de Nice depuis 1996, j'effectue ma recherche à l'Institut Non Linéaire de Nice.

Formation.

- [1994] **Doctorat de Physique Théorique.** Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse, sur le thème, "Propriétés statistiques des dynamiques de réseaux neuromimétiques.". Directeur: Prof. Manuel Samuelides, Mathématicien.
- [1990] **DEA de Physique Théorique.** Option modélisation, Centre de Physique Théorique, Marseille.
- [1989] **Maîtrise de Physique.** Options calcul scientifique, astrophysique, Université de Toulouse.

Séjours de longue durée à l'étranger.

- **02/2001-07/2001.** Invitation du Centre de Recherche Interdisciplinaire de Bielefeld, Allemagne, dans le cadre d'un programme interdisciplinaire intitulé "The sciences of complexity".
- **10/1994 - 08/1996.** Post-Doctorat, Laboratoire de Physique Théorique, Université de Bielefeld, Allemagne, avec Philippe Blanchard.

Responsabilités scientifiques.

- Vice-Président de la commission de spécialistes, section 29, Université de Nice.
- Membre titulaire de la commission de spécialistes, section 29, Université de Saint-Charles, Marseille.

Encadrement d'étudiants.

- 1997. Stage de maîtrise de Physique (3 mois) : "Systèmes dynamiques chaotiques" (deux étudiants).
- 2000. Stage de maîtrise de Physique (3 mois) : "Réseaux de neurones et mécanique statistique" (deux étudiants).
- 2000. Stage de maîtrise de Physique (3 mois) : "Criticalité auto-organisée" (deux étudiantes).

-
- 2001-2002. Co-encadrement de S. Sequeira, Etudiante en thèse à Bielefeld, Allemagne. Sujet : “Méthodes d’analyses de systèmes critiques auto-organisés”.
 - 2002. Stage d’initiation à la recherche (6 mois) de E. Fitoussi, étudiant en maîtrise de Physique sur le thème “Zéros de Lee-Yang et Criticalité auto-organisée”. Apprentissage des techniques de calcul numériques de zéros, calcul d’exposants critiques par zéros de Lee-Yang, applications à la criticalité auto-organisée.
 - 2002. Stage de DEA de S. Rolandez. “Propagation d’information dans un réseau chaotique.”, en collaboration avec J.A. Sepulchre. Proposition d’un sujet de thèse.

Bibliographie

7.2 Publications.

- [Doyon et col., 1992] Doyon B., Cessac B., Quoy M., Samuelides M., "Destabilization and route to chaos in neural networks with random connectivity", *Neural Information and Processing Systems: Natural and Synthetics.*, 549-555, (1992).
- [Doyon et col., 1993a] Doyon B., Cessac B., Quoy M., Samuelides M. "Chaos in Neural Networks With Random Connectivity", *International Journal Of Bifurcation and Chaos*, Vol. 3, Num. 2, 279-291(1993).
- [Quoy et col., 1993b] Quoy M., Cessac B., Doyon B., Samuelides M. "Dynamical behaviour of neural networks with discrete time dynamics", *Neural Network World*, Vol. 3, Num. 6, 845-848 (1993).
- [Doyon et col., 1994] Doyon B., Cessac B., Quoy M., Samuelides M. "On bifurcations and chaos in random neural networks", *Acta Biotheoretica.*, Vol. 42, Num. 2/3, 215-225,(1994).
- [Cessac et col., 1994a] Cessac B., Doyon B., Quoy M., Samuelides M. "Mean-field equations, bifurcation map and route to chaos in discrete time neural networks", *Physica D*, 74, 24-44(1994).
- [Cessac, 1994b] Cessac B., "Propriétés statistiques des dynamiques de réseaux neuromimétiques" *Thèse Université Paul Sabatier, Toulouse* (1994).
- [Cessac, 1994c] Cessac B., "Absolute Stability criteria for random asymmetric neural networks", *J. of Physics A*, 27, (1994), L927-L930.
- [Cessac, 1994d] Cessac B., "Occurrence of chaos and AT line in random neural networks", *Europhys. Let.*, 26 (8), (1994), 577-582. (Article 1 de l'annexe A).
- [Cessac, 1995] Cessac B., "Increase in complexity in random neural networks", *J. de Physique I (France)*, 5, 409-432, (1995). (Article 2 de l'annexe A).
- [Cessac & Quoy, 1995] Cessac B., Quoy M., "Influence of Learning in Chaotic Neural Networks", BiBoS Preprint (1995).
- [Samuelides et col., 1996] Samuelides M., Doyon B., Cessac B., Quoy M. "Spontaneous dynamics and associative learning in an asymmetric recurrent neural network", *Math. of Neural Networks*, (1996), 312-317.
- [Blanchard et col., 1997] Blanchard Ph., Cessac B. Krüger T., "A dynamical system approach to SOC models of Zhang's type." *Jour. of Stat. Phys.*, 88 (1997), 307-318. (Article 1 de l'annexe B).
- [Daucé et col., 1998] Daucé E., Quoy M., Cessac B., Doyon B. and Samuelides M. "Self- Organization and Dynamics reduction in recurrent networks: stimulus presentation and learning", *Neural Networks*, (11) (1998), 521-533. (Article 3 de l'annexe A).
- [Blanchard et col., 1998] Cessac B., Blanchard Ph., Krüger T., "A dynamical system approach to Self-Organized Criticality", "Proceedings of the International Conference on Mathematical Results in Statistical Mechanics", 27-31 Juillet 1998, Marseille.
- [Blanchard et col., 1999] Cessac B., Blanchard Ph., Krüger T., "Ergodicity and nature of the invariant set in Self-Organized Criticality." non publié.

- [Blanchard et col., 2000] Blanchard Ph., Cessac B., Krüger T., "What can one learn about Self-Organized Criticality from Dynamical System theory?". *Jour. of Stat. Phys.*, 98 (2000), 375-404. (Article 2 de l'annexe B).
- [Cessac et col., 2001] Cessac B., Blanchard Ph., Krüger T., "Lyapunov exponents and transport in the Zhang model of Self-Organized Criticality.", *Phys. Rev. E*, Vol. 64, 016133, (2001). (Article 3 de l'annexe B).
- [Cessac & Meunier, 2002] Cessac B., Meunier J.L., "Anomalous scaling and Lee-Yang zeroes in Self-Organized Criticality.", *Phys. Rev. E*, Vol 65, 036131, 1-18 (2002). (Article 4 de l'annexe B).
- [Volchenkov et col., 2002] Volchenkov D., Blanchard Ph., Cessac B., "Quantum field theory renormalization group approach to self-organized criticality: the case of random boundaries.", *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 16, No.8 (2002) 1171-1204.
- [Cessac et col., 2002 a] Cessac B., Blanchard Ph., Krüger T., Meunier J.L., "Self-Organized Criticality and Thermodynamic formalism.", soumis à *Journ. of Stat. Phys.*
- [Cessac et col., 2002 b] Cessac B., Samuelides M., Stoop R., "Dynamical system theory and neural networks.", en préparation, à paraître dans *Lecture Notes in Physics*.
- [Cessac et col., 2002 c] Cessac B., Moynot O., Samuelides M., "Mean-field theory in chaotic neural networks dynamics.", en préparation, à paraître dans *Lecture Notes in Physics*.

7.3 Conférences internationales.

- [1] Cessac B. "What can one learn about Self-Organized Criticality from Dynamical System theory?", International workshop on "modeling of complex systems", 24-27 Juin 2002, Bielefeld, Allemagne (invité).
- [2] Cessac B. "A dynamical system approach to Self-Organized Criticality", MABIC, 13-16 Mars 2002, Lavin, Suisse (invité).
- [3] Cessac B. "A dynamical system approach to Self-Organized Criticality", Conférence Eurandom, Décembre 2001, Eindhoven (invité).
- [4] Cessac B., "An introduction to Self-Organized Criticality.", International workshop on "Dynamical Neural Networks and Applications", 20-24 Novembre 2000, Bielefeld, Allemagne (organisateur).
- [5] Cessac B., "Self-Organized Criticality and Dynamical Systems", *International conference on fractal objects in mathematics and natural sciences*. 13-17 Mars 2000, Bielefeld, Allemagne (invité).
- [6] Cessac B., "A Dynamical System approach to Self-Organized Criticality", *Research Workshop on Self-Organized Criticality*. 4-8 Mars 2000, Trieste, Italie.
- [7] Cessac B., "A Dynamical System approach to Self-Organized Criticality", *International Workshop on Dynamical Systems Theory*. 31 Août-18 Septembre 1998, Trieste, Italie.
- [8] Cessac B., "Self-Organized Criticality and Dynamical Systems", *Mathematical results in Statistical Mechanics*. 27-31 Juillet 1998, Marseille, France.
- [9] Cessac B., "Influence of learning in chaotic neural networks", *Workshop on Neural Networks Dynamics and Pattern Recognition*. 12-13 Mars 1996 . Toulouse.
- [10] Cessac B., "Learning in chaotic neural networks", *Statistical physics of collective behaviour in disordered systems and information processing*, Septembre 1995, Cargèse, France.
- [11] Cessac B., "Statistical properties of the dynamics of random asymmetric neural networks", *International Conference on Stochastic Analysis: Mathematics, Financial Market, Biology, Engineering and Physics*, Bielefeld, Germany, 24-29 Octobre 1994.
- [12] Cessac B., "Dynamical properties of random asymmetric neural networks", *International Workshop on Dynamics and Complexity*, Lisbonne, Portugal, 4-24 Septembre 1994 (invité).

7.4 Séminaires récents (depuis 1998).

1. Cessac B., "Systèmes dynamiques, mécanique statistique et réseaux de neurones.", UMR 6559 Mouvement et Perception, Marseille, Mars 2002.
2. Cessac B., 'Formalisme thermodynamique, phénomène de Lee-Yang et Criticalité Auto-Organisée.', Rencontres Nice-Marseille, Décembre 2001.
3. Cessac B., "Thermodynamic limit of dynamical systems", Bielefeld, Allemagne, Juin 2001.
4. Cessac B., "A Dynamical System approach to Self-Organized Criticality", Fribourg, Suisse, Avril 2001
5. Cessac B., "A Dynamical System approach to Self-Organized Criticality", 11 Mai 2000. Institut d'Optique, Florence, Italie.
6. Cessac B., "Criticalité auto-organisée et systèmes dynamiques", Séminaire de physique mathématique, Centre de Physique théorique, Marseille, 17 Février 2000.
7. Cessac B., "Systèmes complexes, systèmes dynamiques et criticalité auto-organisée", séminaire du groupe de neurocybernétique, ENSEA, Cergy-Pontoise, 4 Décembre 1999.
8. Cessac B., "Criticalité auto-organisée et systèmes dynamiques", Séminaire de théorie ergodique, Laboratoire de théorie ergodique, Dijon, 25 Mars 1999.
9. Cessac B., "Criticalité auto-organisée et systèmes dynamiques", Séminaire du Laboratoire de Physique Théorique, Cergy-Pontoise, 18 Mars 1999.
10. Cessac B., "Réseaux de Neurones et Criticalité auto-organisée", Séminaire du laboratoire de Neurophysiologie, INSERM Toulouse, 19 Décembre 1998.
11. Cessac B., "Self-organized criticality and dynamical systems.", Séminaire BiBoS, Bielefeld, Février 1998.