

I) Définitions:

1) Equations différentielles ordinaires

a) Système différentiel autonome:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$; $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$; $U \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert, variété)

f est appelé champ de vecteurs (ou itérée).

b) Système non autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2)$$

Justifications contraires on se placera dans le cas (1).

2) Existence et unicité des solutions:

Théorème: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert (ou une variété différentiable) de \mathbb{R}^n .
Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction Lipschitzienne i.e. $\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|$
 $K < \infty$, et soit $x_0 \in U$. Alors il existe une unique solution $x(t)$ passant
par x_0 définie sur un intervalle de tps borné $[-c, c]$; $c > 0$
(c dépend de U).

En d'autres termes étant donné $a \in \mathcal{B}$ $\exists \varepsilon > 0, T > 0, \forall x \in \mathcal{B}(a, \varepsilon)$
 il y a une solution unique par $[-T, T]$.

En d'autres termes la trajectoire $x(t)$ est définie localement.
 Par un temps suffisamment long elle peut quitter U .

Exemple $\dot{x} = x$ $U = [a, b]$
 $x(t) = e^t x_0$

Contre exemple : $\dot{x} = \sqrt{x} = x^{1/2} (x > 0) \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2$
 $\rightarrow 2$ solutions issues de a

Remarque : En général les champs de vecteurs que nous considérons seront
 (au moins) continûment différentiables.

Th d'existence globale de la solution:

L'équation différentielle $\dot{x} = f(x), f(x) \in M \subset \mathbb{R}^n$; M compact
 et $f \in \mathcal{C}^1$ a des solutions définies $\forall t \in \mathbb{R}$.

3) flot:

Soit $x_0 \in U$ une condition initiale, $x(t)$ la trajectoire passant
 par x_0 à $t=0$ ($x(0) = x_0$).

On cherche l'application $\varphi^t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à l'état
 initial $x(0) = x_0 \in U$ du système associe son état à l'instant t :
 $x(t)$. Soit:

$$x(t) = \varphi^t \cdot x_0 \quad (3)$$

En ce cas l'évolution est donnée par une famille à un paramètre d'applications $(\varphi^t)_{t \geq 0}$. (2)

Cette famille doit à priori vérifier les conditions suivantes:

1) $\varphi^t x$ doit dépendre différentiablement de x et t .
en effet:

- $\varphi^t x$ est la solution de:

$$\frac{d}{dt} \varphi^t x = f(\varphi^t x)$$

$$- \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\|\varphi^t x_2 - \varphi^t x_1\|}{\|x_2 - x_1\|} < +\infty$$

(régularité des trajectoires)

En ce cas la famille $(\varphi^t)_{t \geq 0}$ est une famille à un paramètre de difféomorphismes.

D'autre part:

$$2) \varphi^0 = \mathbb{I}$$

$$3) \varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$$

Les propriétés (2) et (3) sont des propriétés de semi-groupe et $(\varphi^t)_{t \geq 0}$ est un semi-flot.

Si de plus l'application inverse f^{-t} est définie $\forall t \geq 0$ (ie $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = \mathbb{I}$) la famille $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ constitue un groupe à un paramètre de difféomorphisme.

Un tel groupe satisfaisant à (1) est appelé flot.

Ex: $\dot{x} = x$

Contre-exemple à l'existence du flot:

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt ; \quad -\frac{1}{x} = t + c ; \quad c = 1/x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

Ainsi $\varphi^t x_0 = \frac{x}{1 - tx}$

On a: $\varphi^0 = \mathbb{I}$

$$\varphi^{t+s} = \frac{x}{1 - (t+s)x}$$

$$\text{et } \varphi^t \varphi^s x = \frac{\varphi^s x}{1 - t \varphi^s x} = \frac{\frac{x}{1 - sx}}{1 - t \frac{x}{1 - sx}}$$

L3

Soit $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$

Malheureusement cette application n'est pas définie $\forall t$.

(Pour chaque $t \neq 0$ $\phi^t x$ n'est pas définie en $x = 1/t$).

Le problème tient au fait que l'espace de phase $\{x \mid x \geq 0\}$ n'est pas compact.

4) Espace de phase:

L'espace des trajectoires de (1) est appelé espace de phases.

Les trajectoires sont en tout point tangentes au champ de vecteurs f (à la vitesse) sauf aux points singuliers où f s'annule.

5) Transformation d'un système différentiel d'ordre n en n systèmes d'ordre 1:

L'équation différentielle:

$$a_n \frac{dx^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 = 0$$

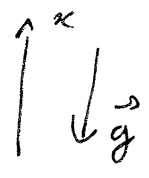
est équivalente au système différentiel de dimension n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x_1 + a_0 = 0 \end{array} \right.$$

6) exemples:

a) chute libre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$



On pose $y = \dot{x}$ (vitesse)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = y = f_x(x, y) \\ \dot{x} = -g = f_y(x, y) \end{array} \right.$$

(Pour connaître parfaitement le mouvement il faut à la fois vitesse et position)

Solutions:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = -gt + y_0 \\ x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0t + x_0 \end{array} \right.$$

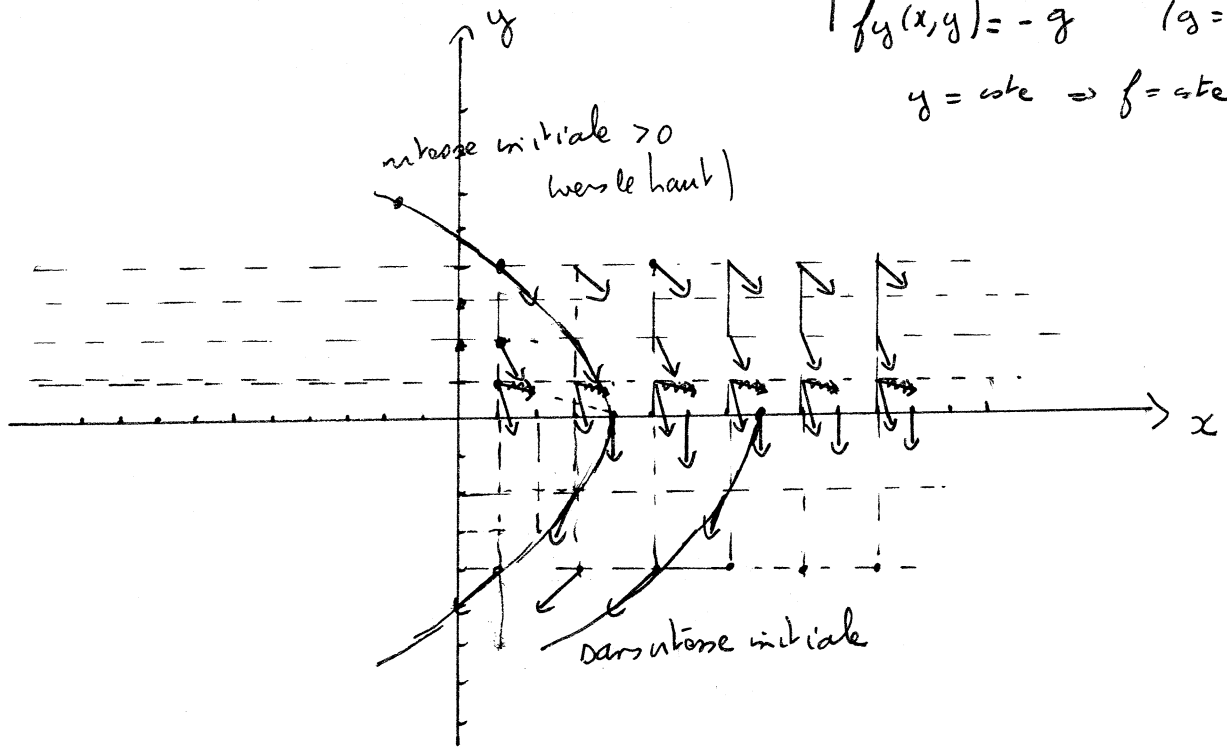
flot:

$$\varphi^t : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0t + x_0 = \varphi_x^t(x_0, y_0) \\ y(t) = -gt + y_0 = \varphi_y^t(x_0, y_0) \end{cases}$$

Champ de vecteurs et trajectoires (→ Maple)

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y \\ f_y(x,y) = -g \quad (g = 2 \text{ cm}) \end{cases}$$

$$y = v_0 t \Rightarrow f = g t^2$$



La vitesse est nulle au point d'altitude maximale.
 Les trajectoires sont des paraboles dans l'espace de phase

$$\boxed{x - x_0 = -\frac{1}{2g} (y - y_0)^2 - \frac{y_0}{g} (y - y_0)}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} < 0 &\Rightarrow y \nearrow \\ y < y_0 & \end{aligned}$$

b) Petites oscillations :

$$\ddot{x} = -kx \quad ; \quad k > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y = f_x(x,y) \\ \dot{y} = -kx = f_y(x,y) \end{cases}$$

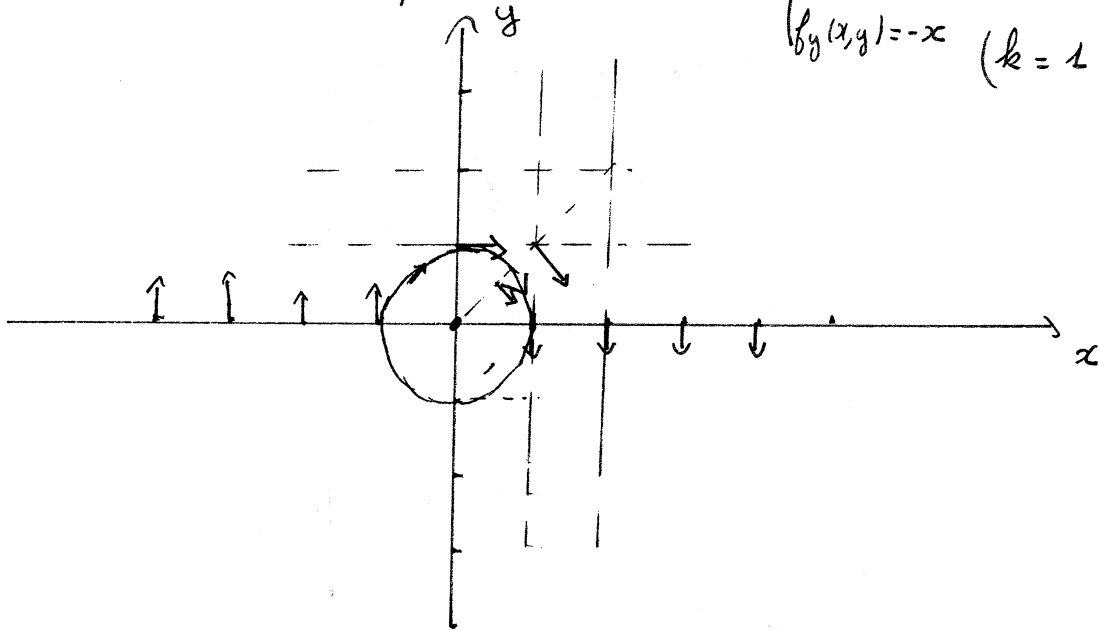
Solutions :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) \cos(\sqrt{k}t) + \frac{y(0)}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t) \\ y(t) = -x(0) \sqrt{k} \sin(\sqrt{k}t) + y(0) \cos(\sqrt{k}t) \end{cases}$$

flot :

$$\varphi^t(x_0, y_0) = \begin{cases} \varphi_x^t(x_0, y_0) = x_0 \cos(\sqrt{k}t) + \frac{y_0}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t) \\ \varphi_y^t(x_0, y_0) = -x_0 \sqrt{k} \sin(\sqrt{k}t) + y_0 \cos(\sqrt{k}t) \end{cases}$$

Trajectoires périodiques.



$$\begin{cases} \dot{x}(x,y) = y \\ \dot{y}(x,y) = -x \quad (k=1) \end{cases}$$

Dans l'espace de phase ce sont des courbes
ellipses

$$kx^2 + y^2 = kx_0^2 + y_0^2$$

Rq : $y^2 + kx^2$ est l'énergie totale et elle se conserve dans ce système non dissipatif.

c) Ressort amorti

$$\ddot{x} = -kx - \nu \dot{x}$$

on pose $k = \nu = 1$

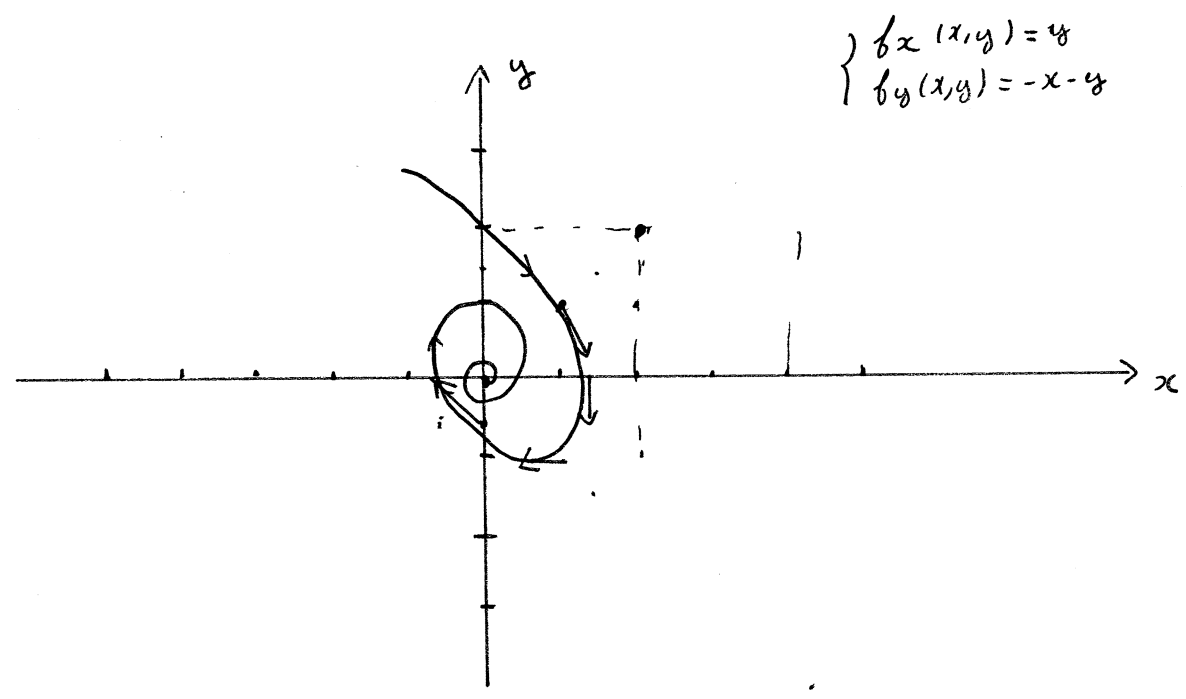
$$\ddot{x} = -x - \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

Solutions: $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t/2} \left[x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2y_0 + x_0) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \\ y(t) = -\frac{e^{-t/2}}{2} \left[x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2y_0 + x_0) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \\ + e^{-t/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \left[-x_0 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2y_0 + x_0) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \end{cases}$$



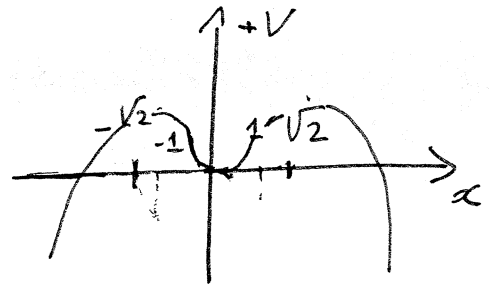
Les trajectoires sont des spirales.

d) Ressort non linéaire amorti

L'énergie potentielle standard est $+\frac{1}{2}x^2$. Pour des oscillations plus importantes on peut faire intervenir une correction (au 4ème ordre pour préserver la symétrie):

$$V(x) = +\frac{1}{2}x^2 \rightarrow \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{dV}{dx} = +x \rightarrow x^3$$



$$\Rightarrow \ddot{x} = -x + x^3 - \dot{x} \quad (\text{cf } \vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 - y \end{cases} \quad \text{au plus g\u00e9n\u00e9ralement} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx + \alpha x^3 - \nu y \end{cases}$$

exercice: Tracer les portraits de phase avec Maple.
DE pbl 2 ([y, -x+x^3-y], [x, y], 0..2, {0.1, 0.2}, x=-2..2, y=-1..1)
 Phase portrait

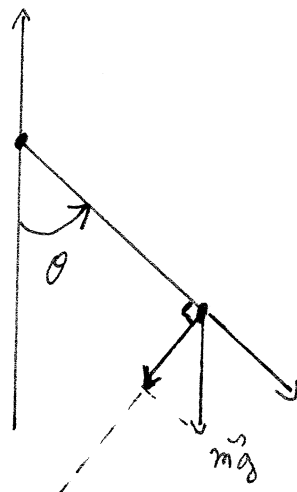
Rq: Pendule plan

le mod\u00e8le peut \u00eatre vu comme une approximation du pendule plan.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - y \end{cases}$$

A l'ordre 3 on a en effet:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{x^3}{3} - y \end{cases}$$



$$\left(\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \right)$$

7) Systèmes à temps discret :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad x_n \in \mathbb{R}^N \quad (7)$$

Flot :

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = \dots = f^{n+1}(x_0)$$

i.e le flot est la famille à un paramètre d'applications

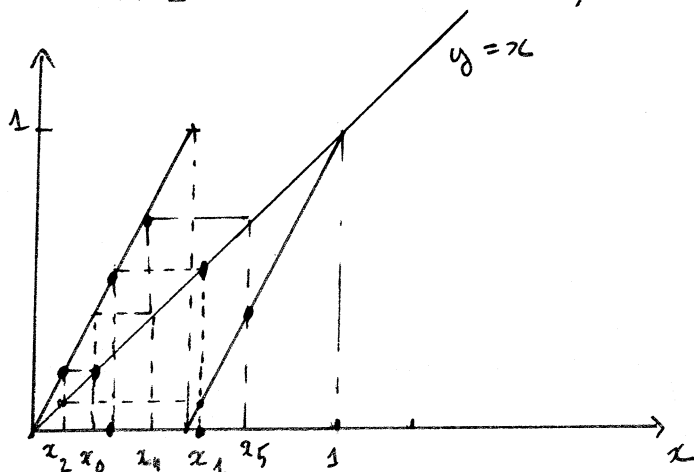
$$(f^n)_n$$

Si f est inversible alors f^{-n} existe et f^n est définie par $n \in \mathbb{Z}$ (flot). Dans le cas contraire on n'a qu'un semi-flot $(f^n)_{n \geq 0}$.

Exemples

1) Multiplication par 2, modulo 1

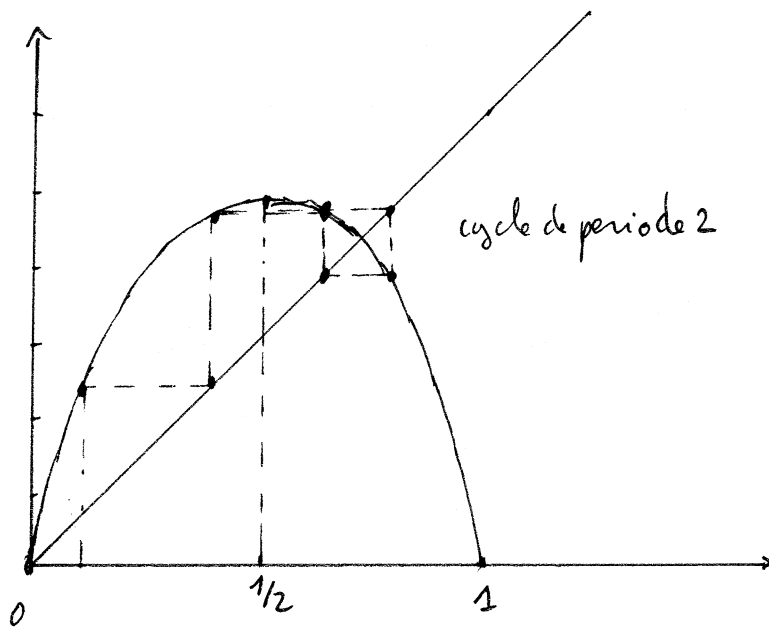
$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \quad ; \quad x_n \in \mathbb{R}$$



On parle d'application de l'intervalle. On verra qu'elle est chaotique.

b) Application logistique (ou application de Feigenbaum)

$$x_{n+1} = \mu x_n - \mu x_n^2 = \mu x_n(1-x_n); \quad \mu \in [0, 4] \\ x_n \in [0, 1]$$



$$f'(x_n) = \mu - 2\mu x_n \quad \text{nulle en } x = 1/2; \quad f(1/2) = \mu/4$$

exercices: Représente ces 2 applications avec Napple.
Visualise les changements de régime lorsque $\mu > 0$

8] Remarque:

On voit que dans les cas continus et discret (1) et (7) l'évolution est donnée par une famille à un paramètre d'applications. On la notera dorénavant f^t dans tous les cas. Pour le cas continu $t \in \mathbb{R}$ et pour le cas discret $t = n$ entier.

II] Points fixes - stabilité:

1) Définition:

Un point fixe ou équilibre est un point invariant par le flot

i.e :

$$f^t x = x \quad \forall t \quad (8)$$

cette condition s'écrit également, dans le cas t continu:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 0 \quad (9)$$

Dans ce cas les points fixes sont les zéros du champ de vecteurs.

Dans le cas discret on a :

$$x = f(x) \quad (10)$$

En dimension 1 les points fixes sont donnés par l'intersection de f avec la première bissectrice.

En dimension N ce sont également les zéros de $f(x) - x$.

2) Exemples

a) chute libre :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \text{Pas de point fixe}$$

b) ressort:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

un seul point fixe $(0,0)$

c) ressort amorti:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx - \nu y \end{cases}$$

un seul point fixe $(0,0)$

d) Oscillateur anharmonique amorti:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx + \alpha x^3 - \nu y \end{cases}$$

Points fixes: $(0,0)$; + solutions de $-k + \alpha x^2 = 0$
 $x^2 = \frac{k}{\alpha}$

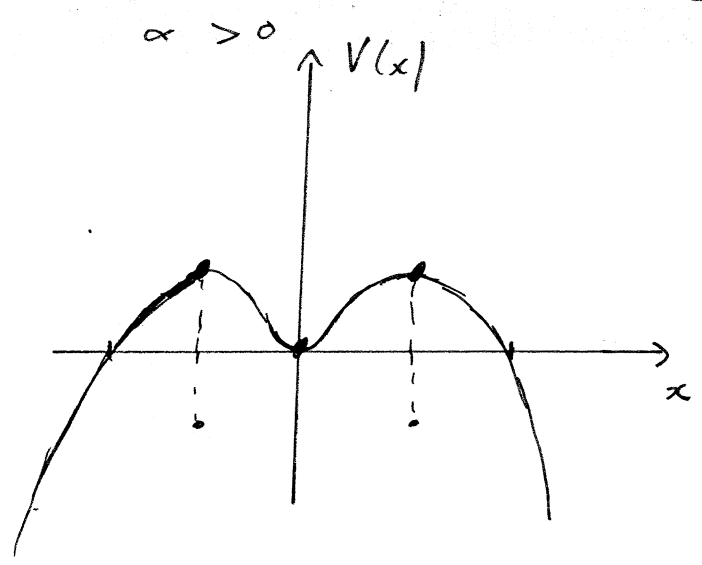
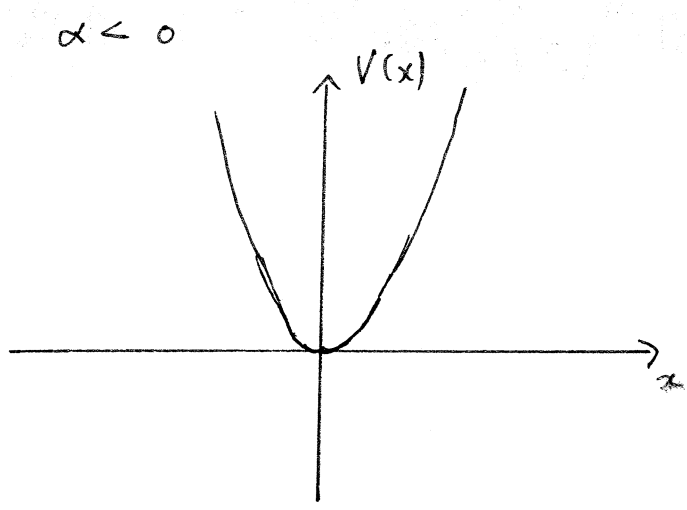
Soit $\gamma = k/\alpha$;

Si $\alpha < 0$ ($\gamma < 0$) 1 seul point fixe: $(0,0)$

Si $\alpha > 0$ ($\gamma > 0$) 3 points fixes: $(0,0)$; $(-\sqrt{\gamma}; 0)$; $(\sqrt{\gamma}; 0)$

on peut visualiser la situation intuitivement en traçant l'énergie potentielle:

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{\alpha}{4} x^4$$



On voit que $(0,0)$ est stable alors que les 2 autres équilibres sont instables

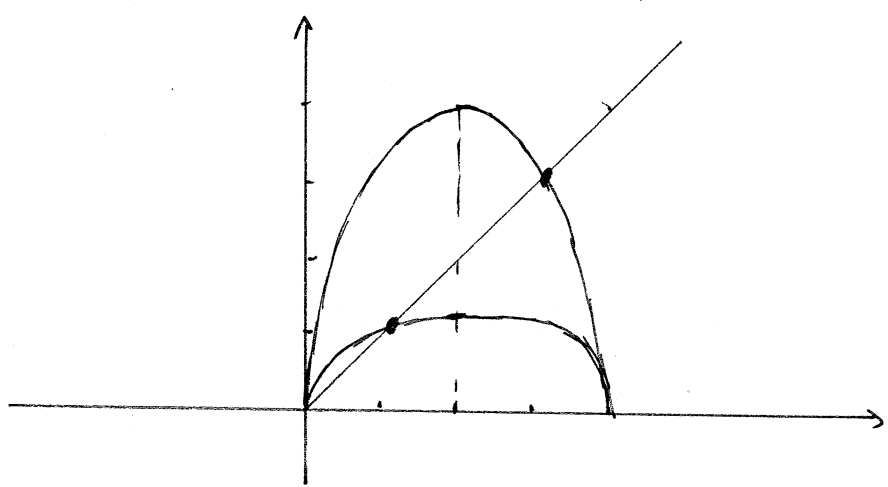
c) Application logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad ; \quad x_n \in [0, 1]$$

Points fixes: $\mu x_n (1 - x_n) = x_n$

$$\Rightarrow x_n = 0 \quad ; \quad x_n = 1 - 1/\mu$$

La position du second point fixe dépend de μ .



3) Stabilité

a) Définition générale

Un point \bar{x}^* sera stable si une solution $x(t)$ voisine de x^* à un instant donné le reste à tout instant.

En d'autres termes :

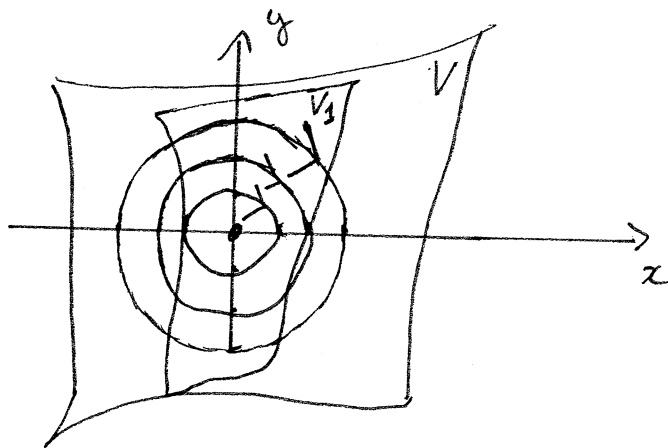
x^* est stable si pour tout voisinage V de x^* il existe un voisinage $V_1 \subset V$ tel que toute solution $f^t x_0$ issue de $x_0 \in V_1$ est définie et reste dans V , $\forall t > 0$

b) Stabilité asymptotique

Si $\exists V_1$ tel que $f^t x_0 \rightarrow x^*$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $\forall x_0 \in V_1$ alors x^* est asymptotiquement stable

c) Exemples

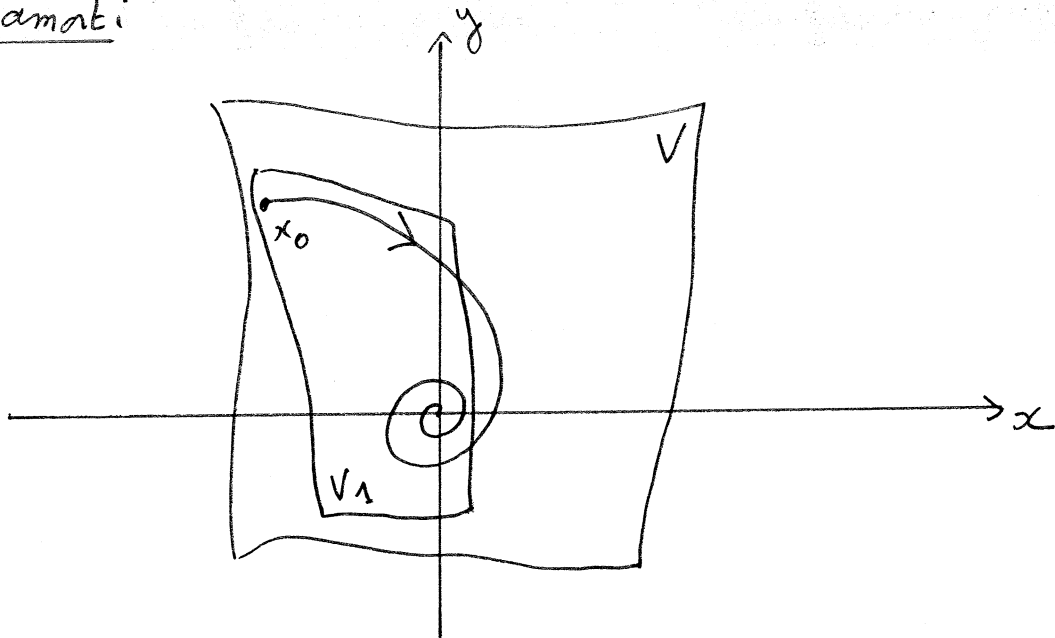
Remarque :



0 est stable, mais pas asymptotiquement stable.

Rq: Un tel point est appelé centre (ou paires imaginaires pures)

Ressort amorti:

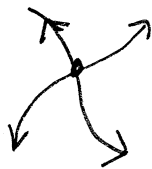


O est asymptotiquement stable.

d) Point fixe instable:

Un point fixe est instable si il n'est pas stable

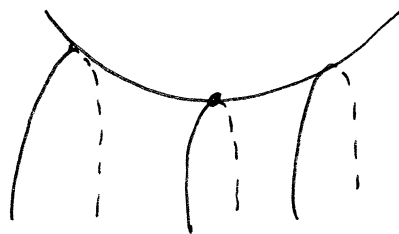
Exemples:



source



point puits



4) Systèmes linéaires

a) Systèmes à temps continu

Soit le système différentiel linéaire :

$$(11) \quad \dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \text{ matrice } n \times n \text{ de } \mathbb{R}^n$$

Les solutions s'écrivent formellement

$$x(t) = e^{tA} \cdot x_0 \quad (12)$$

$$\text{où } e^{tA} = \left[I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots \right]$$

Exponentielle d'une matrice

Soit $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, l'espace des matrices $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

est complet pour cette norme

(suite de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \rho(x_i, x_j) < \varepsilon \quad \forall i, j > N$)
($\rho(x_i, x_j) \rightarrow 0 \quad i, j \rightarrow \infty$)

Critère de Weierstrass:

Si une série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ de fonctions $f_i: X \rightarrow M$ est majorée par une série numérique convergente

$$\|f_i\| \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

alors elle converge uniformément et absolument sur x .

$$\text{Soit } e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on en déduit que:

La série e^A est uniformément convergente partout A sur chaque ensemble $X = \{A; \|A\| \leq a\}; a \in \mathbb{R}\}$

Solution de (11)

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) x_0$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{d t^k}{dt} \right) x_0 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} \right) x_0 \\ &= A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \cdot x_0 = A \cdot e^{tA} \cdot x_0 = A x(t) \end{aligned}$$

La solution est unique par le théorème d'existence et d'unicité.

Ainsi: le flot de (11) est

$$\boxed{f^t = e^{tA}}$$

bas d'une matrice diagonale

Cas de valeurs propres réelles distinctes

Dans ce cas A s'écrit dans sa base propre sous la forme diagonale :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'exponentielle de cette matrice est simplement :

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Supposons que A soit de rang n i.e. $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i$.

(11) Admet alors l'unique solution $x = 0$. Sous forme diagonale le système s'écrit :

$$x_i(t) = x_i(0) e^{\lambda_i t}$$

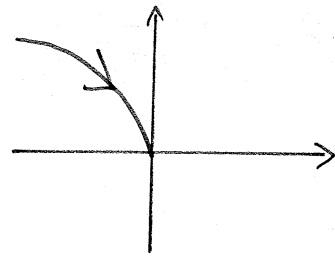
On voit alors que :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } \lambda_i < 0 \quad \forall i \text{ alors } 0 \text{ est asymptotiquement stable} \\ \text{Si } \exists i \quad \lambda_i > 0 \text{ alors } 0 \text{ est instable} \end{array} \right.$$

Exemple : pendule amorti :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \nu y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\nu \end{pmatrix}$$



valeurs propres : $\lambda(\lambda + \nu) + 1 = 0$; $\lambda^2 + \nu\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4}}{2}$$

Si $\nu > 2$ les valeurs propres sont réelles et négatives
 \Rightarrow la position d'équilibre est stable.

ν : coef de frottement.

Cas de valeurs propres complexes conjuguées, distinctes 2 à 2 :

Soit $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$; $\bar{\lambda}_i = \alpha_i - i\beta_i$ et $\vec{v}^R + i\vec{v}^I$ les vecteurs propres associés. Les solutions s'écrivent :

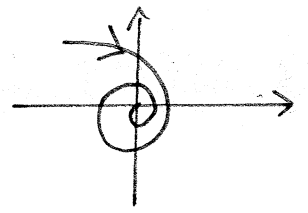
$$\begin{aligned} \vec{x}^{\delta} &= e^{\alpha_{\delta} t} \begin{pmatrix} \vec{v}^R \cos \beta_{\delta} t - \vec{v}^I \sin \beta_{\delta} t \end{pmatrix} \vec{x}^{\delta}(0) \\ \vec{x}^{\delta+1} &= e^{\alpha_{\delta} t} \begin{pmatrix} \vec{v}^R \sin \beta_{\delta} t + \vec{v}^I \cos \beta_{\delta} t \end{pmatrix} \vec{x}^{\delta+1}(0) \end{aligned}$$

La stabilité est alors donnée par la partie réelle des valeurs propres.

Si $\alpha_i = \text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$ alors 0 est stable (asymptotiquement)

Si $\exists \alpha_i > 0$ alors 0 est instable.

Exemple: Pendule amorti avec $\alpha \nu < 2$



bas de valeurs propres multiples (réelles)

Si λ est de multiplicité k alors sa contribution à A sous forme diagonale est le bloc de Jordan

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

et A se écrit sous forme de blocs

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

On voit que $B = \lambda I + \Delta$

où $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ est un bloc de taille k , nilpotent à l'ordre k .

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

en effet $\Delta^n = \begin{pmatrix} 0 & \overset{n}{\longleftarrow} 1 & \dots & 0 \\ & \searrow & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}; n < k$

et donc $\Delta^k = 0$

En ce cas $e^{\Delta t} = I + t\Delta + \frac{t^2}{2}\Delta^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$

Soit

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & 1 & t & \dots & t^{k-2}/(k-2)! \\ & & 1 & \dots & t^{k-3}/(k-3)! \\ & & & \dots & 1 \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

D'autre part si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$. Or I commute avec toutes les matrices. Donc

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \dots & t^{k-2} e^{\lambda t} / (k-2)! \\ & e^{\lambda t} & \dots & t^{k-3} e^{\lambda t} / (k-3)! \\ & & \dots & e^{\lambda t} \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Les solutions s'obtiennent par intégration directe.

$$x_3(t) = x_3(0) ; \quad x_2(t) = x_3(0)t ; \quad x_1(t) = x_3(0) \frac{t^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

Rq: Pour le cas général (ou complexes) la forme générale est

$$e^{\alpha_i t} \left[P(t) \cos(\beta_i t) + Q(t) \sin(\beta_i t) \right]$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes en t .

Conclusion:

Dans tous les cas

- si toutes les valeurs propres ont à partie réelle négative 0 est asymptotiquement stable
- s'il existe une valeur propre à partie réelle positive 0 est instable.

b) Systèmes à temps discret:

Sat

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (13)$$

La solution est:

$$x_n = A^n x_0 \quad (14)$$

Si A est non singulière (de rang N) 0 est l'unique point fixe.

Dans la base propre on a:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \|x_n - 0\| \leq |\lambda_{\max}|^n \|x_0\|$$

où λ_{\max} est la v.p. de plus grand module

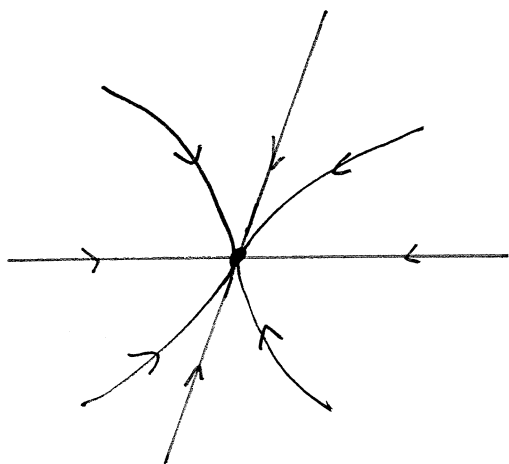
Exemples sur le plan

$$\dot{x} = Ax$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

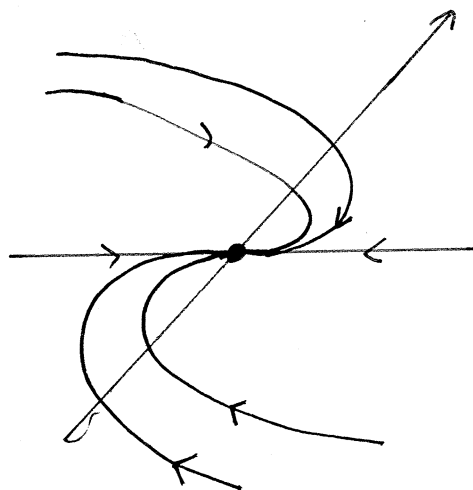
$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

valeurs propres réelles :



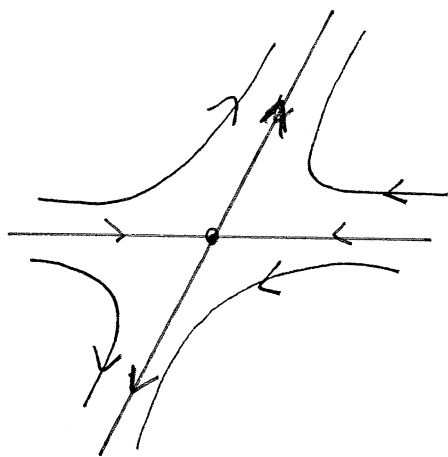
$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Point fixe hyperbolique stable



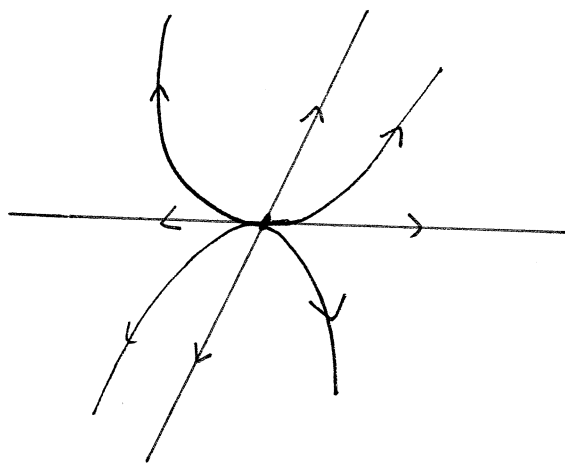
$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda_1 t} (x_0 + t y_0) \\ y(t) = e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$



$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Point fixe hyperbolique instable (point selle)



$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Point fixe hyperbolique instable (source)

Valeurs propres complexes

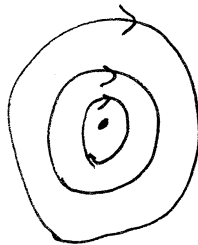
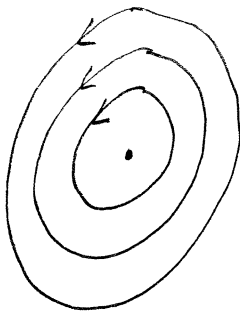
$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$$

$\alpha < 0$



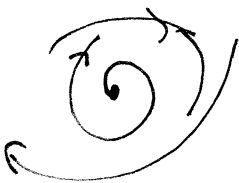
Foyer stable

$\alpha = 0$



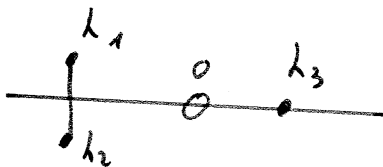
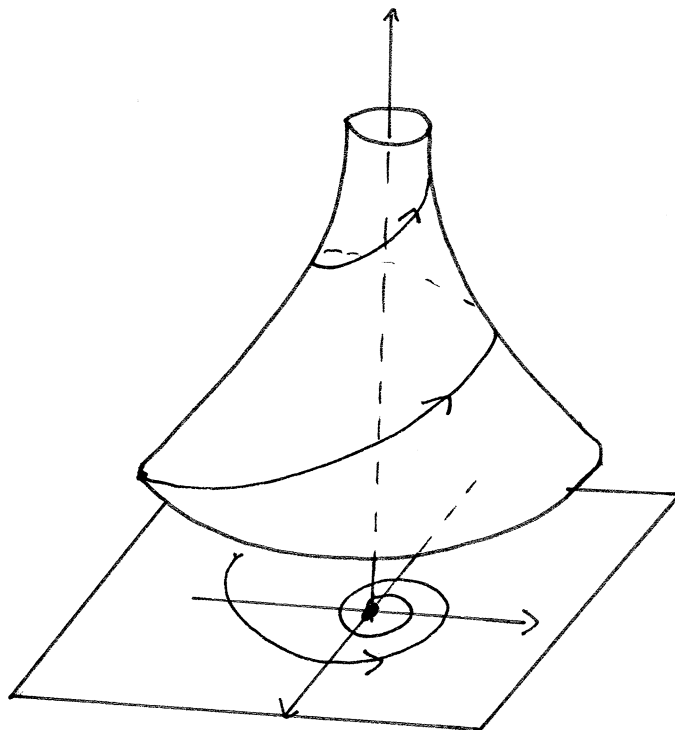
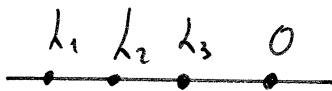
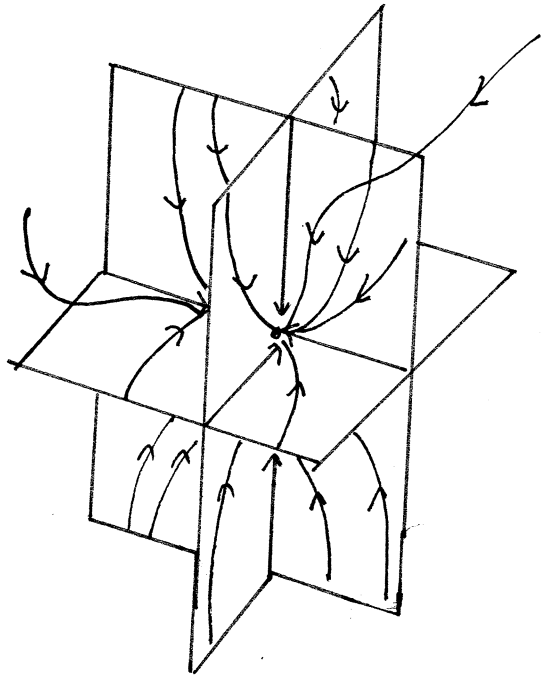
centres

$\alpha > 0$



Foyer instable

Exemples à 3 dimensions



ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$

On voit alors que :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } |k_m| < 1 \quad \mathcal{O} \text{ est asymptotiquement stable} \\ \text{Si } |k_m| > 1 \quad \mathcal{O} \text{ est instable} \end{array} \right.$$

Rq: Chaque part génère une orbite unique si toutes les valeurs propres sont non-nulle.

c) Espaces invariants:

Las contra :

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{tA} \vec{x}_0$$

Soit \vec{v}_j le j -ième vecteur propre associé à la valeur propre λ_j .

On a :

$$x_j(t) \vec{v}_j = e^{t\lambda_j} x_j(0) \vec{v}_j$$

Au moment dit la direction propre engendrée par \vec{v}_j est invariante par le flot.

De manière plus générale les sous-espaces propres sont invariants par le flot. On divise les espaces engendrés par les vecteurs propres en trois catégories.

Espace stable : E_s = espace engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres ont une partie réelle négative.

Espace instable : E_u : espace engendré par les vecteurs propres dont la partie réelle est négative.
 ↳ des valeurs propres

Espace central : E_c : espace engendré par les vecteurs propres dont la partie réelle est nulle.
 ↳ des valeurs propres

Les vecteurs de E_D (respectivement E_u) sont exponentiellement contractés (respectivement dilatés) par le flot.

Rq: Soit n_D, n_u, n_c les dimensions respectives de E_D, E_u, E_c

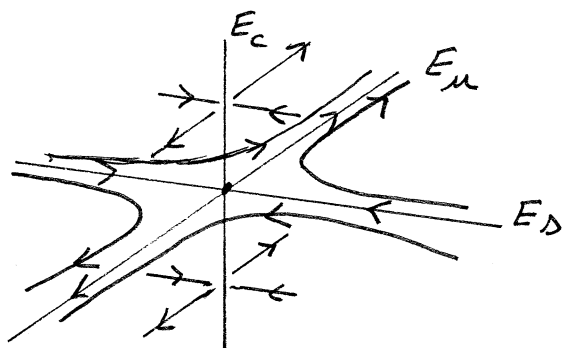
ona :

$$n_D + n_u + n_c = n \quad (15)$$

$$E_D \oplus E_u \oplus E_c = \mathbb{R}^n$$

Exemples

1)

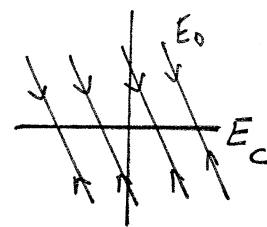


2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 ; \lambda_2 = -4$$

$$E_D = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} ; E_c = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; E_u = \emptyset$$



3)

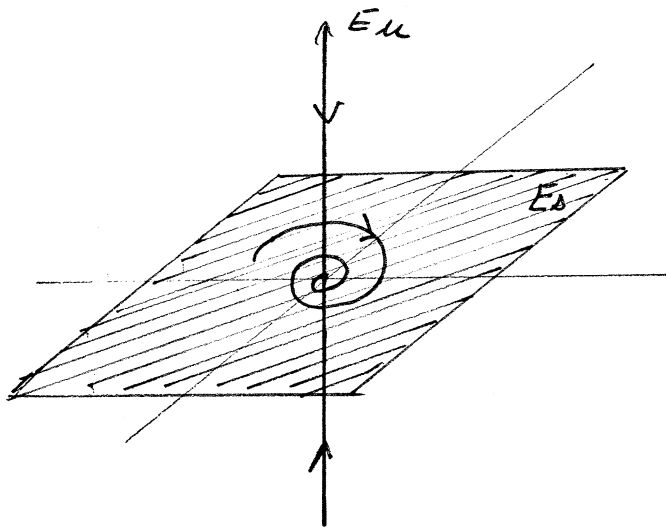
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 ; \lambda_{2,3} = -1 \pm i$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_u = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad E_D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Remarque : Si les valeurs propres associées ~~réelles~~ ne sont pas dégénérées (plusieurs ou identiques) alors sur E_c les vecteurs peuvent osciller avec une amplitude constante ($\lambda, \bar{\lambda} = \pm i\beta$) ou rester constants ($\lambda = 0$).

Dans le cas dégénéré on peut avoir croissance (non exponentielle) des solutions sur E_c .

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bas de

E_0^* = Espace engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres sont de module inférieur à 1.

E_u = Espace engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres sont de module supérieur à 1.

E_c = Espace engendré par les vecteurs propres dont les valeurs propres sont de module égale à 1.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

5) Stabilité linéaire

(14)

a) Système différentiel:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

On ne sait pas intégrer ce système dans le cas général et écrire la forme explicite du flot. Néanmoins on peut donner un certain nombre de renseignements sur le comportement local du flot. En particulier l'étude linéaire est très utile au voisinage des points fixes.

Soit x^* un point fixe i.e. $f(x^*) = 0$. Soit

$$Df_{(x^*)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=x^*}$$

la matrice jacobienne de f en x^* . Au voisinage de x^* on a :

$$f(x) = f(x^*) + Df_{(x^*)}(x - x^*) + \dots = Df_{(x^*)} \cdot (x - x^*) + \dots$$

Soit $\xi = x - x^*$:

$$\frac{d\xi}{dt} = Df_{(x^*)} \cdot \xi + o(\|\xi\|^2) \quad (16)$$

Si l'on considère le système linéarisé :

$$\frac{d\xi}{dt} = Df_{(x^*)} \cdot \xi \quad (17)$$

on se ramène au cas précédent, et le flot de (16) est :

$$Df^t = e^{t Df(x^*)} \quad (17)$$

Intuitivement on voit que, sur un voisinage suffisamment proche de x^* , l'évolution de (16) reçoit l'évolution de (15) et l'étude linéaire permet de caractériser l'évolution au voisinage du point fixe.

6) Théorème de Hartman - Grobman

Si $Df(x^*)$ n'a pas de valeur propre nulle ou imaginaire pure il existe un homéomorphisme h défini sur un voisinage U de x^* qui envoie localement les orbites du flot non linéaire f^t sur celle du flot linéaire $e^{t Df(x^*)}$. Cet homéomorphisme préserve le sens des orbites.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f^t} & U \\
 \uparrow h & & \uparrow h \\
 V_0 & \xrightarrow{e^{t Df(x^*)}} & V_0
 \end{array}
 \Rightarrow \boxed{h \circ e^{t Df(x^*)} = f^t \circ h}$$

Rq: $h(0) = 0$ pour assurer que $f^t(x^*) = x^*$

15

Cela signifie que si $Df(x^*)$ n'a pas de valeur propre nulle ou imaginaire pure la stabilité de x^* est donnée par l'application linéarisée.

Un point fixe x^* est dit hyperbolique si $Df(x^*)$ n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle. \rightarrow les valeurs propres seules suffisent à déterminer la stabilité.

(Pour un système à 1rs desct \rightarrow valeurs propres toutes de module $\neq 1$).

Dans le cas où ~~il~~ une ou plusieurs valeurs propres ont une partie réelle nulle la stabilité de x^* ne peut être déterminée par linéarisation.

Exemple: $\dot{x} = -x^3 = f(x)$

$x = x^2 \rightarrow \rightarrow \rightarrow$

0 est l'unique point fixe mais $f'(0) = 0$. Néanmoins $x = 0$ est stable.



$$\left(x(t) = \sqrt{\frac{2}{t - t_0 - \frac{1}{2u_0^2}}} \right)$$

c) Variétés invariantes

De la même façon que l'on a défini les espaces stable, instable et central dans le cas linéaire on peut définir l'analogue dans le cas non linéaire. Soit U un voisinage de x^* .

Variété stable locale: $W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U \mid f^t(x) \rightarrow x^*, t \rightarrow \infty \text{ et } f^t(x) \in U, \forall t \geq 0\}$

C'est donc l'ensemble des points ^{de U} qui vont converger vers x^* lorsque le temps augmente.

Variété instable locale: $W_{loc}^u(x^*) = \{x \in U \mid f^t(x) \rightarrow x^*, t \rightarrow -\infty \text{ et } f^t(x) \in U, \forall t \leq 0\}$

C'est l'ensemble des points ^{de U} qui viennent de x^* .

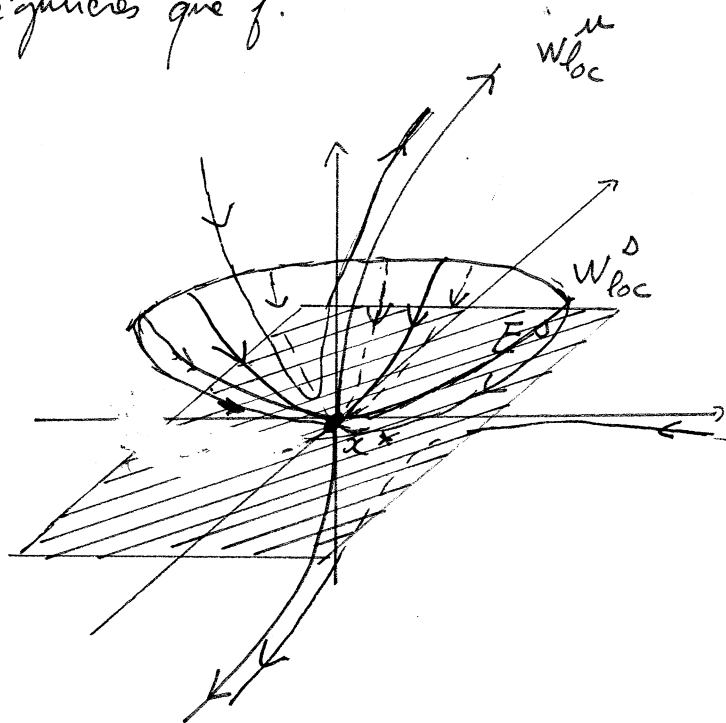
Envisageons pour l'instant le cas d'un point fixe hyperbolique.

Lorsque on s'approche de x^* le terme linéaire $Df(x^*) \cdot x$ devient prépondérant. Cela suggère que les variétés $W_{loc}^s(x^*)$ et $W_{loc}^u(x^*)$ doivent être tangentes aux espaces $E^s(x^*)$ et $E^u(x^*)$ de l'application linéaire $Df(x^*)$.

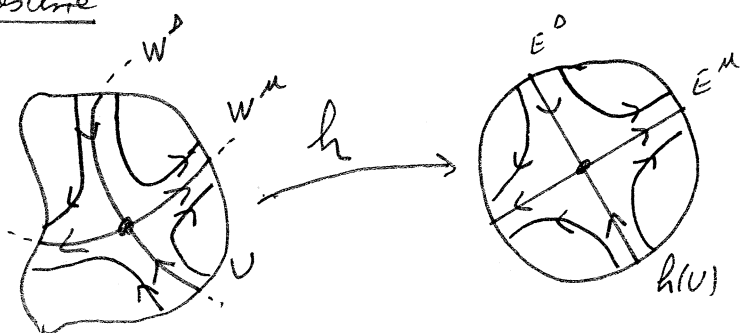
Théorème:

Supposons que $\dot{x} = f(x)$ a un point fixe hyperbolique x^* . Alors il existe une variété stable $W_{loc}^s(x^*)$ et une variété instable $W_{loc}^u(x^*)$, de même dimension m_s, m_u que celle des espaces propres E^s, E^u du système linéarisé et tangentes à E^s, E^u en x^* . $W_{loc}^s(x^*)$ et $W_{loc}^u(x^*)$ sont aussi régulières que f .

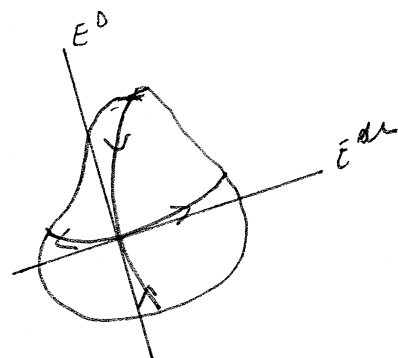
Exemple:



Deuxième résumé



Théorème de Hartman-Grobman



Th. des variétés stables

Variétés globales

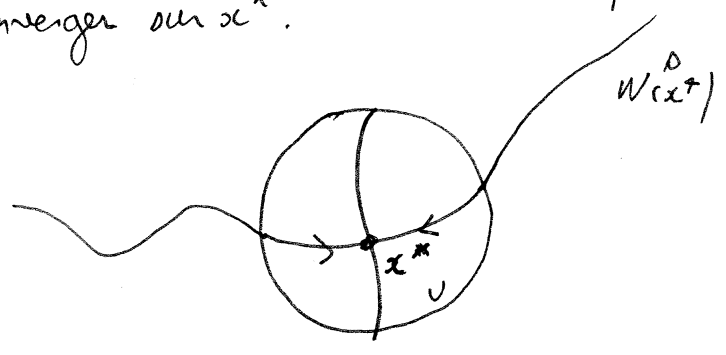
$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \leq 0} f^t(W_{loc}^s(x^*))$$

Variété stable

$$W^u(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} f^t(W_{loc}^u(x^*))$$

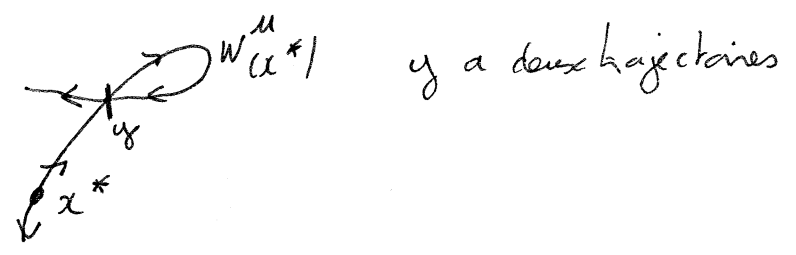
Variété instable

$W^s(x^*)$ est donc l'ensemble des points de l'espace de phase qui vont converger sur x^* .

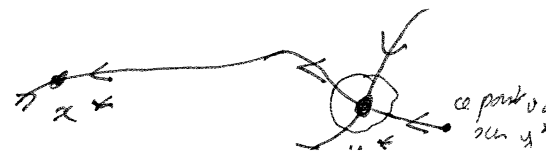


Propriétés:

- 1) Unicité
- 2) Invariance par le flot
- 3) $W^s(x^*)$ (resp. $W^u(x^*)$) ne peut s'intersecter elle-même, par unicité des trajectoires

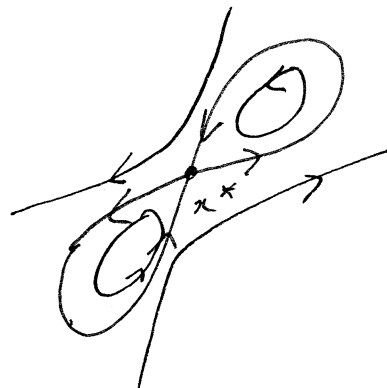
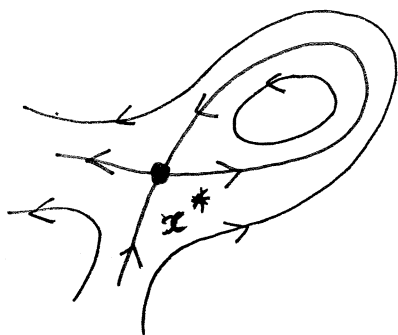


4) De même $W^s(x^*), W^s(y^*)$, où x^*, y^* sont 2 points fixes distincts, ne peuvent s'intersecter. Il en va de même pour $W^u(x^*), W^u(y^*)$.



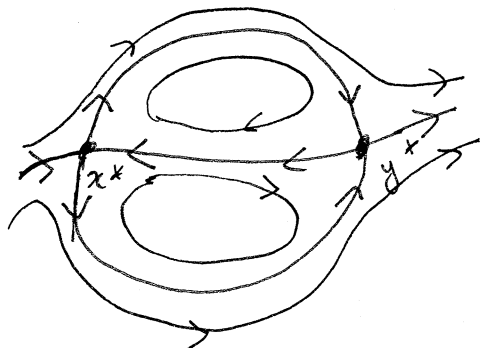
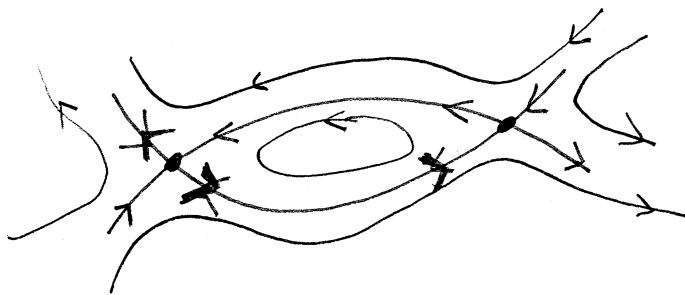
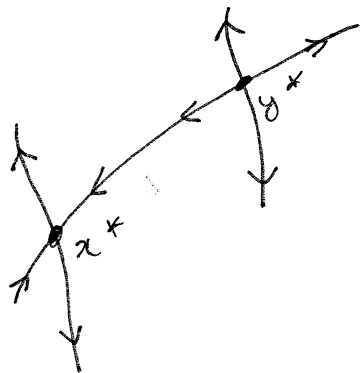
Point homocline:

Par contre la variété stable de x^* peut intersecter sa variété instable $W^u(x^*)$. (Ce cas ne peut se produire qu'au point x^*)
On parle alors de point homocline.



Point hétérocline

C'est le cas où la variété stable de x^* rencontre la variété instable de y^* ou vice-versa.



Exemple:

$$a) \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Point fixe : $(0, 0)$

Matrice jacobienne : $Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \lambda_{1,2} = 1, -1$$

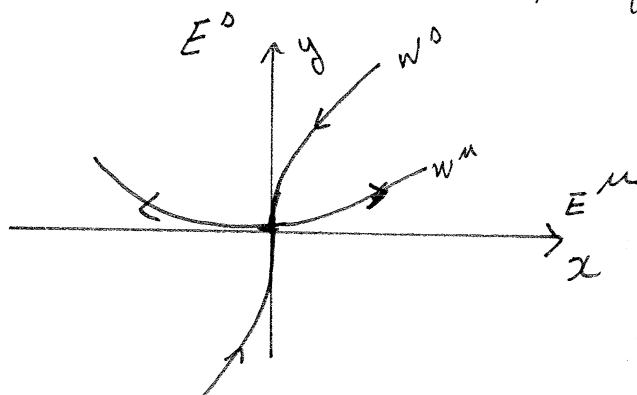
vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
instable stable

Espace stable : $E_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 0\}$

Espace instable : $E_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 0\}$

Calcul de la variété instable

W^{inst} est une variété de dimension 1, tangente à la droite $y=0$ en $(0,0)$



Elle peut donc être représentée par le graphe d'une fonction

$$y = h(x)$$

Avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

$$\frac{dy}{dt} = h'(x) \frac{dx}{dt} = x h'(x) = -y + x^2 = -h(x) + x^2$$

On peut chercher h sous forme d'un développement en série.

$$h(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$h'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$h(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$h'(x) = 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$x h'(x) = 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \dots = -h(x) + x^2 = x^2(1 - a_2) - a_3 x^3 - a_4 x^4 - \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - a_2 = 2a_2 & \Rightarrow a_2 = 1/3 \\ a_3 = a_4 = \dots = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } h(x) = \frac{x^2}{3}$$

l'équation de W^u est donc :

$$W^u(0,0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x^2}{3} \right\}$$

calcul de la variété stable

$$x = g(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$g'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = x = g(y) = a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots = \dot{y} g'(y) = (-y + x^2)(2a_2 y + 3a_3 y^2 + \dots)$$

$$= (-y + a_2 y^4 + \dots)(2a_2 y + 3a_3 y^2 + \dots)$$

$$\Rightarrow a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Ici la variété stable s'identifie avec l'espace stable.

$$W^s(0,0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$$

Remarque : On pouvait voir ce résultat directement. Si $x(0) = 0$
alors $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$. D'autre part
 $\dot{y} = -y$ et donc $y(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$.

Remarque 2: Autre manière de calculer la variété invariante

Dans cet exemple il est possible d'intégrer le système différentiel.
En effet:

$$\frac{dx}{dt} = x \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -y + x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} + x \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y = x^2 \Rightarrow d(xy) = x^2 dx \Rightarrow xy = \frac{x^3}{3} + C$$

La solution est $y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ où C est déterminée par

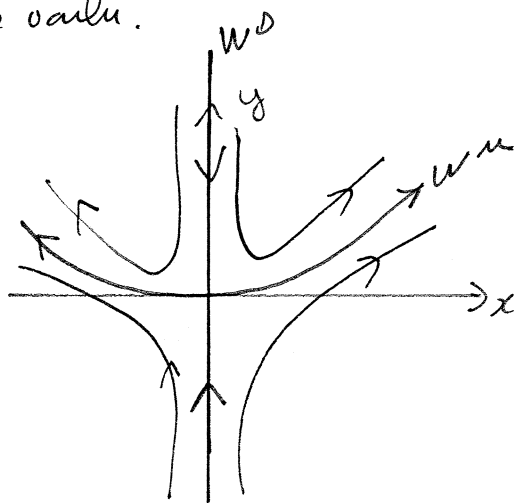
la condition initiale.

Si l'on cherche w^u sous la forme $y = h(x)$ avec $h(0) = h'(0) = 0$
cela entraîne $C = 0$ et $h(x) = \frac{x^2}{3}$.

Remarque 3 :

On a ici obtenu les variétés globales. En général on ne peut pas faire et on obtient seulement une variété locale en développant $h(x)$ jusqu'à l'ordre voulu.

Plan de phase



d) Exercices: Etudier les systèmes suivants

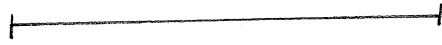
a) $\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} - x + x^3 = 0$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$

b) $\ddot{x} + \sin x = 0$

c) $\ddot{x} + \varepsilon x^2 + \sin x = 0$

d) $\dot{x} = -y + x^2$; $\dot{y} = x + y$

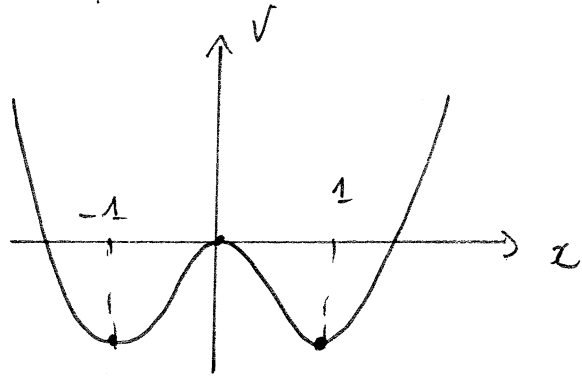
e) $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$



a)
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \varepsilon y \end{cases}$$

C'est un pendule "amorti" (ε quelconque) d'énergie potentielle

$$V(x) = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$



On voit donc a priori que l'origine est toujours instable alors que les points -1 et 1 seront stables si $\varepsilon > 0$.

Points fixes: $(0, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$

Nature jacobienne:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3x^2 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$Df_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$$

\Rightarrow Ilyalya me up > 0 else up < 0 $\begin{cases} \varepsilon < 0; \lambda_1 < 0; \lambda_2 > 0 \\ \varepsilon > 0; \lambda_1 < 0; \lambda_2 > 0 \end{cases}$

$$Df_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\varepsilon \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 8}}{2}$$

$|\varepsilon| < \sqrt{8} \Rightarrow \lambda_{1,2}$ complexes

$|\varepsilon| > \sqrt{8} \Rightarrow \lambda_{1,2}$ reelles

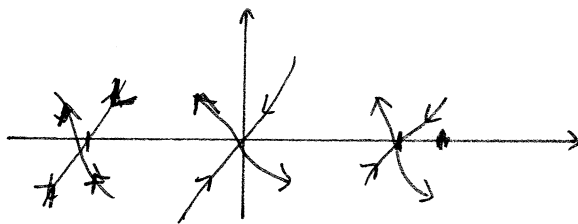
$\varepsilon < 0; \varepsilon < -\sqrt{8} \quad \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ unstable

$\varepsilon < 0; \varepsilon > -\sqrt{8} \quad \operatorname{Re}(\lambda_1) > 0 \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0 \Rightarrow$ unstable

$\varepsilon > 0; \varepsilon < \sqrt{8} \quad \operatorname{Re}(\lambda_1) < 0 \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0 \Rightarrow$ stable

$\varepsilon > 0; \varepsilon > \sqrt{8} \quad \lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ stable

$\varepsilon < 0; \varepsilon < -\sqrt{8}$



$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

Rq: En développant à l'ordre 3 le sin on retrouve l'oscillateur anharmonique
 $y = -x + x^3$

Points fixes: $(0, 0)$; $(-k\pi, 0)$; $(k\pi, 0)$

\Rightarrow Période de phase 2π -périodique. On peut se restreindre à $[-\pi, \pi]$.

Nature jacobienne: $Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \quad (\text{centre})$$

$$Df_{(-\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad (\text{point selle hyperbolique})$$

$$Df_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad (\text{idem}).$$

Vecteurs propres
 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
stable

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
instable

$$E^D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x \}$$

$$E^U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \}$$

Variété stable de $[0, -\pi]$

Pour ce système il est en fait possible d'obtenir toutes les courbes intégrales. En effet:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{y} \Rightarrow y dy = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + C = \cos x$$

Au voisinage de 0

$$\frac{y^2}{2} + C \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

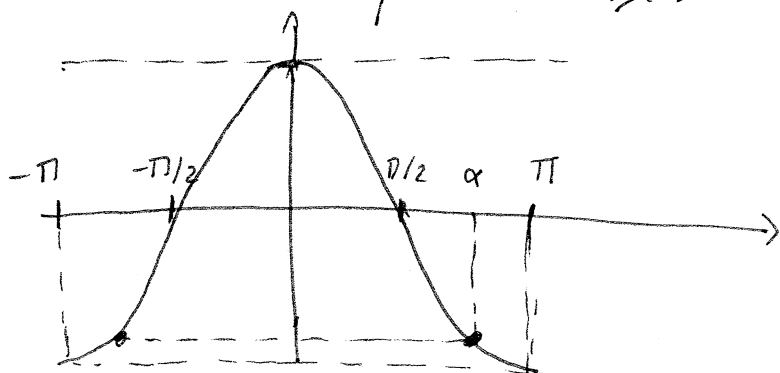
$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = R \Rightarrow \text{cercle}$$

La constante c est déterminée par la condition initiale. Si on choisit celle-ci sur l'axe des x , au point $(\alpha, 0)$ on a:

$$c = \cos \alpha \quad \text{ent}$$

$$\frac{y^2}{2} = \cos x - \cos \alpha \quad ; \quad \alpha \in [0, \pi) \quad ; \quad x \in [-\pi, \pi]$$

cela entraîne que $\cos x \geq \cos \alpha$ donc $x \in [-\alpha, \alpha]$



Les courbes intégrales sont donc :

$$y = \pm \sqrt{2(\cos x - \cos \alpha)} = \pm h(x)$$

$$h'(x) = \mp \frac{\sin x}{\sqrt{2(\cos x - \cos \alpha)}}$$

\Rightarrow tangente verticale en $\pm \alpha$.
par $|\alpha| < \pi$.

La variété stable obéit à :

$$h(-\pi) = 0 \quad ; \quad h'(-\pi) = -1 \quad (\text{tangence avec } y = -x)$$

$$\text{Soit donc } \alpha = -\pi \Rightarrow h(x) = \pm \sqrt{2(\cos x + 1)}$$

$$h'(x) = \mp \frac{\sin x}{\sqrt{2(\cos x + 1)}}$$

$$\left(h'(-\pi) = \mp \left(\frac{-(x+\pi) + o(x)}{\sqrt{2(1-1 + \frac{(x+\pi)^2}{2}) + o(x)}} \right) \right)$$

La variété stable est

$$W^s(-\pi, 0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\sqrt{2(\cos x + 1)} \right\}$$

De même la variété instable ($h'(-\pi) = 1$) est :

$$W^u(-\pi, 0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = +\sqrt{2(\cos x + 1)} \right\}$$

On remarque que $W^s(-\pi, 0)$ contient le point $(0, \pi)$. D'autre part

$h'(\pi) = 1$ donc $W^s(-\pi, 0)$ est tangente en $(0, \pi)$ à $E^u(0, \pi)$

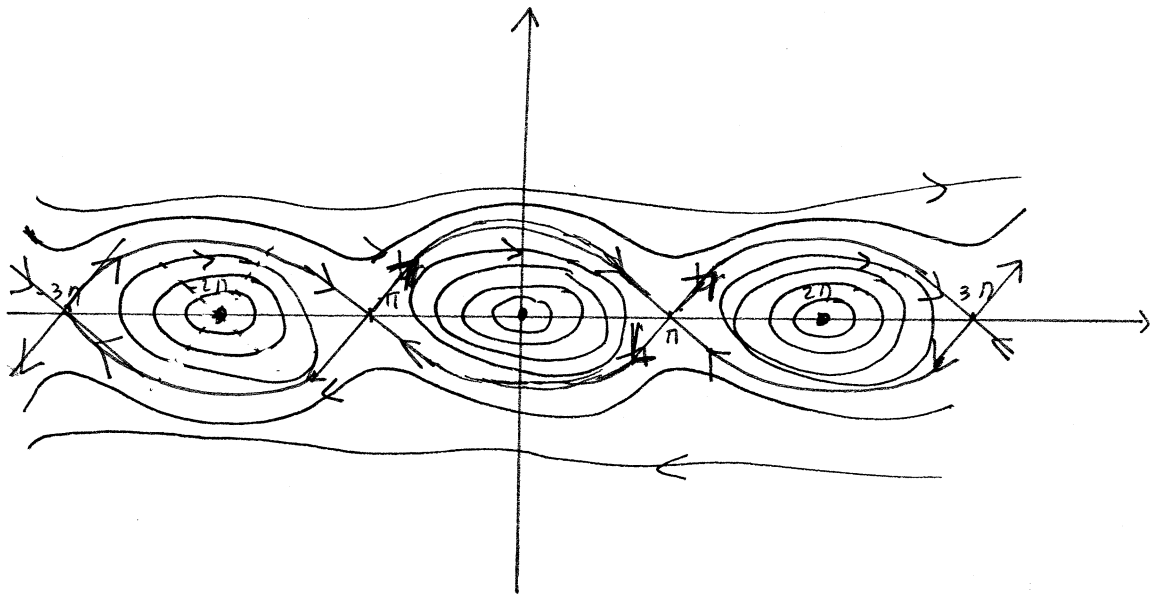
Donc :

$$W^D(-\pi, 0) = W^U(\pi, 0)$$

De même :

$$W^U(-\pi, 0) = W^D(\pi, 0)$$

Ce sont des points hétéroclines.



Energie : Energie potentielle $\text{trig } \xi = -mg l \cos \alpha = -\cos x$

$$\Rightarrow E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$$

$$\frac{dE}{dt} = y \dot{y} + \sin x \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \text{energie conservée}$$

Période $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \cos x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E + \cos x)} \quad E = -\cos x_\eta$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(\cos x - \cos x_\eta)} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_\eta}} + \text{cste}$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{x_\eta} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x_\eta}{2}}} \rightarrow T = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi}} \sim 2\pi \left(1 + \frac{x_\eta^2}{16} + \dots\right)$$

$\sin \xi = \sin \frac{x}{2}$ $\rightarrow \text{cste}$

e) Systèmes à temps discret

Le cas est analogue au précédent et les théorèmes se prolongent.

Théorème de Hartman - Grobman:

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme C^1 avec un point fixe hyperbolique x^* . Alors il existe un homéomorphisme h défini sur un voisinage U de x^* tel que $h(f(x)) = Df(h(x)) \quad \forall x \in U$.

On définit de même les variétés stables et instables.

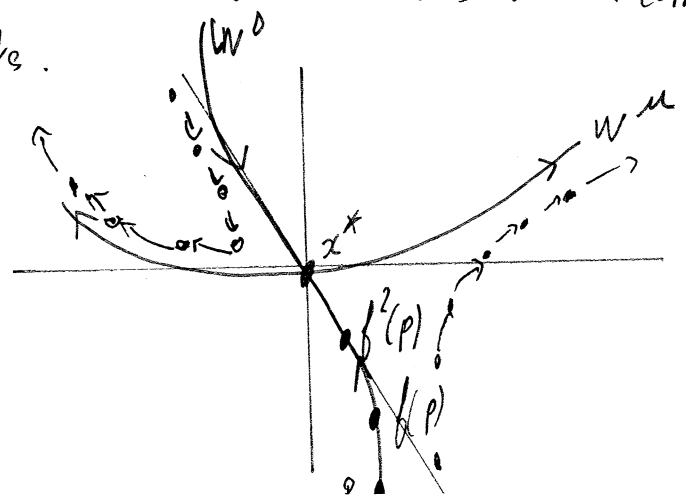
$$W_{loc}^{s}(x^*) = \{x \in U \mid f^n(x) \rightarrow x^* \text{ n} \rightarrow +\infty \text{ et } f^n(x) \in U, \forall n \geq 0\}$$

$$W_{loc}^{u}(x^*) = \{x \in U \mid f^{-n}(x) \rightarrow x^* \text{ n} \rightarrow +\infty \text{ et } f^{-n}(x) \in U, \forall n \geq 0\}$$

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{loc}^s(x^*))$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^u(x^*))$$

Rq: Contrairement au cas continu les variétés sont ici composées de points discrets, les orbites étant discrètes.

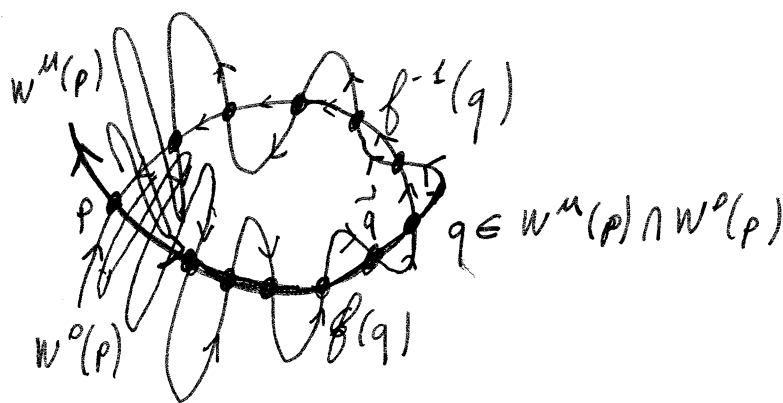


Théorème de la variété stable

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme autour d'un point fixe hyperbolique x^* . Alors il existe une variété stable $W_{loc}^s(x^*)$ et une variété instable $W_{loc}^u(x^*)$ tangentes aux espaces propres $E_{x^*}^s, E_{x^*}^u$ en x^* et de même dimensions. Les variétés sont aussi régulières que f .

Points homoclines :

De la même façon que pour les systèmes différentiels la variété stable et la variété instable d'un point fixe peuvent s'intersecter. Dans le cas des systèmes à temps discret un cas très important se produit lorsque ces 2 variétés s'intersectent transversalement.



En effet si une telle intersection a lieu en un point q elle a lieu en une infinité de points.

En effet par définition :

$$q \in W^s(p) \Rightarrow f^n(q) \rightarrow p \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\text{donc } f^n(q) \in W^s(p) \quad \forall n \geq 0$$

$$\text{d'autre part } f^{-n}(q) \in W^u(p) \text{ car } f^n(f^{-n}(q)) = q \in W^u(p)$$

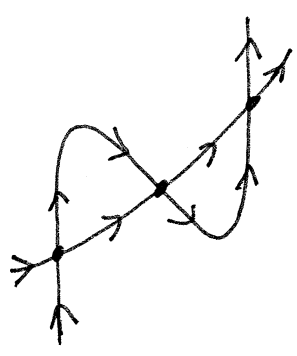
De même :

$$q \in W^u(p) \Rightarrow f^{-n}(q) \rightarrow p \quad n \rightarrow +\infty$$

etc...

Donc si $q \in W^u(p) \cap W^o(p)$ tous les iterés $f^n(q) \quad n \in \mathbb{Z}$ appartiennent à $W^u(p) \cap W^o(p)$.

Si de plus l'application f preserve l'orientation du flot alors il existe un point $\tilde{q} \in W^o(p) \cap W^u(p)$ entre q et $f(q)$

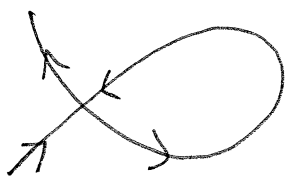


Remarque 1:

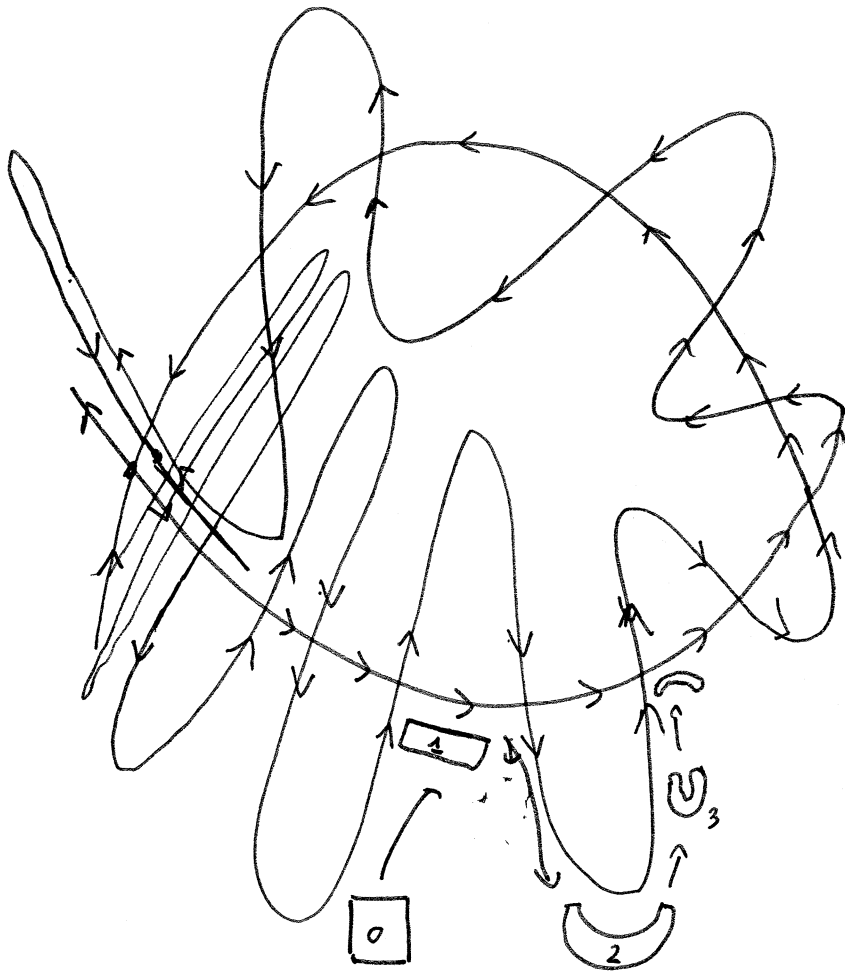
L'application $x(n+1) = -x(n)$ ne preserve pas l'orientation

Remarque 2:

Un tel phénomène ne peut se produire à temps continu à 2 dimensions à moins que le seul cas d'intersection se produise lorsque $W^o(p)$ et $W^u(p)$ sont confondues (si $x \in W^o(p) \cap W^u(p)$ alors $f^k(x) \in W^o(p) \cap W^u(p) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$).



Ce cas est essentiellement important dans l'étude du chaos. L'effet
au voisinage des intersections homoclines transverse la dynamique
est très complexe et sensible aux conditions initiales



On peut le voir par exemple en étudiant l'évolution d'un cas de
conditions initiales. On verra plus tard que ce type de transformation
est un pilier de l'étude du chaos.

6) Fonction de Lyapunov:

L'existence d'une fonction de Lyapunov permet dans certains cas de déterminer l'existence de points fixes et leur stabilité. Dans les systèmes physiques un bon candidat est l'énergie du système.

En effet de façon générale une fonction de Lyapunov V est une fonction décroissante le long des trajectoires et bornée inférieurement. En ce cas on voit intuitivement que les points fixes sont les extrema de V et les points stables les minima.

a) Systèmes différentiels

$$\text{Soit } \dot{x} = f(x) \quad ; \quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour ce système si elle est différentiable, bornée inférieurement et décroissante le long des trajectoires i.e.:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \leq 0$$

Soit encore:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \langle \vec{\text{grad}} V, \vec{f} \rangle \leq 0$$

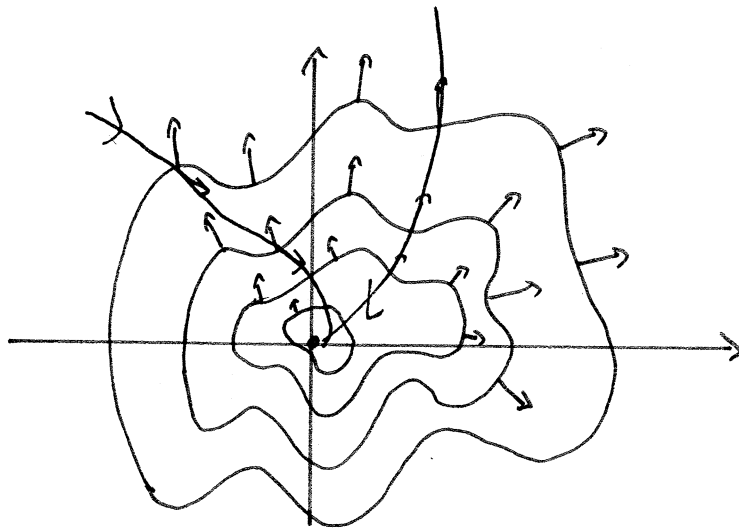
Rq: Si on a inégalité stricte on parle de fonction de Lyapunov stricte

Cette dernière égalité s'interprète simplement. Considérons les surfaces de niveau $\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) = c\}$

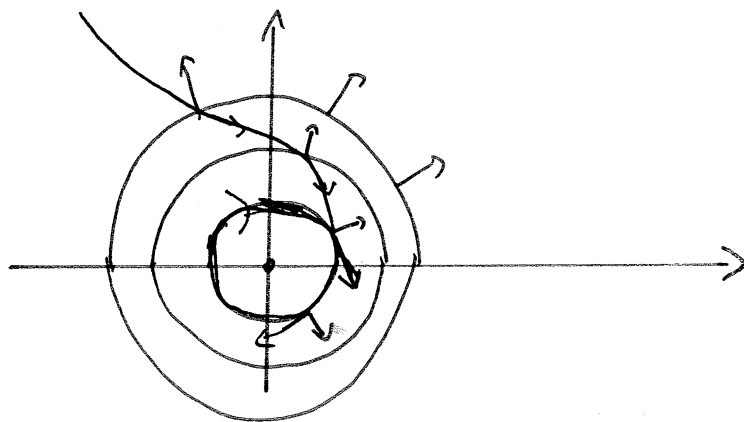
Le gradient $\vec{\text{grad}} V$ est orthogonal aux surfaces de niveau et dirigé dans le sens des ∇ croissants.

Imaginons que $x=0$ soit un minimum de V alors le gradient est dirigé vers l'extérieur des surfaces de niveau. En dimension 2 $\angle(\vec{\text{grad}} V, \vec{f}) > \frac{\pi}{2}$ signifie un angle $> \frac{\pi}{2}$ donc un champ de vecteur dirigé vers l'intérieur (jamais orthogonal si la fonction de Lyapunov est stricte)

$$\frac{dV}{dt} < 0$$



$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$



Théorème de stabilité locale

[23]

Soit x^* un point fixe de $\dot{x} = f(x)$ et $V: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un voisinage $W \subset \mathbb{R}^n$ de x^* tel que:

$$i) \quad V(x^*) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad x \neq x^*$$

$$ii) \quad \frac{dV}{dx} \leq 0 \quad \text{sur} \quad W - \{x^*\}$$

alors x^* est stable. De plus si:

$$iii) \quad \frac{dV}{dx} < 0 \quad \text{sur} \quad W - \{x^*\}$$

x^* est asymptotiquement stable.

Rq: Si $W = \mathbb{R}^n$ dans le cas iii) alors x^* est globalement asymptotiquement stable en ce qu'il attire toutes les trajectoires.

exemple: Ressort amorti

$$m \ddot{x} = -kx - \nu \dot{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{\nu}{m}y \end{cases}$$

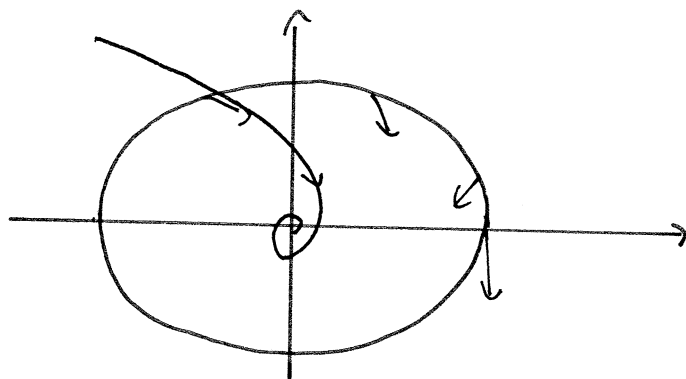
L'énergie est:

$$E(x, y) = \frac{1}{2} m y^2 + \frac{1}{2} k x^2 \geq 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = kx \dot{x} + m y \dot{y}$$

$$\frac{dE}{dt} = kxy - kxy - \nu y^2 = -\nu y^2$$

On doit donc que $\frac{dE}{dt} < 0$ sauf pour $y = 0$ (énergie nulle
→ dissipation nulle)



Rq: E n'est pas un très bon candidat ici. On peut prendre

$$V(x, y) = \frac{m}{2} y^2 + \frac{k}{2} x^2 + \beta \left(xy + \frac{\nu}{2} x^2 \right)$$

alors
$$\dot{V} = -\beta \frac{k}{m} x^2 - (\nu m - \beta) y^2$$

Si β est choisi suffisamment petit V est une fonction de Lyapunov stricte et on montre ainsi que 0 est asymptotiquement stable.

→ Il peut y avoir de nombreuses candidates pour une fonction de Lyapunov (en particulier si V est une fonction de Lyapunov stricte)

Système à gradient :

Cette classe de système est définie par

$$\dot{x} = -\text{grad} V$$

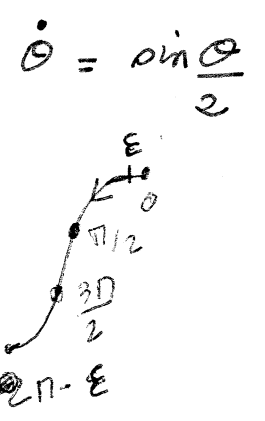
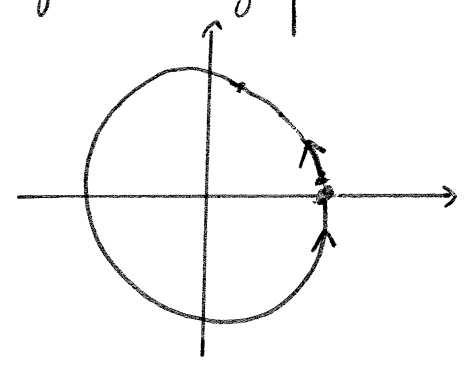
Dans ce cas V est une fonction de Lyapunov

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \leq 0$$

Remarque :

L'existence d'une fonction de Lyapunov est une condition suffisante mais non nécessaire de convergence i.e il existe des systèmes dynamiques convergents qui n'admettent pas de fonction de Lyapunov.

Ex :



0 est asymptotiquement stable

Si le système admettait une fonction de Lyapunov on aurait, d'une part (décroissance de V)

$$V(\epsilon) > V\left(\frac{\pi}{2}\right) ; V(2\pi - \epsilon) > V\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V(\epsilon) - V(2\pi - \epsilon) < 0 \quad \forall \epsilon$$

d'autre part (continuité de V)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\varepsilon) - V(2\eta - \varepsilon) = 0$$

ce qui est contradictoire.

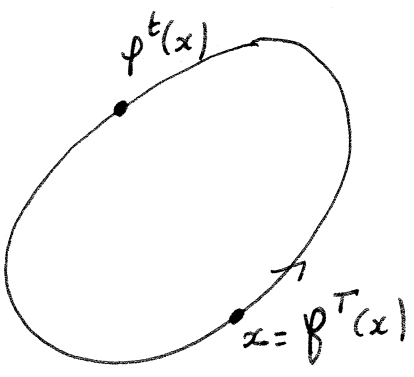
7) Relations entre système à temps discret et systèmes à temps continu :

a) Section de Poincaré

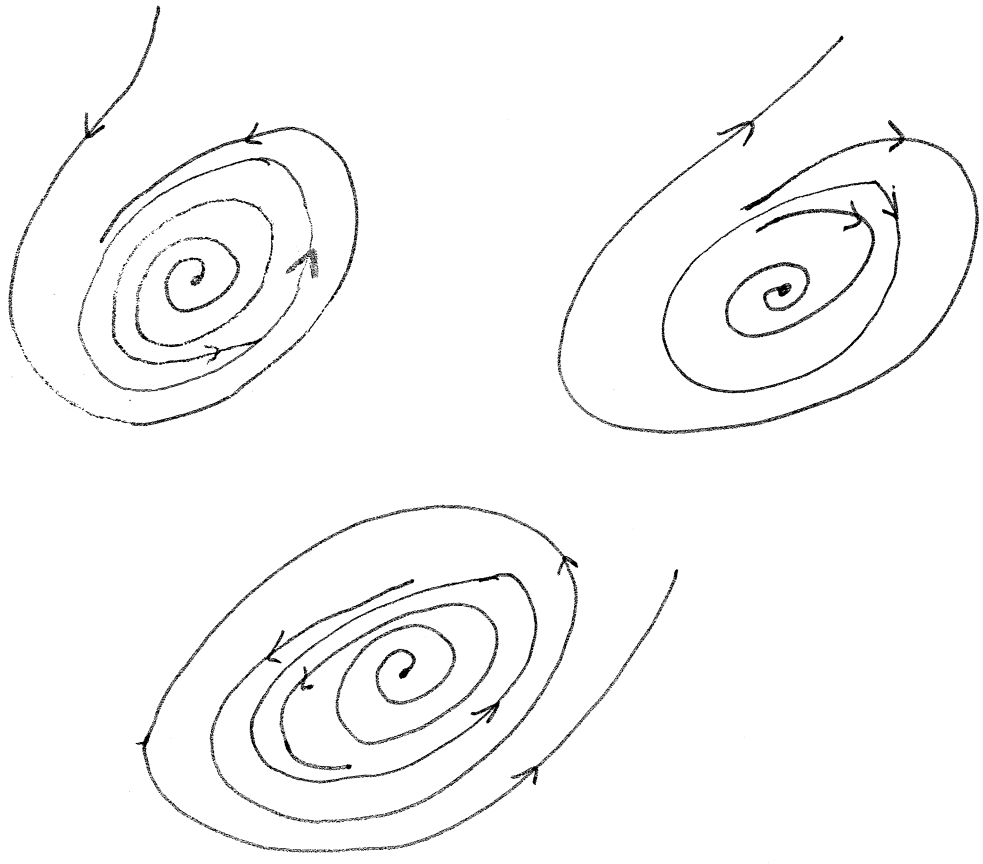
Imaginons un système différentiel admettant une orbite périodique

i.e. :

$\forall x \in \gamma \quad \varphi^T x = x$ où T est la période.



Supposons que l'on veuille par exemple étudier la stabilité de ce cycle, i.e. attire-t'il les trajectoires ou non ?



Pour faire on utilise en general une section de Poincaré.

Définition: Soit γ une orbite périodique d'un flot $f^t \in \mathbb{R}^n$.
Soit Σ une section locale de cette orbite ($\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est une surface de dimension $n-1$). On choisit de plus cette section en sorte que le flot l'intersecte toujours transversalement (i.e. $f(x) \cdot \vec{n}(x) \neq 0, \forall x$, où $\vec{n}(x)$ est la normale en x à Σ).
Enfin on la choisit suffisamment petite pour que γ ne l'intersecte qu'une fois. Cette section est la section de Poincaré.

Application de Poincaré:

Soit p l'unique point d'intersection entre γ et Σ et $U \subset \Sigma$ un voisinage de p . L'application de Poincaré ou application du premier retour $P: U \rightarrow \Sigma$ est définie $\forall q \in U$ par:

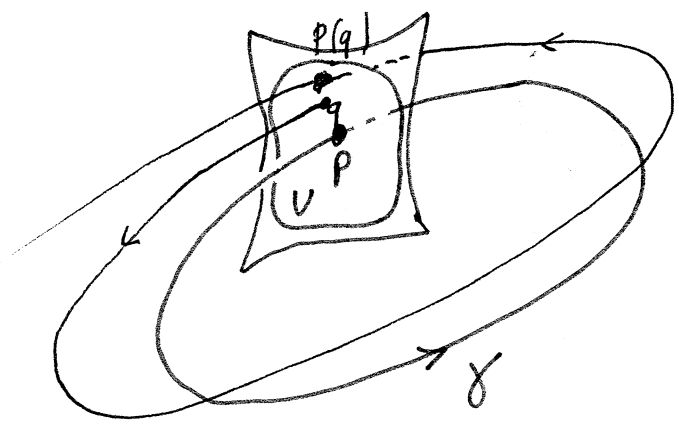
$$P(q) = f^{\tau}(q)$$

où $\tau = \tau(q)$ est le temps mis par l'orbite $f^t(q)$ issue de q pour un premier retour sur Σ . En general ce temps de retour est différent de la période de l'orbite T et dépend de q . Cependant

$$\tau(q) \rightarrow T \quad \text{quand} \quad q \rightarrow p$$

dim E = 3

dim Σ = 2



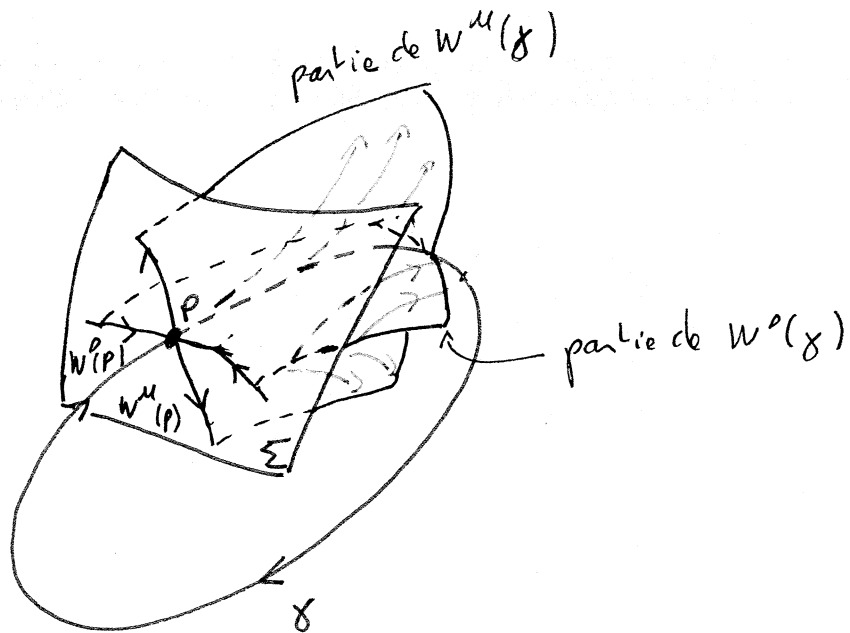
L'application de Poincaré est une récurrence discrète permettant d'étudier le système à temps continu initial.

Ainsi p est un point fixe de l'application P. De plus la stabilité de P par rapport à P reflète la stabilité de γ par rapport à ft.

En particulier si p est hyperbolique et DP(p) est l'application linéarisée, celle-ci a n₀ valeurs propres de module < 1 et n_u valeurs propres de module > 1 (n₀ + n_u = n - 1)

⇒ dim W^o(p) = n₀
 dim W^u(p) = n_u par P.

Comme les orbites de P appartenant à W^o et W^u sont formées d'intersections d'orbites de ft avec Σ les dimensions de W^o(γ) et W^u(γ) sont chacune plus grande d'une unité que l'application (et contiennent les parts de W^o(p) / resp W^u(p))



Remarque:

On définit la variété stable (resp instable) de γ comme suit.
Soit U un voisinage de γ :

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{x \in U \mid f^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \gamma, \text{ et } f^t(x) \in U, \forall t \geq 0\}$$

$$W_{loc}^u(\gamma) = \{x \in U \mid f^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \gamma, \text{ et } f^t(x) \in U, \forall t \leq 0\}$$

Ici " $\xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty}$ " signifie que la trajectoire s'approche aussi près qu'on veut de γ lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$)

On peut aussi définir $W^s(\gamma)$ (resp $W^u(\gamma)$) comme la suspension de $W^s(p)$ (resp $W^u(p)$)

Exemple :

Soit le système plan :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

On passe en coordonnées polaires $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\theta = \text{Arctg}(y/x)$

$$\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (x(x - y - x(x^2 + y^2)) + y(x + y - y(x^2 + y^2))) / r \\ &= (x^2 - xy - x^2 r^2 + yx + y^2 - y^2 r^2) / r \end{aligned}$$

$$= (x^2 + y^2)(1 - r^2) / r = r(1 - r^2)$$

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{d}{dt} (y/x) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{\dot{y}}{x} - \frac{y}{x^2} \dot{x} \right)$$

$$= \frac{x\dot{y}}{r^2} - \frac{y\dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + yx - yxr^2}{r^2} - \frac{y(x - y - xr^2)}{r^2}$$

$$= \frac{x^2 + yx - yxr^2 - yx + y^2 + xy r^2}{r^2} = 1$$

On se ramène donc à :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Rq: le point $x=0, y=0$ est singulier par le changement de variable en (r, θ) . On voit en regardant l'équation en x, y que ce point est un point fixe. On ne s'attache néanmoins plus à son étude par la suite.

Le nouveau système admet 2 points fixes :

$$r=0 \quad \text{et} \quad r=1 \quad (r > 0 \text{ par def})$$

La solution $r=1$ et $\theta = \theta_0 + t$ définit un cycle limite de rayon 1 et de centre 0.

On peut aisément voir que ce cycle est stable en étudiant l'équation monodimensionnelle :

$$\dot{r} = r(1-r^2)$$



On peut également le voir via l'application de Poincaré.

$$\text{Soit } \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^+ \times [0, 2\pi] \mid r > 0, \theta = 0\}$$

(Demi-droite)

Le flot de $\left. \begin{array}{l} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{array} \right\}$

est $f^t(r_0, \theta_0) = \begin{cases} \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right)^{-1/2} \\ \theta_0 + t \end{cases}$

en effet $\frac{dr}{r-r^3} = dt$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \log\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right) + C = t$

$\frac{1}{2} \log\left(\frac{r_0^2}{1-r_0^2}\right) = -C$

$t = \frac{1}{2} \log\left(\frac{r^2}{1-r^2} * \frac{1-r_0^2}{r_0^2}\right) \rightarrow$

$\frac{r^2}{1-r^2} \frac{1-r_0^2}{r_0^2} = e^{2t}$

$\frac{r^2}{1-r^2} = \frac{r_0^2}{1-r_0^2} e^{2t} = \frac{1}{\frac{1}{r_0^2} - 1} e^{2t} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} - 1}$

$\Rightarrow \frac{1}{r^2} - 1 = \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) e^{-2t}$

$$\frac{1}{r^2} = 1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t}$$

$$r = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-1/2}$$

Soit $q \in \Sigma \Rightarrow$ le temps nécessaire pour revenir en Σ est simplement $T = 2\pi$ ($\theta = \theta_0 + t$) \Rightarrow

L'application de Poincaré est donnée par:

$$P(r_0) = \left[\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right) \right]^{-1/2}$$

Cette application a un point fixe en $r_0 = 1$ (intersection du cycle avec la section).

Soit DP l'application linéarisée:

$$DP(1) = -\frac{1}{2} \left[\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right) \right]^{-3/2} \times \left(e^{-4\pi} \times -\frac{2}{r_0^3} \right) \Big|_{r_0=1}$$

$$DP(1) = e^{-4\pi} < 1$$

\Rightarrow Le cycle est stable.

b) Théorie de Floquet:

Soit $\bar{x}(t) = \bar{x}(t+T) \in \mathbb{R}^n$ une solution appartenant à une orbite périodique γ , passant par $x(0) = p \in \Sigma$.

Soit $x(t) = \bar{x}(t) + \xi(t)$ une perturbation ✓

$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\xi}(t) = f(\bar{x}(t) + \xi(t))$$

$$\approx f(\bar{x}(t)) + Df_{\bar{x}(t)} \cdot \xi(t)$$

L'évolution de la perturbation ξ est alors donnée par :

$$\dot{\xi} = Df_{\bar{x}(t)} \cdot \xi(t)$$

On a : $Df_{\bar{x}(t)} = Df_{\bar{x}(t+T)}$ donc $Df_{\bar{x}(t)}$ est une matrice $n \times n$, T périodiquement.

La solution du système linéaire ci-dessus :

$$\xi(t) = e^{t Df_{\bar{x}(t)}} \cdot \xi(0)$$

$$\begin{aligned} \xi(t+T) &= e^{(t+T) Df_{\bar{x}(t+T)}} \cdot \xi(0) \\ &= e^{t Df_{\bar{x}(t)}} e^{T Df_{\bar{x}(t)}} \cdot \xi(0) \\ &= e^{T Df_{\bar{x}(t)}} \cdot \xi(t) \end{aligned}$$

Donc la matrice $e^{T Df(\bar{x}(t))}$ envoie le vecteur $\xi(t)$ sur $\xi(t+T)$

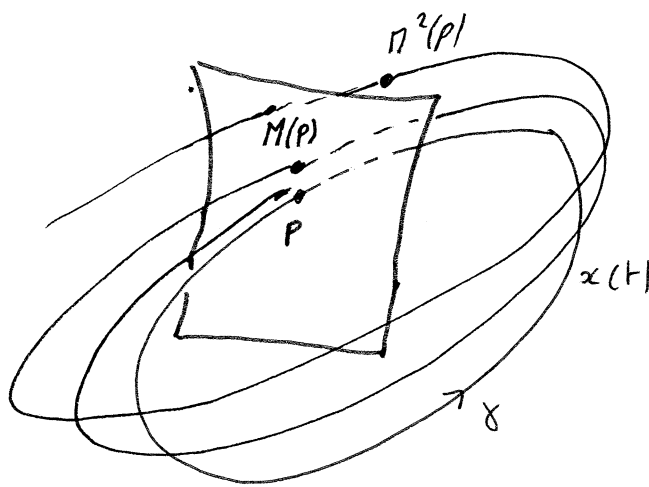
Si l'on prend l'instant originel $t=0$ le passage par $p \in \Sigma$ l'opérateur:

$$M = e^{T Df(\bar{x}(0))} = e^{T Df(p)}$$

donne la succession des perturbations ξ au laps $T, 2T, 3T$ etc...
i.e.:

$$\xi(nT) = M^n \xi(0)$$

M est appelé opérateur de monochromie ou opérateur de Floquet.



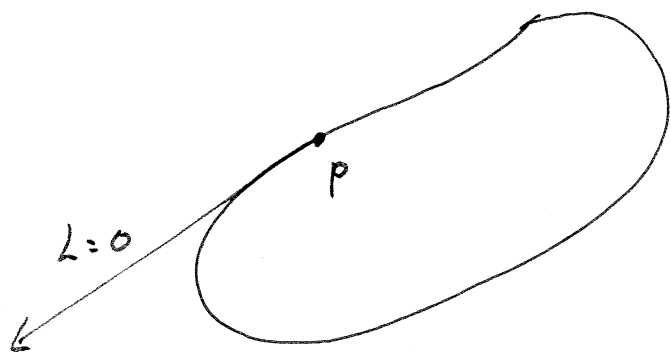
Supposons que les valeurs propres de $Df(p)$ soient distinctes (non dégénérées) et soient $h_1 \dots h_n$ ces valeurs propres.

$M = e^{T Df(p)}$ est alors un opérateur dont les valeurs propres sont:

$$\lambda_i = e^{T h_i}$$

Remarque: Le cycle γ est invariant par perturbation longitudinale [31

\Rightarrow Il y a toujours une valeur propre de $Df(p)$ qui est nulle, celle associée à la direction longitudinale.



\rightarrow Le multiplicateur associé à cette direction est toujours égal à 1.

Si l'on considère l'espace complémentaire de dimension $n-1$ l'étude de la perturbation à chaque période est donnée par l'action de la matrice de Floquet.

Si tous les multiplicateurs μ_i , $i=1 \dots n-1$ sont de module < 1 le cycle est stable.

c) Suspension:

$$\text{Sat } \dot{x} = f(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

un système dynamique non autonome, périodique en temps i.e.

$$f(\cdot, t+T) = f(\cdot, t)$$

ex : $\begin{cases} \dot{x} = \sin t \\ \dot{y} = \cos t \end{cases} \quad (T = 2\pi)$

→ les trajectoires sont T -périodiques

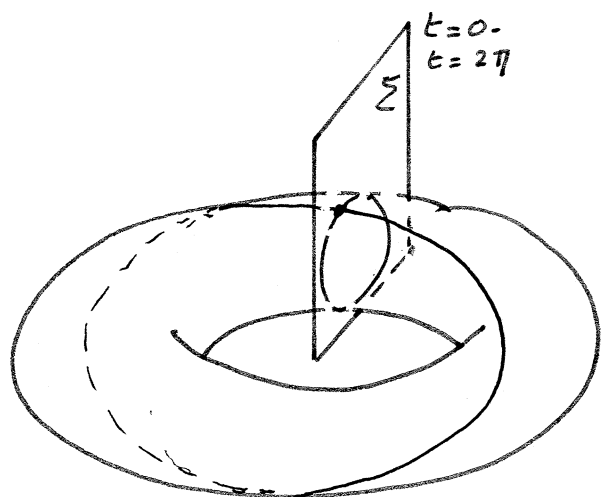
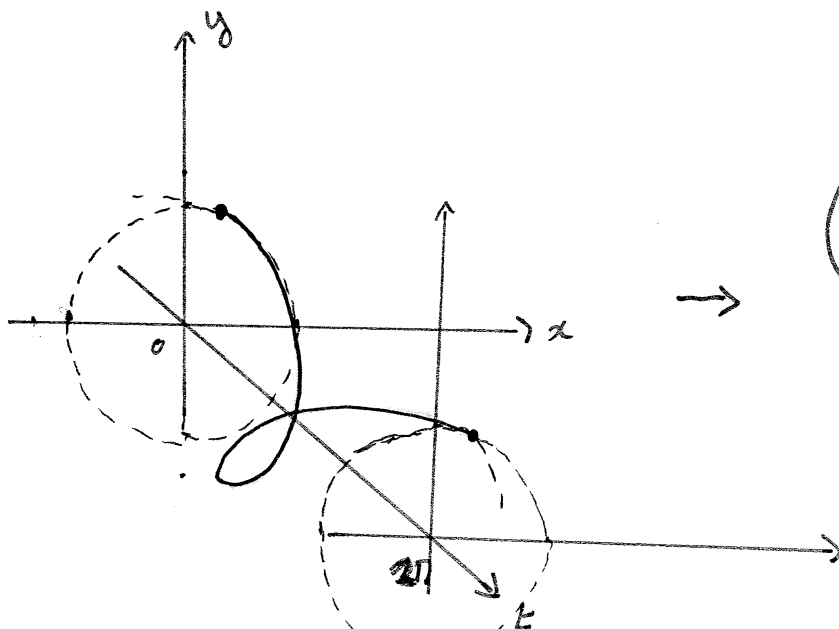
On peut ramener ce système à un système autonome en posant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1$$

i.e. en augmentant de 1 la dimension. Cela revient à inscrire les trajectoires sur un "hyper-cylindre" au lieu de l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Ex: $\begin{cases} \dot{x} = \sin t \\ \dot{y} = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 - \cos t \\ y(t) = y_0 + \sin t \end{cases}$

On a $(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = 1 \Rightarrow$ cercles de centre (x_0, y_0) et de rayon 1.



ette opération est appelée suspension

