

Systèmes chaotiques

1] Introduction

1) Déterminisme contre chaos

Déterminisme physique :

- Les lois de la nature déterminent l'évolution d'un système physique.
- La connaissance des conditions initiales ainsi que la valeur des paramètres physiques déterminant cette évolution (ex: position, vitesse) à un instant donné, permet de connaître le passé et le futur de ce système.
- Les expériences sont reproductibles. En préparant un système de la même façon, on observe la même évolution.

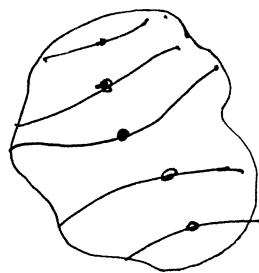
Rq: Les lois d'évolutions sont données par des équations différentielles.

$$\text{Ex: } \vec{F} = m \vec{\gamma} ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 ; \quad -i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

Déterminisme mathématique :

Th. de Cauchy: Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne i.e. $\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|$, $K < \infty$, et soit $x_0 \in U$. Alors il existe une unique solution $x(t)$ à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, passant par x_0 , définie sur un intervalle de temps borné $[-c, c]$, $c > 0$, $c \equiv c(U)$.

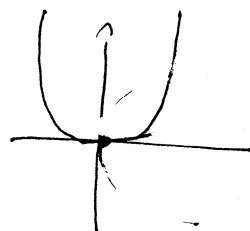
En d'autres termes la trajectoire est définie localement, et uniquement définie par le point x_0



Unicité : les trajectoires ne peuvent se croiser \rightarrow 1 seul passé et un seul futur par $t \in]-c, c]$

De plus, si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$ compact, $f \in \mathcal{C}^1$ alors l'équa. dif. a des solutions définies $\forall t$ (unicité globale).

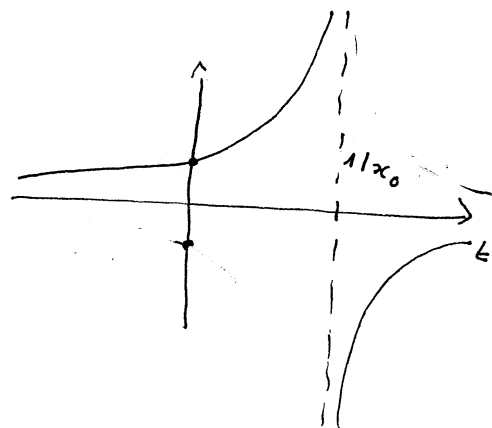
Rq 1: $\dot{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{t^2}{2}$ et $x \equiv 0$ sont 2 solutions issues de 0 \rightarrow non unicité



(physique ?)

Rq 2 $\dot{x} = x^2 \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$

\Rightarrow non existence globale, mais par chaque x_0 , \exists un intervalle où la trajectoire est définie



\rightarrow Les 2 déterminismes semblent conciliés.

Pb: On ne peut connaître les conditions initiales avec une précision infinie.

Hypothèse: L'erreur sur les conditions initiales ne devient pas
emportantes au cours du temps (ne croît pas ou pas "trop vite").

Contre exemples:

→ May: Dynamique de population.

$$x_{n+1} = \mu x_n^n (1-x_n) \quad \mu = 4$$

→ Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{8}{3}, \quad \rho = 28, \quad \beta = 28$$

→ Coquilles de noix sur l'eau

→ Netes, lasers, etc...

→ croissance exponentielle
locale de l'erreur.

A cause de la sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.).
Le système est imprédictible malgré que les équations d'évolution
soient déterministes → CHAOS.

II Paradigmes du chaos - Dynamique symbolique:

1) Multiplication par 2 mod 1

Soit le système dynamique, à temps discret, en coordonnées polaires (ρ, θ)

$$\begin{cases} \rho_{n+1} = \frac{2\rho_n}{1+\rho_n} \\ \theta_{n+1} = 2\theta_n \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Rq: Les degrés de liberté sont indépendants.

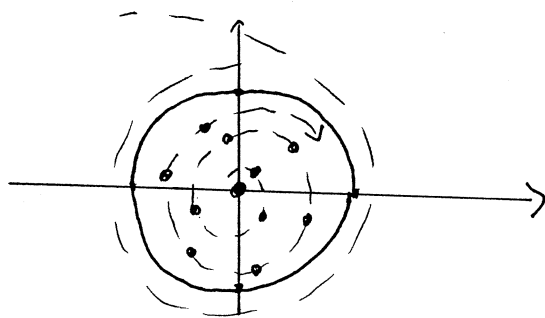
Points fixes de $\rho_{n+1} = \frac{2\rho_n}{1+\rho_n} = f(\rho_n)$

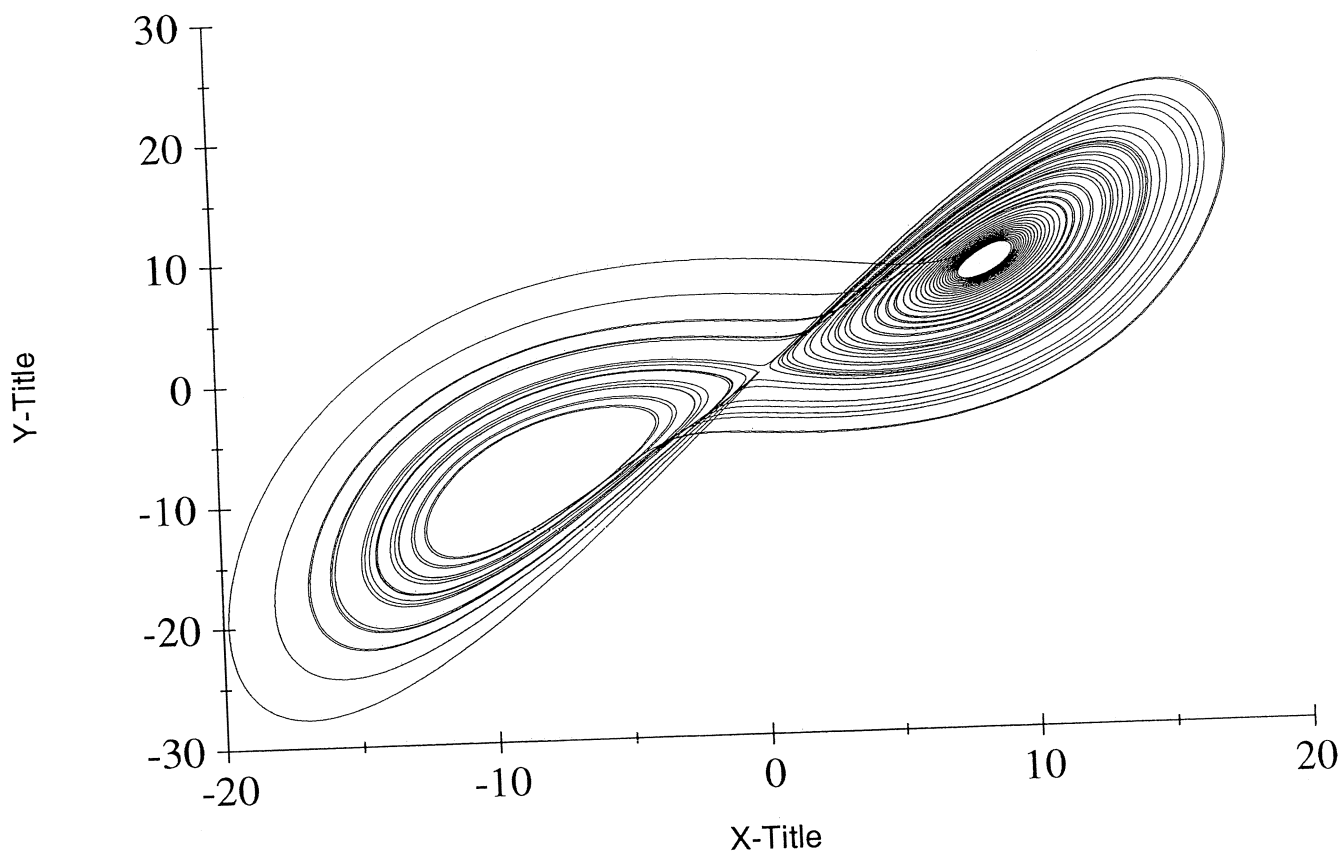
$$\rho_{n+1} = \frac{2\rho}{1+\rho} \Rightarrow \rho^2 - \rho = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 0 \\ \rho = 1 \end{matrix}$$

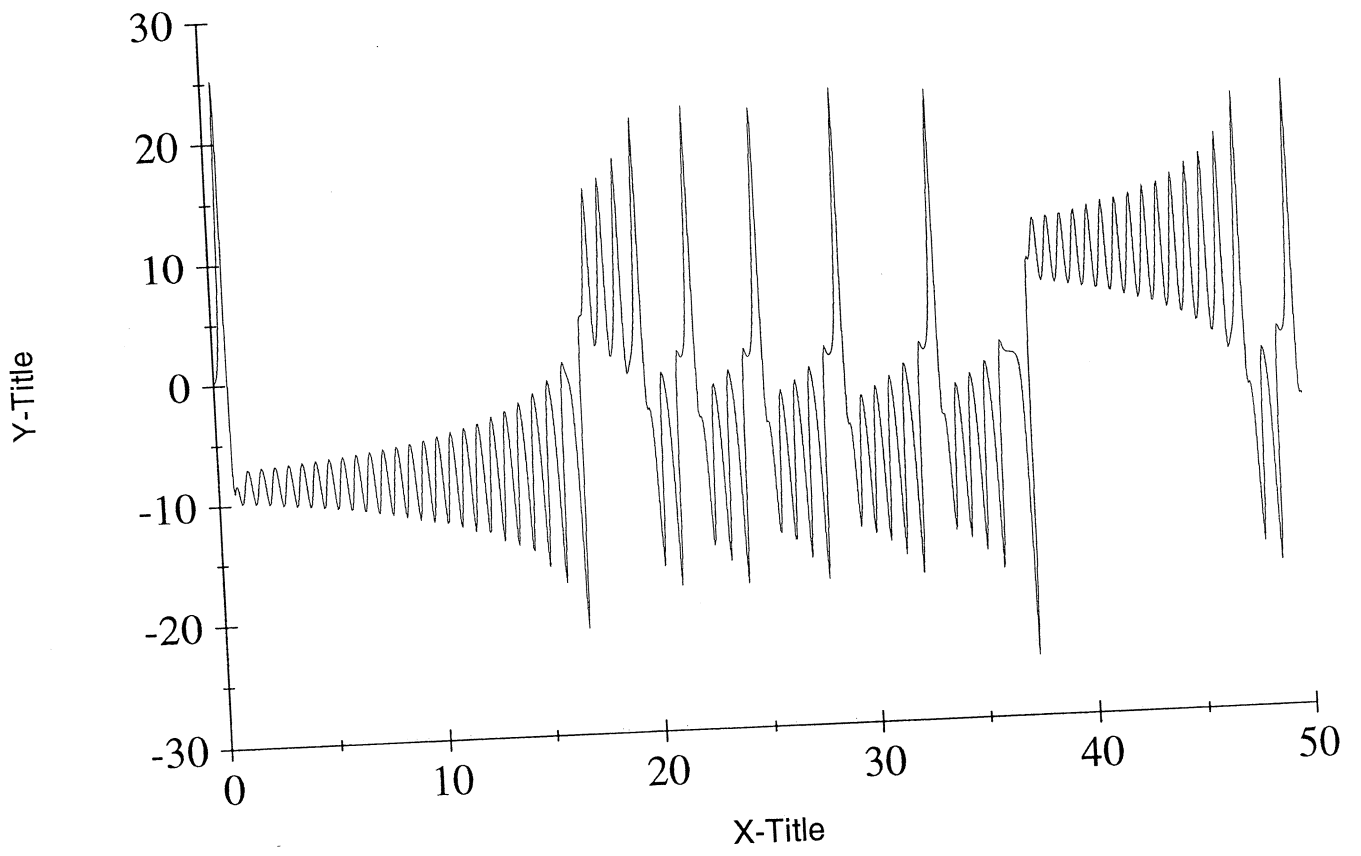
$$f'(\rho) = \frac{2(1+\rho) - 2\rho}{(1+\rho)^2} = \frac{2}{(1+\rho)^2} \Rightarrow \begin{matrix} f'(0) = 2 > 1 & \text{instable} \\ f'(1) = \frac{1}{2} & \text{stable} \end{matrix}$$

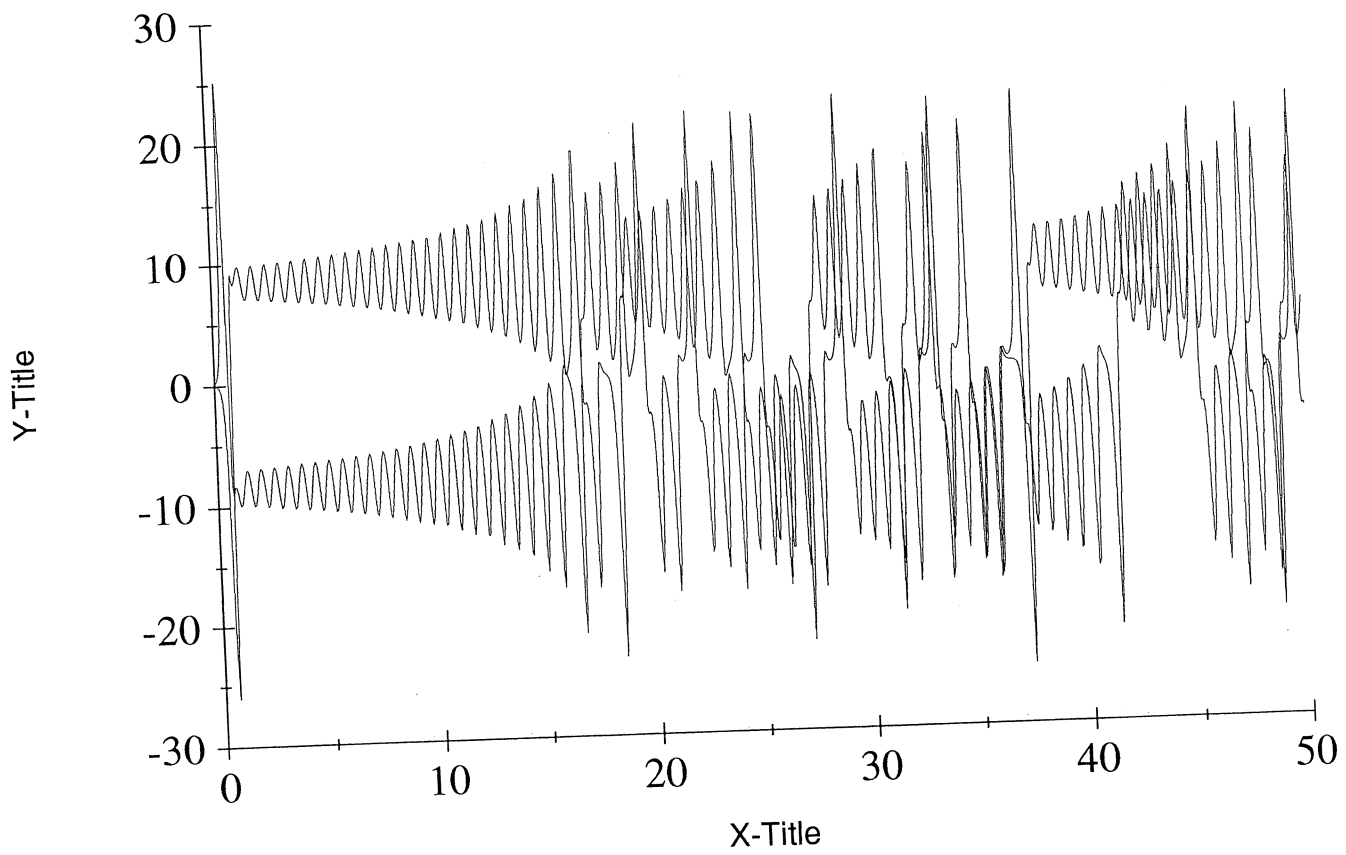
\Rightarrow cycle limite $\rho = 1$ attirant les trajectoires.

\Rightarrow Attracteur.









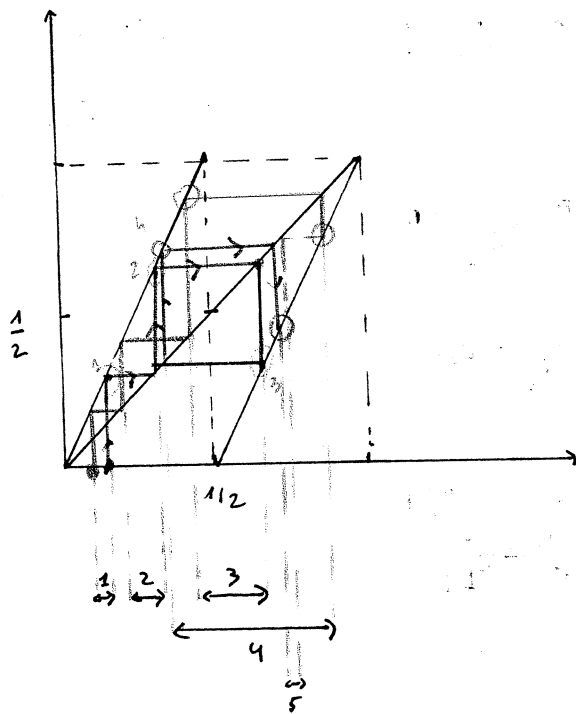
Quelle que soit la condition initiale la trajectoire converge sur le cercle.

On s'intéresse en général à la dynamique asymptotique, I.e., donc à la dynamique sur le cercle.

Pour la suite on pose $x_n = \frac{\theta_n}{2\pi}$.

Sur le cercle : $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$

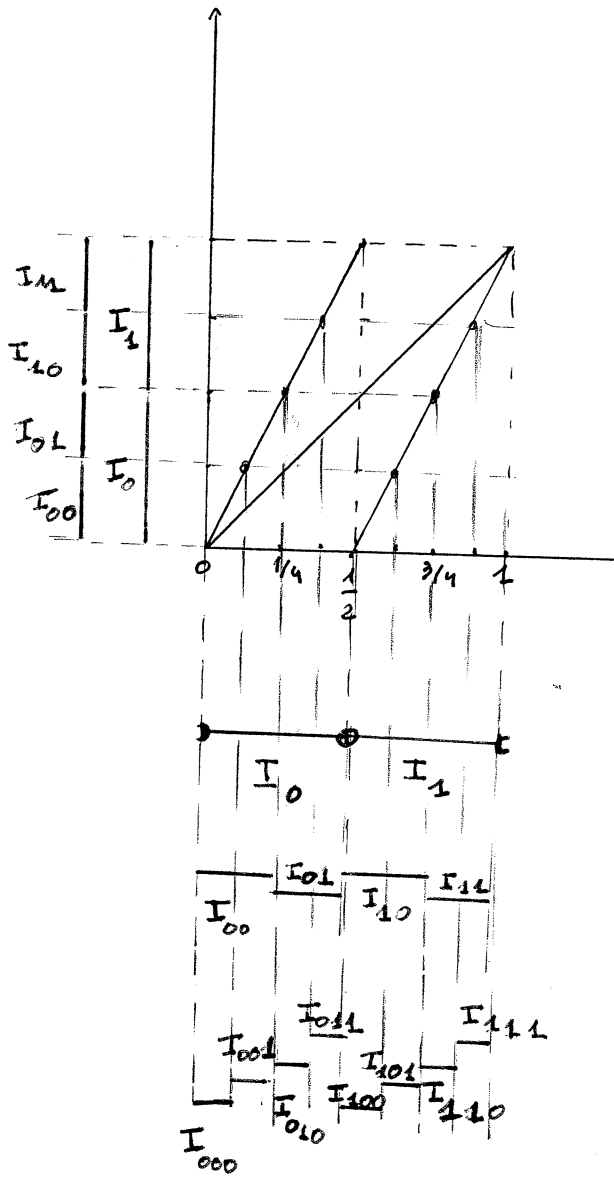
S.C.T.



L'ener est amplifiée (multipliée par 2) mais ne peut être plus grande que 1 \rightarrow Les trajectoires reviennent arbitrairement près l'une de l'autre (divergence locale + recurrence)

Peut-on être plus précis?

Dynamique symbolique



$$I_0 = [0, \frac{1}{2}[, I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$$

$$\begin{cases} f^{-1}(I_0) = [0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{3}{4}, 1[= I_{00} \cup I_{10} \\ f^{-1}(I_1) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\cup [\frac{3}{4}, 1[= I_{01} \cup I_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(I_{00}) = I_{000} \cup I_{100} \\ f^{-1}(I_{10}) = I_{010} \cup I_{110} \\ f^{-1}(I_{01}) = I_{001} \cup I_{101} \\ f^{-1}(I_{11}) = I_{011} \cup I_{111} \end{cases}$$

codage:

$$\{a_k\}_0^{+\infty} \quad a_k \in \{0, 1\}$$

$$\| I_{a_0 a_1 \dots a_n} \text{ plus grand intervalle k.g.} \left\{ \begin{array}{l} I_{a_0 a_1 \dots a_n} \subset I_{a_0} \\ f(I_{a_0 a_1 \dots a_n}) \subset I_{a_1} \end{array} \right.$$

avec $I_0 = [0, \frac{1}{2}[, I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$

$\Rightarrow I_{a_0 a_1 \dots a_n} \subset I_{a_0} \text{ et } f(I_{a_0 a_1 \dots a_n}) \subset I_{a_1} \text{ et } f^2(I_{a_0 a_1 \dots a_n}) \subset I_{a_2} \dots$
 $\dots f^n(I_{a_0 a_1 \dots a_n}) \subset I_{a_n} \Leftrightarrow I_{a_0 a_1 \dots a_n} = \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(I_{a_j})$
 $|I_{a_0 a_1 \dots a_n}| = \frac{1}{2^{n+1}}$

Les $I_{a_0 \dots a_n}$ partitionnent $I = [0, 1[$

On note $\Sigma_n = \{0, 1\}^{\otimes n}$ = ensemble des séquences de longueur n , à 2 symboles i.e.

$$\Sigma_n = \{ a_0 \dots a_{n-1} \mid a_k \in \{0, 1\} \ k=0 \dots n-1 \}$$

et $[a]_n$ les éléments de Σ_n : $[a]_n = a_0 \dots a_{n-1}$

On a (partition)

$$\begin{cases}
 I = \bigcup_{[a]_n \in \Sigma_n} I_{[a]_n} & \forall n \quad (i) \\
 I_{[a]_n} \cap I_{[a']_n} = \emptyset; [a]_n \neq [a']_n & (ii)
 \end{cases}$$

* En effet, on a :

$$f^{-1}(I_{a_0 \dots a_{n-1}}) = I_{0 a_0 \dots a_{n-1}} \cup I_{1 a_0 \dots a_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(I_{[a]_n}) = I_{0[a]_n} \cup I_{1[a]_n}$$

En rajoutant 0 ou 1 à toutes les séquences $[a]_n$ dans Σ_n on génère toutes les séquences de Σ_{n+1}

De plus $f^{-1}(I_1 \cup I_2) = \{x \mid f(x) \in I_1 \cup I_2\}$
 $= \{x \mid f(x) \in I_1\} \cup \{x \mid f(x) \in I_2\} = f^{-1}(I_1) \cup f^{-1}(I_2)$

donc :

$$I = f^{-1}(I) = f^{-1} \left(\bigcup_{[a]_n \in \Sigma_n} I_{[a]_n} \right) = \bigcup_{[a]_n \in \Sigma_n} f^{-1}(I_{[a]_n})$$

$$= \bigcup_{[a]_n \in \Sigma_n} (I_{\emptyset [a]_n} \cup I_{1 [a]_n}) = \bigcup_{[a]_{n+1} \in \Sigma_{n+1}} I_{[a]_{n+1}}$$

→ (i) vient par récurrence.

ii) Soit $I_{[a]_n} = I_{a_0 \dots a_{n-1}}$ et $I_{[a']_n} = I_{a'_0 \dots a'_{n-1}}$

alors $f^k(I_{a_0 \dots a_{n-1}}) \subset I_{a_0 \dots a_k}$
 $f^k(I_{a'_0 \dots a'_{n-1}}) \subset I_{a'_0 \dots a'_k}$ avec $I_{a_0 \dots a_k} \cap I_{a'_0 \dots a'_k} = \emptyset$

$$f^{-k}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad f^{-k}(A \cap B) = f^{-k}(A) \cap f^{-k}(B)$$

$$\Rightarrow f^{-k}(f^k(I_{a_0 \dots a_{n-1}}) \cap f^k(I_{a'_0 \dots a'_{n-1}})) = \emptyset$$

$$\Rightarrow I_{[a]_n} \cap I_{[a']_n} = \emptyset.$$

De plus : $|I_{[a]_n}| = \frac{1}{2^{n+1}}$ →

partition de plus en plus fine dont le diamètre de atomes tend vers 0.

Par définition, $x \in I_{[a]_n} \Rightarrow x \in I_{a_0}, f(x) \in I_{a_1} \dots f^{n-1}(x) \in I_{a_{n-1}}$

→ "codage" de l'abite de x sur n pas de temps (jusqu'au pas $n-1$)

Par ailleurs $x \in I_{[a]_n}$ est "localisé" avec une précision $\frac{1}{2^{n+1}}$

(et donc après n pas de tps, l'imprecision est de l'ordre $\frac{1}{2}$ →

au coup suivant on ne sait pas dans quel intervalle est x).

Lorsque $n \rightarrow +\infty$:

- Le diamètre des $I_{[a]_n}$ tend vers zéro.

- Par ailleurs, comme l'intervalle $I_{a_0 \dots a_{n-1}} = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(I_{a_j})$

et $I_{a_0 \dots a_n} = \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(I_{a_j})$

on a $I_{a_0} \supset I_{a_0 a_1} \supset \dots \supset I_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} \supset I_{a_0 \dots a_n} \dots$

→ Les intervalles dont les n premiers a_k sont identiques forment une suite décroissante d'intervalles.

- Soit $\overline{I_{[a]_n}}$ l'intervalle fermé associé à $I_{[a]_n}$
 alors un th classique de topologie sur les espaces métriques complets, (tel \mathbb{I}) dit que:

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{I_{a_0 a_1 \dots a_n}} = \{x\} = I_a$$

où \tilde{a} est la séquence infinie : $\tilde{a} = a_0 a_1 \dots a_n \dots$

On a donc démonté le théorème suivant :

Th: Soit $\Sigma = \{0, 1\}^{\otimes \infty}$, l'ensemble des séquences infinies à 2 symboles. A tout point $\tilde{a} \in \Sigma$ correspond un unique $x \in]0, 1[$.
 \tilde{a} est appelé codage de x .

Rq: \tilde{a} est en fait simplement le codage binnaire de x .

En effet si : $\tilde{a} = a_0 a_1 \dots a_n \dots \rightarrow x$, on a, par définition :

$$x \in I_{a_0}, f(x) = 2x \in I_{a_1} \dots f^n(x) = 2^n x \in I_{a_n} \dots$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}}$$

Car, si $a_0 = 0$ $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1/2} = \frac{1}{2}$

si $a_0 = 1$ $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}$

etc ...

Application de décalage:

En terme de codage binaire, la multiplication par 2 n'est autre qu'un décalage de bits vers la gauche.

|| Soit $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$

$$\tilde{a}: a_0 \dots a_n \dots \rightarrow \sigma(\tilde{a}) = a_1 \dots a_n \dots$$

La multiplication par 2 sur $\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ correspond au décalage à gauche σ , sur la séquence \tilde{a} associée à $x \rightarrow$ dynamique symbolique.

\rightarrow on va étudier les propriétés de la dynamique de f en utilisant cette correspondance et en faisant l'analyse sur σ .

Conjugaison:

Soit $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{I}$ l'application qui à $\tilde{a} \in \Sigma$ associe

$x \in \mathbb{I}$. Cette application est:

- surjective
- continue

Surjectivité: On a vu qu'à toute suite \tilde{a} était associée un unique

$x \in \mathbb{I}$. La réciproque n'est cependant pas vrai par exemple

$\frac{1}{2}$ a deux codages: $1\bar{0}$ et $0\bar{1}$. De manière générale les

points du type $\underbrace{\quad}_{k} 1\bar{0}$ $\underbrace{\quad}_{k} 1\bar{0}\bar{1}$ aussi \rightarrow infinis

dénombrable de points à double codage.

Ces points constituent néanmoins un ensemble négligeable. m.

φ est bijective sur $\Sigma \rightarrow I-m$

continuité: Σ est un espace topologique dont les ouverts sont les ensembles du type

$$C_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{n_1 \dots n_k} = \{ \tilde{a} \in \Sigma \mid a_{n_i} = \alpha_i \quad i=1 \dots k \}$$

(topologie produit sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). $C_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{n_1 \dots n_k}$ contient les séquences dont les k symboles $a_{n_1} \dots a_{n_k}$ sont fixés. Ces ensembles sont appelés cylindres (de rang k)

On peut également munir Σ d'une distance:

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}}$$

Dans ce cas les cylindres $C_{\alpha_0 \dots \alpha_k}^{0 \dots k} = \{ \tilde{a} \in \Sigma \mid a_i = \alpha_i \quad i=1 \dots k \}$

sont des boules ouvertes de diamètre $1/2^{k+1}$

$$* \quad \tilde{a}, \tilde{b} \in C_{\alpha_0 \dots \alpha_k}^{0 \dots k}, \quad d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} < \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}} *$$

Par ailleurs, sur $I-m$, $C_{\alpha_0 \dots \alpha_k}^{0 \dots k}$ a pour image l'intervalle ouvert

$$I_{\alpha_0 \dots \alpha_k}^{\circ}, \quad \text{donc } \varphi: \Sigma \rightarrow I-m \text{ est telle que } \varphi^{-1}(I_{\alpha_0 \dots \alpha_k}^{\circ})$$

$= I_{\alpha_0 \dots \alpha_k}^{\circ}$; l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert

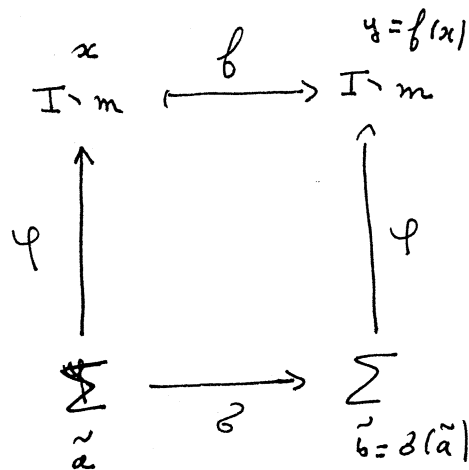
φ est continue.

enc :

Σ et $I \cdot m$ sont homéomorphes, via l'application φ

appelée conjugaison topologique et on a :

$$f|_{I \cdot m} = \varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1}$$



On dit que les 2 systèmes dynamiques sont dit topologiquement équivalents.

Cela signifie que ces 2 systèmes sont en correspondance biunivoque entre les orbites \rightarrow on peut coder les orbites de $x \in I \cdot m$ par celle de $\tilde{a} = f(x)$ avec le décalage β .

Propriétés des orbites de β :

- 1) S.C.I. : 2 séquences indistingables jusqu'à l'ordre n ($\in C_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^{0 \dots n}$) le deviennent après n itérations \rightarrow amplification des erreurs : on engage 1 bit à chaque itération

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots
 \end{array}
 \quad \text{distance} \sim \frac{1}{2^6}$$

après 6 itérations

$$\begin{array}{cccc}
 1 & - & - & \\
 0 & - & - &
 \end{array}
 \quad \text{distance} \sim \frac{1}{2}$$

2) Il existe une infinité dénombrable d'orbites périodiques.

Toutes les séquences du type $\overline{01}$ $\overline{10}$ $\overline{010}$ etc...

Ex: $\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \frac{1}{5}$

0 0 1 1 0

$\rightarrow \overline{0011}$ (codage binaire de $1/5$)

En fait: tous les rationnels...

3) Il existe une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques (les irrationnels).

4) Il existe un point dont l'orbite est dense.

* cela signifie qu'elle passe par tout ouvert de Σ , donc par tout cylindre $C_{a_0 \dots a_n}$, $\forall n$.

$C_0 = \{0 \dots \}$, $C_1 = \{1 \dots \}$

$C_{00} = \{00 \dots \}$, $C_{01} = \{01 \dots \}$, $C_{10} = \{10 \dots \}$, $C_{11} = \{11 \dots \}$

etc...

La séquence 0 1 00 01 10 11 000 001 010 011 ...

répond à la question*.

5) Malgré la s.c.I. 2 trajectoires divergent localement
supponémentiellement reivent arbitrairement près l'une de l'autre.

* En effet 2 trajectoires "typiques" contiennent des blocs de
taille arbitraire identiques \Rightarrow aussi près qu'on veut
(Th. de récurrence de Poincaré). *

Pb: Quelles sont les trajectoires typiques

1er point de vue: on trie les points au hasard avec proba uniforme
 \rightarrow les trajectoires typiques sont celles qui appartiennent à un ensemble
de proba 1. Par exemple, les orbites périodiques sont non
typiques.

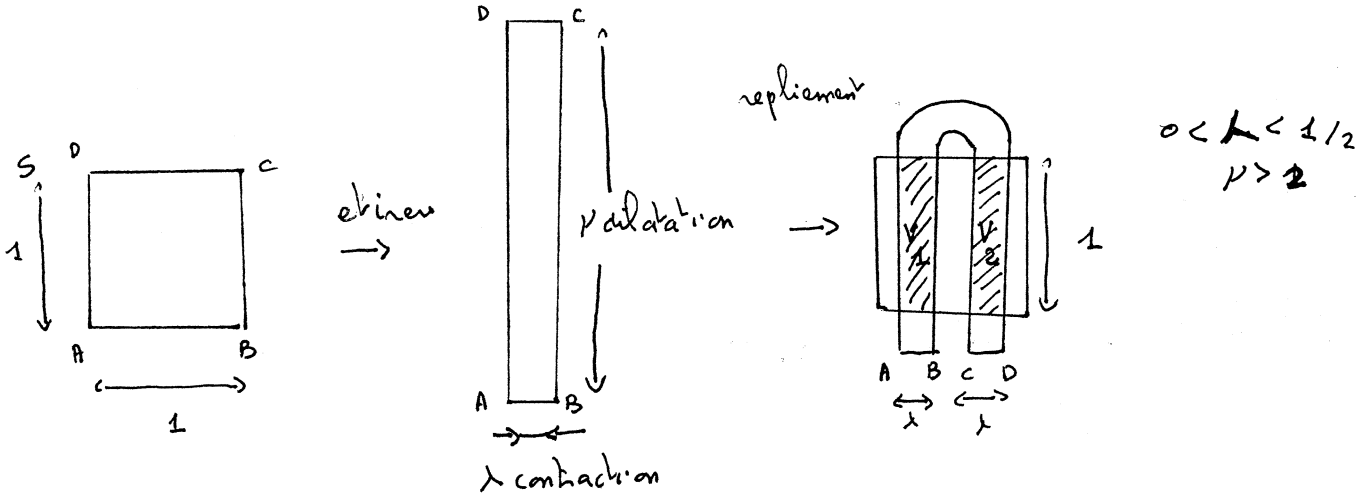
2 point de vue: \mathbb{Q} dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow$ aussi près qu'on veut d'un
irrationnel il y a un rationnel \Rightarrow aussi près qu'on veut d'une orbite
non périodique, il y a une orbite périodique.

Ex: $1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots$ etc —
et. $\overline{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0}$

\rightarrow les orbites périodiques sont denses.

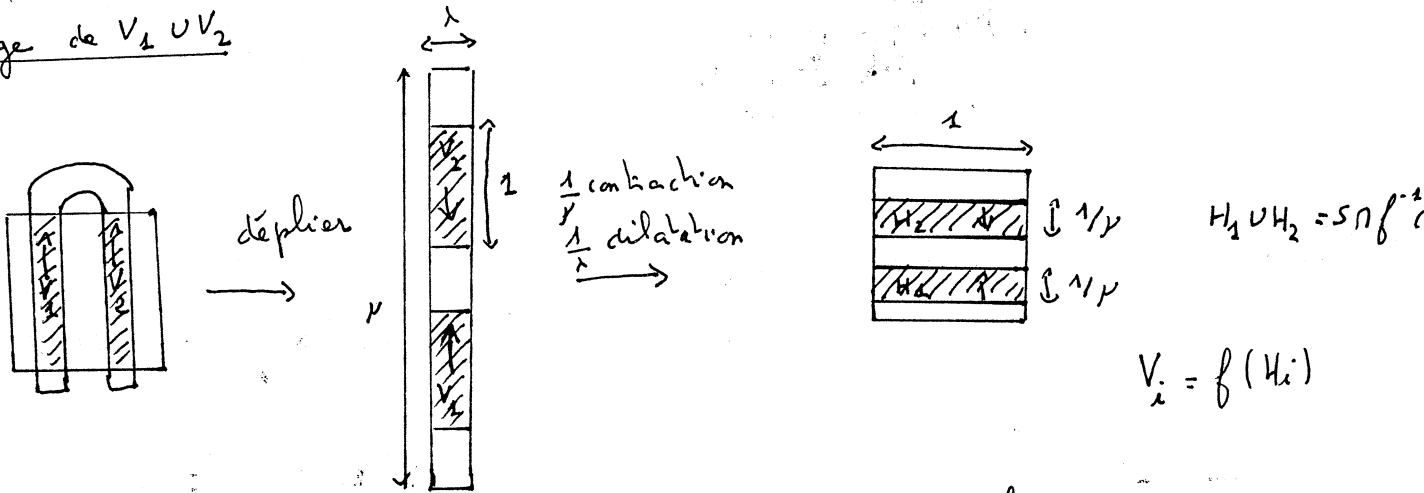
1) Fer à cheval (paradigme de système chaotique hyperbolique):

(Smale 1966)



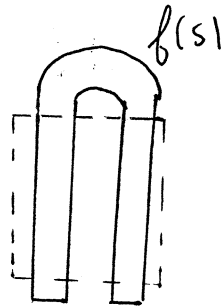
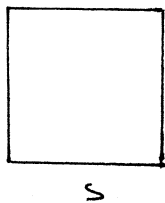
$$V_1 \cup V_2 = S \cap f(S)$$

Prelimage de $V_1 \cup V_2$

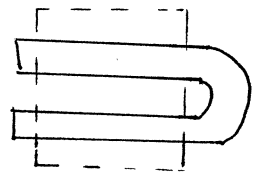
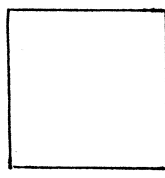


Donc :

f :



f^{-1} :



Rq f surjective $\Rightarrow f(A \cap f(B)) = \{y \mid \exists x_1 \in A, f(x_1) = y \text{ et } \exists x_2 \in B, f(x_2) = y\}$
 $= \{y \mid \exists x \in A \cap B, f(x) = y\} = f(A \cap B)$

On s'intéresse à l'ensemble invariant de $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$

$$f(\Lambda) = \Lambda = f^{-1}(\Lambda)$$

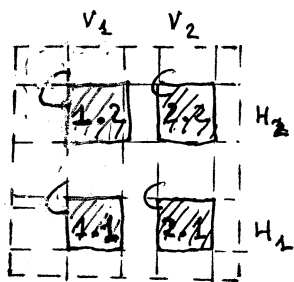
i.e.:

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S) = \{x \mid f^n(x) \in S, -\infty < n < +\infty\}$$

1) Construction de l'ensemble invariant:

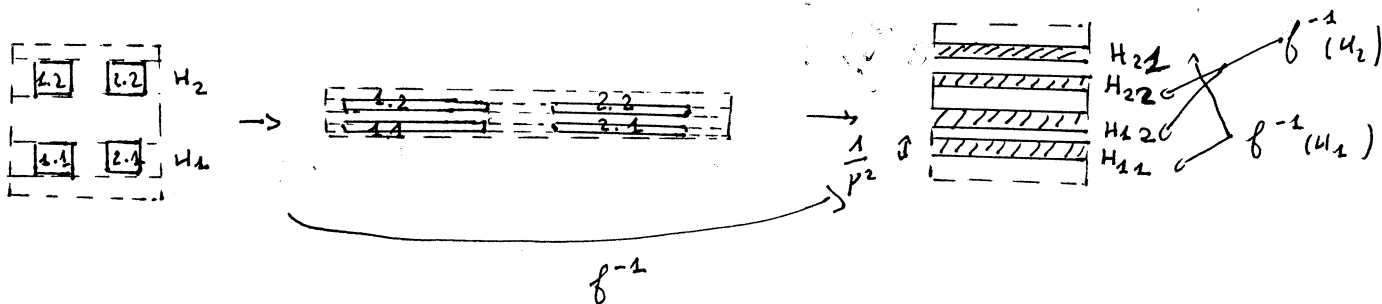
On va construire Λ

1) $f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)$



$$C_{i,j} = V_i \cap H_j = f(H_i) \cap H_j = V_i \cap f^{-1}(V_j)$$

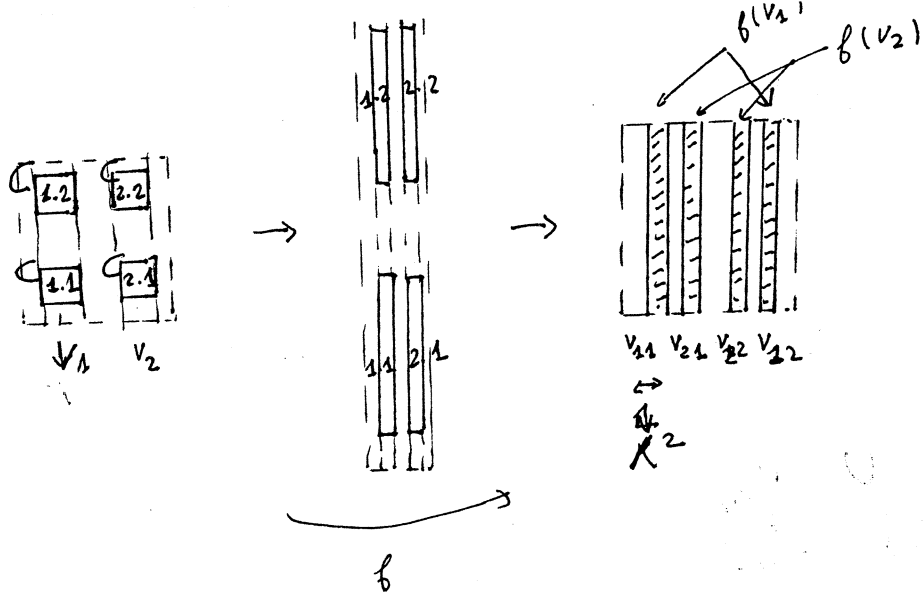
2 a) Image réciproque de cet ensemble : $f^{-1}(f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)) = f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S = \bigcup_{i,j} H_{i,j}$



$$H_{i,j} = H_i \cap f^{-1}(H_j) = f^{-1}(V_i) \cap f^{-2}(V_j)$$

Rq: $f(H_{i,j}) = f(H_i) \cap H_j \rightarrow$ case i,j (cohérent avec la notation ci dessus)

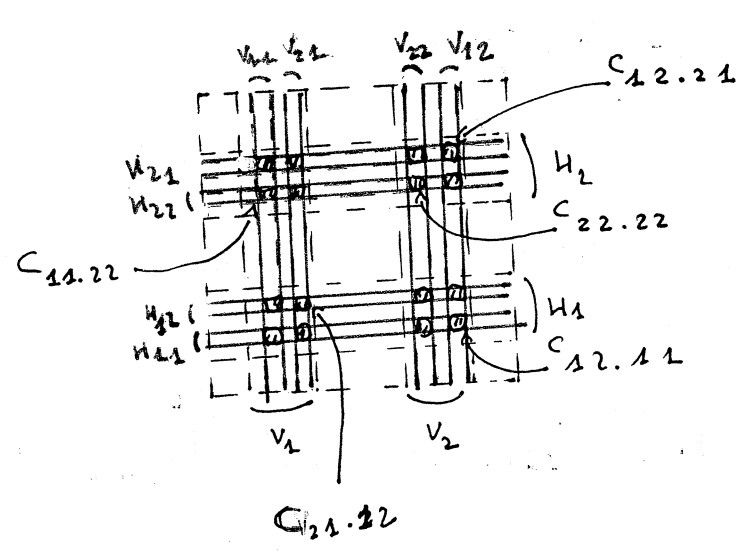
2 b) Image de cet ensemble : $f(f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S) = \bigcup_{i,j} V_{i,j} = S \cap f(S) \cap f^2(S)$



$$V_{ij} = V_j \cap f(V_i) = f(H_j) \cap f^2(H_i)$$

Rq: $f^{-1}(V_{ij}) = f^{-1}(V_j) \cap V_i \Rightarrow$ case i. j.

Donc : $f^{-2}(s) \cap f^{-1}(s) \cap s \cap f(s) \cap f^2(s) = \left(\bigcup_{i,j} V_{ij} \right) \cap \left(\bigcup_{k,l} H_{kl} \right)$
 = Union de 16 cases i. j. k. l



$$x \in C_{ij.kl} \Leftrightarrow x \in V_{ij} \cap H_{kl} \Leftrightarrow x \in f^2(H_i) \cap f(H_j) \cap H_k \cap f^{-1}(H_l)$$

$$\Leftrightarrow f^{-2}(x) \in H_i ; f^{-1}(x) \in H_j, x \in H_k, f(x) \in H_l$$

→ codage de l'abîme sur 4 pas de lps, det = -2 à k = 1

⇒ codage sur 4 symboles $a_{-2} a_{-1} \cdot a_0 a_1$

3) Au mieux pas d'itération

$$\rightarrow \bigcap_{i=n}^{\infty} f^{-i}(S) = \bigcup_{[a]_n^+ \in \Sigma_n^+} H_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}$$

où Σ_n^+ : séquences à n symboles $\in \{1, 2\}$ $[a]_n^+ = a_0 \dots a_{n-1}$

Les $H_{a_0 \dots a_{n-1}}$ sont 2^n bandes horizontales de largeur μ^{-n}

$$H_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} = H_{a_0} \cap f^{-1}(H_{a_1}) \dots \cap f^{-(n-1)}(H_{a_{n-1}})$$

$$\rightarrow \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(S) = \bigcup_{[a]_n^- \in \Sigma_n^-} V_{a_{-n} a_{-(n-1)} \dots a_{-1}}$$

où Σ_n^- : séquences à n symboles $\in \{1, 2\}$ $[a]_n^- = a_{-1} \dots a_{-n}$

Les $V_{a_{-n} a_{-(n-1)} \dots a_{-1}}$ sont 2^n bandes verticales de largeur λ^n

$$V_{a_{-n} a_{-(n-1)} \dots a_{-1}} = V_{a_{-1}} \cap f(V_{a_{-2}}) \cap \dots \cap f^{n-1}(V_{a_{-n}})$$

$$= f(H_{a_{-1}}) \cap f^2(H_{a_{-2}}) \cap \dots \cap f^n(H_{a_{-n}})$$

$$\bigcap_{i=-n}^n f^n(s) = \bigcup_{[a]_{2n} \in \Sigma_{2n}} C_{a_{-n} a_{-(n-1)} \dots a_{-1} a_0 \dots a_{n-1}}$$

ou Σ_{2n} sequences à $2n$ symboles $[a]_{2n} = a_{-n} \dots a_{-1} a_0 \dots a_{n-1}$
 $a_i \in \{1, 2\}$

$$C_{a_{-n} \dots a_{n-1}} = \bigcap_{a_{-n} \dots a_{-1}} H_{a_0 \dots a_{n-1}}$$

$\Rightarrow 2^{2n}$ cases de codes $[x^n, y^{-n}]$

$$x \in C_{a_{-n} \dots a_{n-1}} \Leftrightarrow x \in f^n(U_{a_{-n}}) \cap \dots \cap f(U_{a_{-1}}) \cap U_{a_0} \cap f^{-1}(U_{a_1}) \dots \cap f^{-(n-1)}(U_{a_{n-1}})$$

$$\Leftrightarrow f^{-n}(x) \in U_{a_{-n}}, f^{-(n-1)}(x) \in U_{a_{-(n-1)}} \dots f^{-1}(x) \in U_{a_{-1}}, x \in U_{a_0} \dots f^{n-1}(x) \in U_{a_{n-1}}$$

\rightarrow codage de l'abîme de $k = -n$ à $n-1$ ($2n$ pas de temps).

4) lorsque $n \rightarrow +\infty$

On a $C_{a_{-2} a_0} \supset C_{a_{-2} a_{-1} a_0 a_1} \supset \dots \supset C_{a_{-n} \dots a_{n-1}} \supset C_{a_{-(n+1)} \dots a_n$

etc... , ces cercles ayant un diamètre qui tend vers 0.

Par le même th. que pour la multiplication on a

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_{[a]_n} \rightarrow \{x\}$$

Asymptotiquement $\bigcap_{i=-n}^n f^i(S) \rightarrow \Lambda$ qui est une intersection

de lignes verticales et de lignes horizontales. C'est un ensemble de Cantor (plus exactement un cantor \times un cantor).

Chaque point de Λ admet un unique codage $a_{-s} \dots a_s$.

Donc, soit $\Sigma = \{ \text{ensemble des suites bi-infinies } a_{-s} \dots a_s \mid a_i \in \{1, 2\} \}$

et chaque $x \in \Lambda$ on peut associer un et un seul codage $\tilde{a} \in \Sigma$ qui réalise l'orbite de x sous la dynamique du feuilleté.

Comme l'espace des suites bi-infinies est dense, Σ admet une structure d'espace topologique dont les ouvert sont les cylindres $C_{\alpha_{-n} \dots \alpha_n}$

$= \{ \tilde{a} \in \Sigma \mid a_{-n} = \alpha_{-n}, \dots, a_n = \alpha_n \}$ et qui admet la métrique

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{i=-s}^{+s} \frac{|a_i - b_i|}{2^{|i|}}$$

Il existe alors un homeomorphisme qui envoie $\Sigma \rightarrow \Lambda$,
 l.q. $x = \varphi(\tilde{a})$ et tel que l'image réciproque d'un cané
 $\tilde{C}_{a_n \rightarrow a_{n-1}}$ est un cylindre $C_{a_n \rightarrow a_{n-1}}$.

Sur Σ , la dynamique par l'application du fer à cheval se traduit
 par un décalage ^{à gauche} sur les séquences bi-infinies. Les 2 dynamiques
 sont topologiquement conjuguées par φ et les orbites sont topologiquement
 équivalentes.

On se déduit :

- Th
- Λ admet une infinité dénombrable d'orbites périodiques
 - " une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques
 - " une orbite dense

2.) Structure Hyperbolique de Λ

l'application du fer à cheval, restreinte au cané

- étire le long des directions verticales
- contracte le long des directions horizontales

En particulier la matrice jacobienne restreinte à V_1 (resp V_2)
est du type :
$$\begin{pmatrix} \pm \lambda & 0 \\ 0 & \pm \mu \end{pmatrix}$$

où - signifie que l'orientation est renversée

Cela signifie que, le long de l'axe Ox les distances sont contractées de $|\lambda|$ par f , et que, le long de l'axe Oy , les distances sont dilatées de $|\mu|$. Réciproquement on voit que les distances sont contractées de μ^{-1} par f^{-1} .

Si l'on considère maintenant un point $x \in \mathbb{R}^2$, $Df_x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$,

et l'espace tangent à x (\mathbb{R}^2) se décompose en 2 sous espaces
 $E_x^0 = Ox$, $E_x^u = Oy$, avec $\mathbb{R}^2 = T_x = E_x^0 \oplus E_x^u$
 $0 < \lambda < 1 < \mu$

l.q :

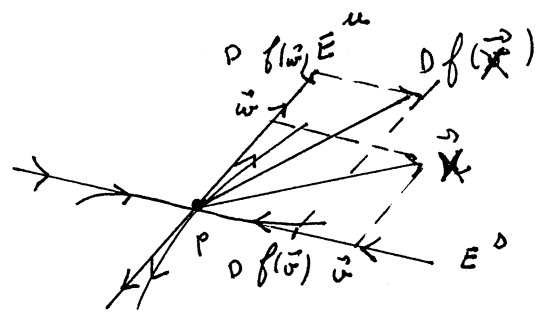
i) $\forall \vec{v} \in E_x^0 \quad \| Df_x^n \vec{v} \| = \lambda^n \| \vec{v} \|$ (contraction selon E^0)

ii) $\forall \vec{w} \in E_x^u \quad \| Df_x^{-n} \vec{w} \| = \mu^{-n} \| \vec{w} \|$ (contraction rétrograde selon E^u)

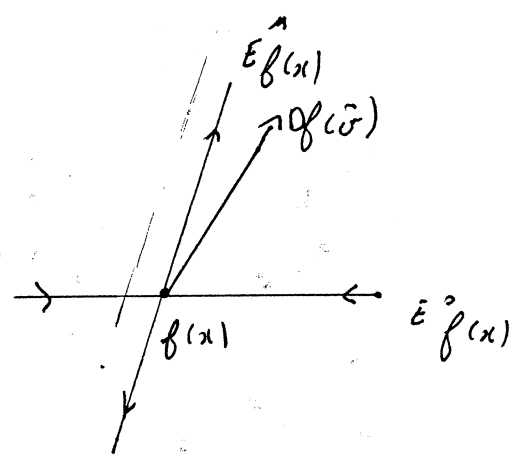
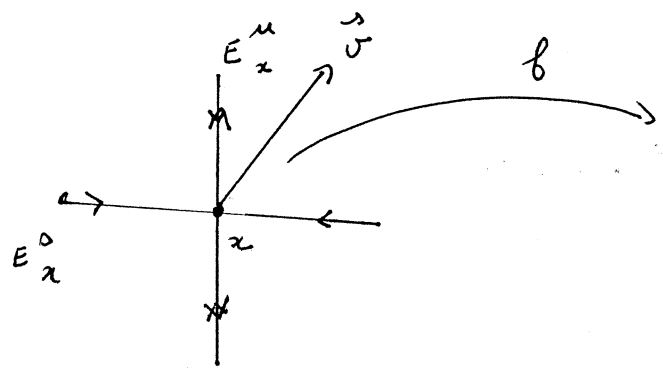
iii) $Df(E_x^0) = E_{f(x)}^0$; $Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ (la décomposition est transportée par f (f^{-1}))

l'ensemble satisfaisant ces propriétés (et quelques autres) est dit
hyperbolique.

cf: Point hyperbolique ($f(p) = p$)



mais ici le point se déplace avec f .



variétés stable et instable

Th (Hirsch-Pugh (1970))

Λ compact, invariant par un difféomorphisme C^2 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec structure hyperbolique $E^s \oplus E^u$. Alors $\exists \epsilon > 0$, et 2 collections de variétés C^2 , $W^s_\epsilon(x)$, $W^u_\epsilon(x)$, $x \in \Lambda$ satisfaisant à :

$$1) y \in W^s_\epsilon(x) \Leftrightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq 0$$

$$y \in W^u_\epsilon(x) \Leftrightarrow d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq 0$$

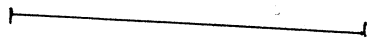
- 2) $W^s_\epsilon(x)$ a pour espace tangent en x $E^s(x)$
- $W^u_\epsilon(x)$ " " " " " " $E^u(x)$

$0 < \lambda < \mu < 1 < \nu$ h. q.

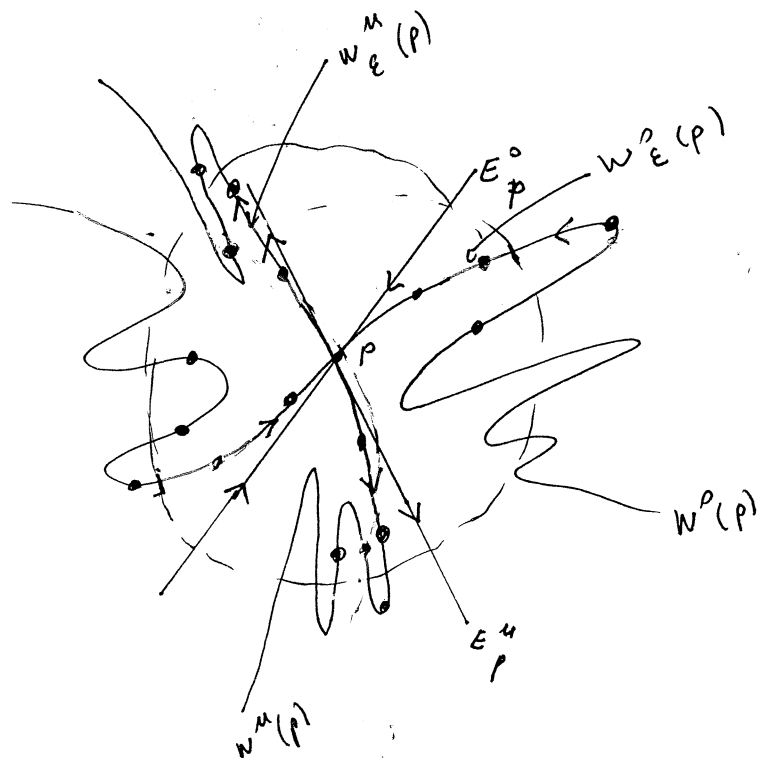
$$y \in W_E^s(x) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c \lambda^n, \forall n \geq 0$$

$$y \in W_E^u(x) \Rightarrow d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq c \mu^{-n}, \forall n \geq 0$$

4) $W_E^s(x), W_E^u(x)$ varient continûment avec x .



f : Point hyperbolique



$$a) \quad W_E^s(p) = \left\{ y \in B(\varepsilon, p) \mid f^n(y) \rightarrow p, n \rightarrow +\infty \text{ et } f^{-n}(y) \in B(\varepsilon, p), \forall n \geq 0 \right\}$$

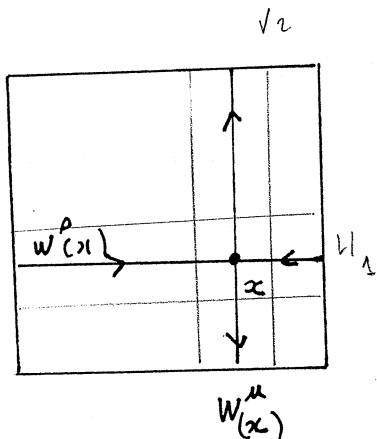
$$W_E^u(p) = \left\{ y \in B(\varepsilon, p) \mid f^{-n}(y) \rightarrow p, n \rightarrow +\infty, \text{ et } f^n(y) \in B(\varepsilon, p), \forall n \geq 0 \right\}$$

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_E^s(p)), \quad W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_E^u(p))$$

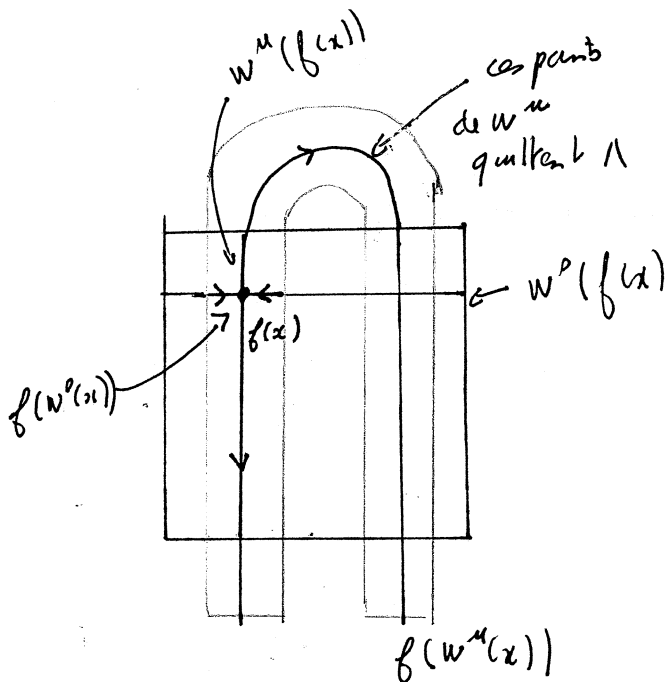
Dans le cas du théorème le point x n'est pas forcément un point fixe.

Cas du feu à cheval:

Les variétés stables (resp. instables) sont les lignes horizontales (resp. verticales).

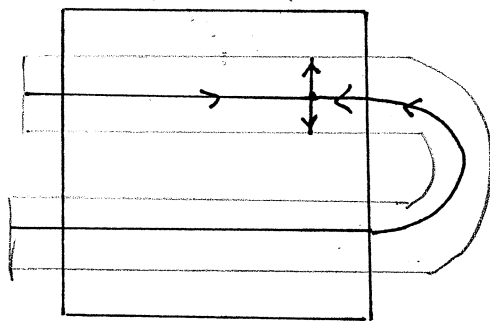


f



f^{-1}

$$\begin{aligned} f(W^s(x)) &\subset W^s(f(x)) \\ f(W^u(x)) &\supset W^u(f(x)) \end{aligned}$$



Rq: $\forall x, y \in \Lambda \quad W^s(x) \cap W^u(y)$ est un point unique

→ structure de produit local → permet la construction de partition remarquables (partitions de Markov) permettant de définir une dynamique symbolique sur les éléments de la partition (sans décalage de type fini ou chaîne de Markov topologique).

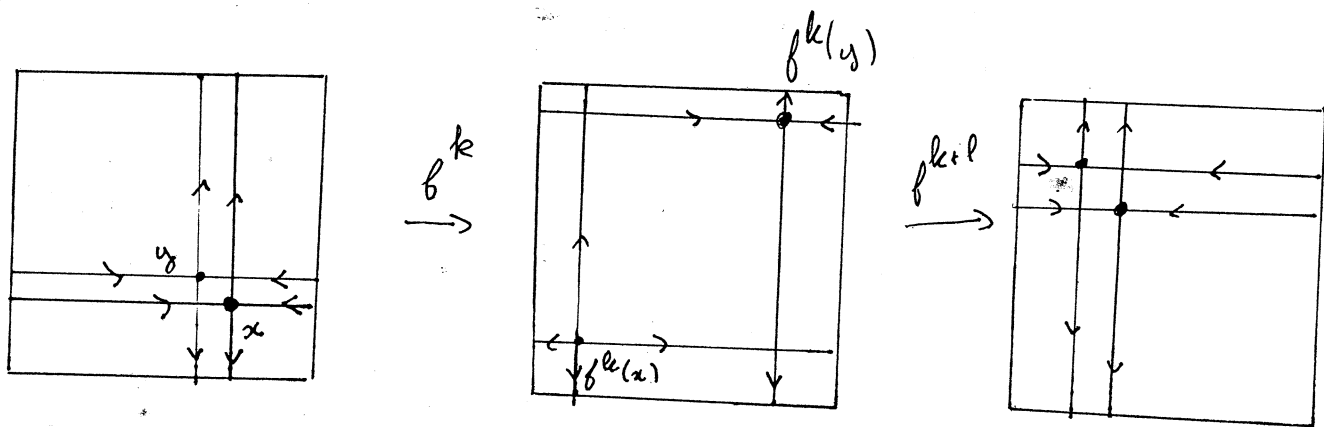
Pour un ensemble hyperbolique on a :

- contraction sur les variétés stables
- dilatation " " " " instables

La S.C.I provient des directions instables

La contraction le long des directions stables entraîne que 2 trajectoires divergeant localement peuvent ensuite se rapprocher arbitrairement près.

compétition dilatation - contraction



29: Les parts de $w^s(x), w^u(x)$, $x \in \Lambda$, n'appartiennent pas à Λ (cf dessin précédent)

2.3) Lemme de poursuite (ohadaornig lemma)

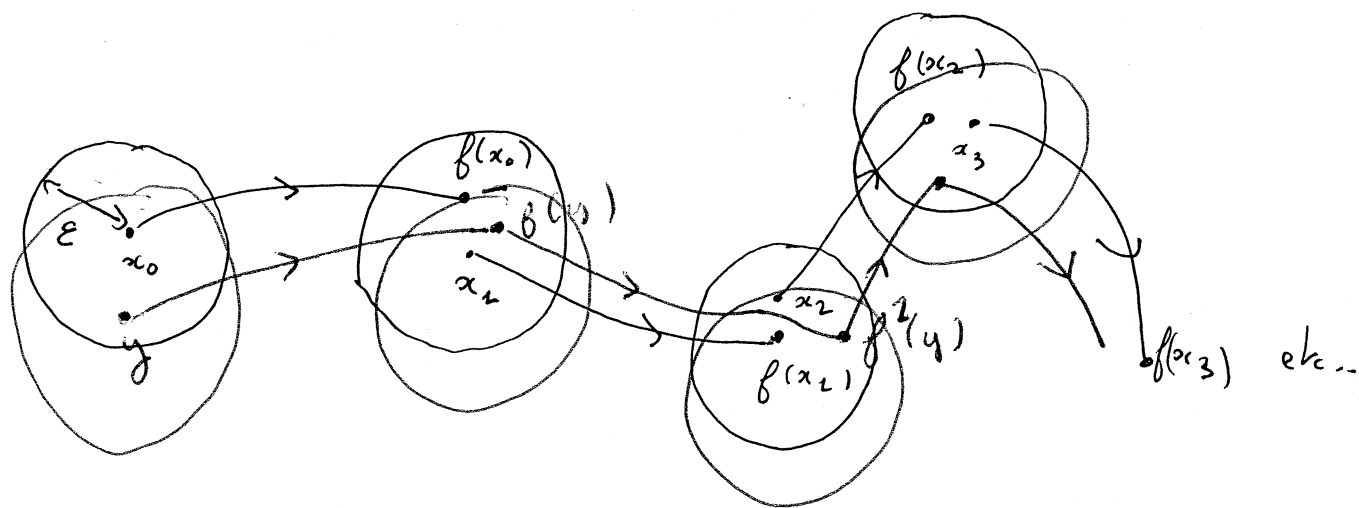
Peut-on faire des simulations numériques d'un système chaotique ?

→ Un ordinateur travaille en précision limitée. A cause de la S.C.I. cette erreur s'amplifie en quelques itérations

→ Que simule t'on dans ce cas ?

Plus précisément :

Un programme est un système dynamique. cependant, quand on itère $x_{n+1} = f(x_n)$, on commet à chaque instant une erreur, due à l'imprécision due à l'erreur machine. Donnons cette erreur par ε . La pseudo-orbite générée par le programme à l'allure suivante :



:- pseudo orbite :

Une sequence $\{x_i\}_{i=a}^b$ est une ε -pseudo orbite pour f si $d(x_{i+1}, f(x_i)) \leq \varepsilon, \quad i \in [a, b]$

Est-ce que cette trajectoire s'approche d'une trajectoire réelle?

Def: Soit $\beta > 0$

un point y β -poursuit x si $d(f^i(y), x_i) < \beta$, $a \leq i \leq b$.

Lemme de poursuite (Bowen 70, 78):

Soit Λ un ensemble hyperbolique ^{compact} invariant. Alors $\forall \beta > 0$, $\exists \varepsilon > 0$,
v.q. toute ε -pseudo-orbite dans Λ est β -poursuivie par un point
 $y \in \Lambda$.

Autrement dit, quelle que soit la précision β avec laquelle je veux approcher
la trajectoire réelle, il existe une précision informatique ε par laquelle
toutes les trajectoires que je génère sont proches de β de la trajectoire
réelle, sur le laps de simulation.

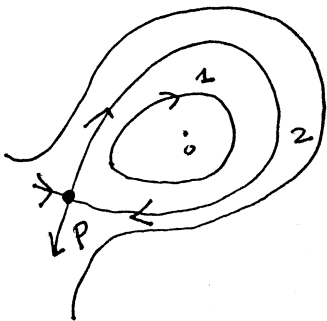
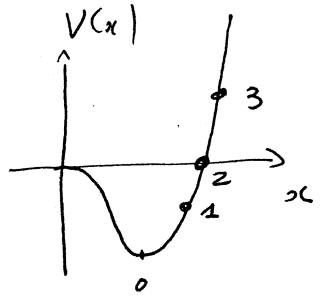
→ On ne génère pas une vraie trajectoire, mais on approche
d'autant près qu'on veut une trajectoire réelle (même si on ne
sait pas laquelle).

2.4) Intersection homoclines transverses et feu à cheval

Def: Un point fixe p est dit homoclie si $W^s(p) = W^u(p)$

E_x (atps continu)

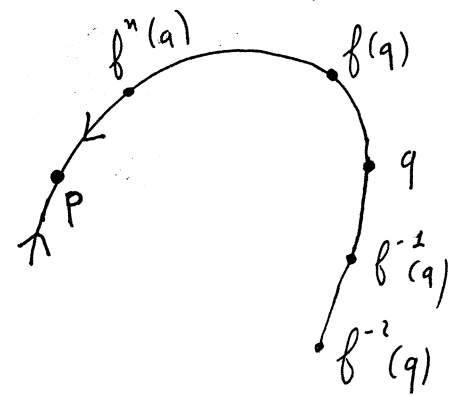
$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$



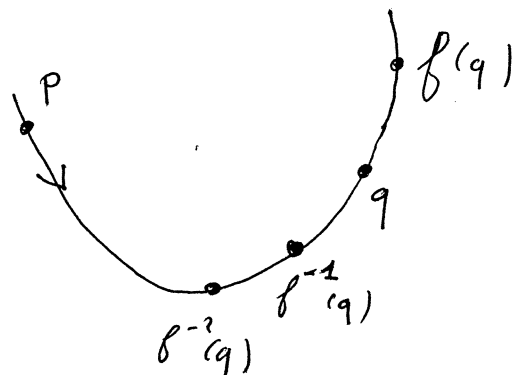
A tps discret, $W^s(p)$ et $W^u(p)$ peuvent s'intersecter transversalement
i.e. localement l'intersection est réduite à 1 point, soit q .

$$q \in W^s(p) \cap W^u(p)$$

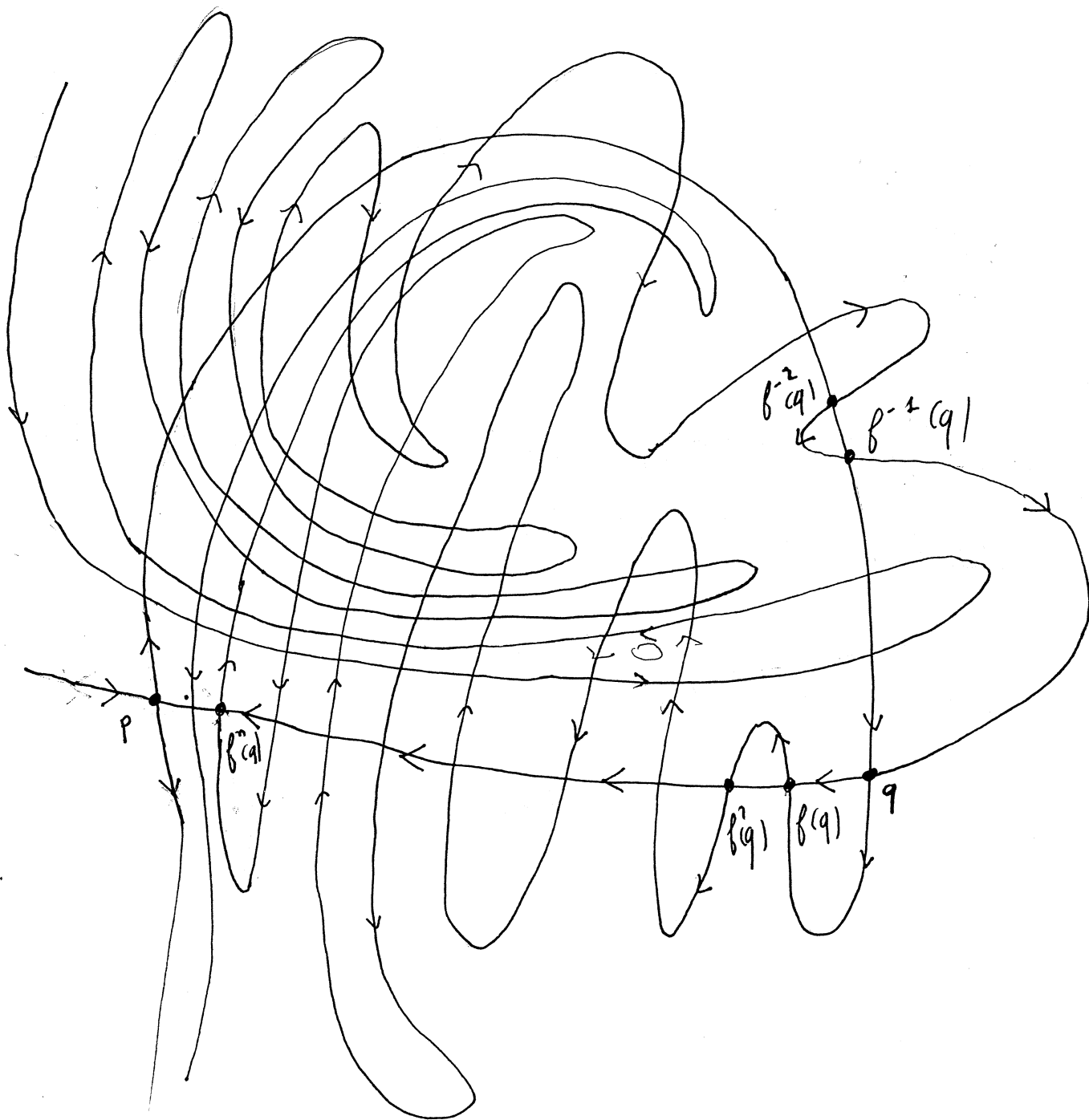
$$q \in W^s(p) \Rightarrow \forall n, \begin{cases} f^n(q) \in W^s(p) \\ f^{-n}(q) \in W^s(p) \end{cases}$$



$$q \in W^u(p) \Rightarrow \forall n, \begin{cases} f^{-n}(q) \in W^u(p) \\ f^n(q) \in W^u(p) \end{cases}$$



en ailleurs, si f est un diffeomorphisme,
la transversalité est préservée



$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \quad f^n(q) \in W^s(p) \cap W^{uc}(p)$

\rightarrow infinité d'intersection transverse

Mais $W^s(p)$ (resp. $W^u(p)$) ne peut s'intersecter elle-même ailleurs qu'en p (unicité des trajectoires)

\rightarrow infinité d'intersection transverse

Fer à cheval

