Bruno CESSAC

Université de Nice

Cours d'Algèbre linéaire.

Espaces vectoriels

Bruno CESSAC
Université de Nice

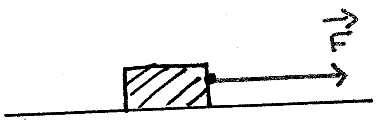
I Définitions

1) Notion "physique" de vecteur :

En physique la notion de vecteur est souvent rattachée à la notion de force. Une force est une quantité possédant

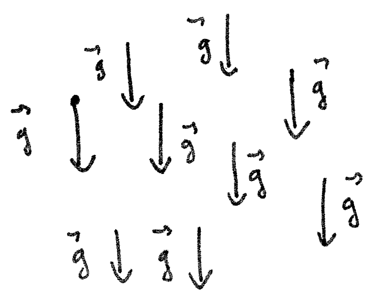
- Une direction et un sens.
- Une intensité.
- Un point d'application.

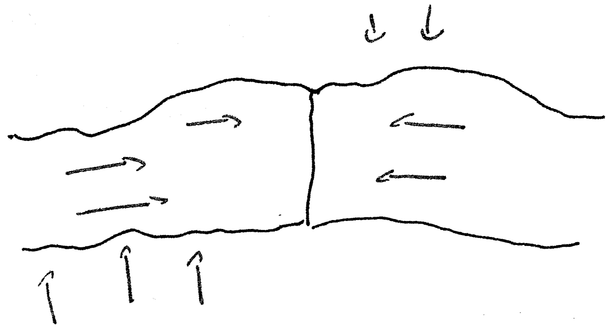
Ex : Traction d'un poids par un fil



Un autre exemple important est lié à la notion de champ.

Ex : Champ de gravitation





Ces différents exemples illustrent la notion de vecteur. En particulier, on distingue en physique 2 types de vecteurs :

- vecteurs libres (indépendant du pt d'application) direction sens longueur
- vecteurs liés (attachés à un point d'application).

2) Structures

Pour pouvoir faire des vecteurs un objet mathématique il faut les définir au sein d'une structure E (qu'on appelera espace vectoriel).
Les propriétés définissant ces objets sont naturelles du point de vue physique.
On demande que les éléments de E aient les propriétés suivantes :

a1) L'addition de 2 vecteurs soit définie, et soit un vecteur. (notion de composition de forces dont la résultante est une force)

Loi interne : $\forall \vec{v}, \vec{v}' \in E,\ \vec{v} + \vec{v}' = \vec{v}'' \in E$

a2) Cette addition est commutative et associative. (la résultante de forces ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les compose)

com. $\vec{v} + \vec{v}' = \vec{v}' + \vec{v}$

ass. $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$

$= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in E$

a3) Il existe un vecteur nul, noté $\vec{0}$. (force nulle)

élément neutre : $\forall \vec{v} \in E, \quad \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

a4) Il existe pour chaque vecteur, un unique vecteur opposé noté $(-\vec{v})$ (notion d'équilibre de forces : résultante nulle)

élément opposé : $\forall \vec{v} \in \vec{E}, \quad \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} = \vec{v} - \vec{v}$.

Par ailleurs, il est important de pouvoir donner un sens à la multiplication d'un vecteur par un nombre (réel ou complexe). Physiquement cette notion est associée notamment au changement d'unité dans laquelle est exprimée la force, mais aussi, plus généralement, à la possibilité de pouvoir dilater ou contracter un vecteur. Soit K un ensemble de nombres (corps), pour nous $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelera scalaires les éléments de K. On demande que les vecteurs de E aient les propriétés suivantes

b1) La multiplication d'un vecteur par un nombre $\in K$ est un vecteur (dilatation, contraction, cgt d'unités)

multiplication scalaire $\quad \forall \alpha \in K, \quad \vec{v}' = \alpha \vec{v} \in E$

b2) La multiplication scalaire est distributive par rapport à l'addition vectorielle.

$\alpha(\vec{v} + \vec{v}') = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{v}'$

b3) associativité pour les scalaires

$\alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} = \alpha\beta\vec{v}$ (l'ordre des multiplications n'importe pas)

b4) La multiplication par 1 donne le même vecteur.

$1 . \vec{v} = \vec{v}$

existence de l'élément neutre de K.

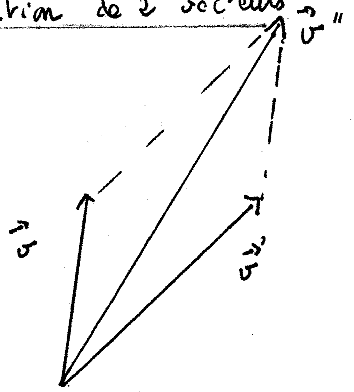
E est alors appelé espace vectoriel, lorsqu'il vérifie cet ensemble de propriétés a, b.

3) Exemples d'espaces vectoriels

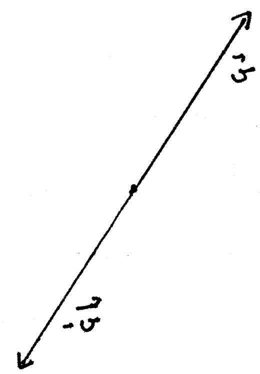
a) Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow$ un élément est noté (x_1, x_2)

On peut définir graphiquement les propriétés données plus haut

addition de 2 vecteurs

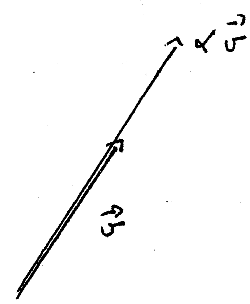


élément opposé



(vecteur de même direction et de sens opposé)

multiplication scalaire



$\mathbb{R}^n$: $(x_1, x_2 -- x_n)$

b) La droite $\mathbb{R} \rightarrow x_1$

4) Sous-espaces vectoriels (sev)

Un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous ensemble de E qui est lui même un espace vectoriel. C'est à dire que F vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\vec{0} \in F$

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F$, $\vec{u} + \vec{v} \in F$

(iii) $\forall \lambda \in K$, $\forall \vec{u} \in F$, $\lambda \vec{u} \in F$

Ex : La droite est un sev de $\mathbb{R}^2$.

Combinaison linéaire

On a vu que la structure d'espace vectoriel nous autorise à définir l'addition de vecteurs, et la multiplication de vecteurs par des scalaires. L'opération la plus générale que l'on puisse écrire au sein de cette structure est donc de la forme

$$\alpha^1 \vec{v}_1 + \alpha^2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha^n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \vec{v}_i = \vec{w} \qquad \{\alpha^i\}_{i=1..N} \in K \qquad \{\vec{v}_i\}_{i=1..N} \in E$$

Une telle opération est appelée <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs $\vec{v}_i$.

<u>Th</u> : F, sous-ensemble de E est un sev ssi il est stable par combinaison linéaire i.e. $\forall n, \forall \vec{v}_i \in F, \forall \lambda^i \in K, \sum_{k=1}^{n} \lambda^i \vec{v}_i \in F$ ⟹ axe plan dans $\mathbb{R}^3$

i) <u>Bases d'un espace vectoriel</u>

a) <u>Indépendance linéaire</u>

Considérons un espace vectoriel E, et une ~~ens~~ collection de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, n quelconque. Par définition, toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient à E, i.e.

$$\forall n, \forall \{\lambda^i\}_{i=1..n}, \exists \vec{v} \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \vec{v}_i = \vec{v}$$

En particulier, comme $\vec{0} \in E$, il peut arriver ~~(mais ce n'est pas toujours le cas)~~ que pour une collection $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$, $\exists$ des nombres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ tels que :

non tous nuls

$$\sum_{i=0} \lambda^i \vec{v}_i = \vec{0}$$

Dans ce cas, les vecteurs sont dits <u>linéairement dependants</u>. Cela signifie que la collection des $\vec{v}_i$ est combinaison linéaire des autres

En effet, supposons par exemple que $\lambda^1 \neq 0$. On a alors:

$$\lambda^1 \vec{v}_1 + \lambda^2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda^n \vec{v}_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = -\frac{\lambda^n}{\lambda^1} \vec{v}_2 \cdots -\frac{\lambda^n}{\lambda^1} \vec{v}_n = \sum_{i=2}^{n} \alpha^n \vec{v}_n$$

avec $\alpha^n = -\frac{\lambda^n}{\lambda^1}$.

La collection $\{\vec{v}_i\}$ est alors dite <u>liée</u>.

<u>Def</u>: On dit que les vecteurs $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ sont linéairement independants s'ils ne sont pas linéairement dependants. La collection $\{v_i\}_{i=1..n}$ est dite <u>libre</u>

<u>Def équivalente</u>: $(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n)$ sont lin. indep ssi

$$\boxed{\sum \lambda^i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^i = 0, \forall i.}$$

<u>Prop</u>: Soient $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ vecteurs lin. indep., et soit $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}$ qui n'est pas comb. lin. des $\{\vec{v}_i\}_{i=1..n}$, alors $\vec{v}_1 - \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$ sont lin. indep.

* Il s'agit de montrer que:

$$\lambda \vec{v} + \lambda^1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda^n \vec{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda, \lambda^1 \ldots \lambda^n = 0$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $\vec{v} = -\frac{\lambda^1}{\lambda} \vec{v}_1 \cdots -\frac{\lambda^n}{\lambda} \vec{v}_n$ ce qui est contraire à l'hypothèse

Donc $\lambda = 0$. Dans ce cas

$$\lambda^1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda^n \vec{v}_n = 0$$

mais comme les $\vec{v}_i$ sont lin indep $\lambda^i = 0 \quad \forall i$ *

Considérons l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r$, c.a.d. l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \vec{v}_i \qquad \forall \lambda_i.$$

Par définition cet ensemble est un sous espace de E. On dit que c'est le sous-espace engendré par les $\vec{v}_i$.

Cependant, si parmi ces $\vec{v}_r$ certains sont lin. dep. cela signifie qu'ils peuvent eux aussi s'écrire comme combinaison linéaires. Dans ce cas le sous espace vectoriel est engendré par une sous-famille de la collection $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r\}$. Cette sous-famille est alors constituée de vecteurs linéairement indépendants.

De même, sur E tout entier, on est conduit à chercher une famille de vecteurs lin. indep. qui engendrent E. Une telle famille est appelée base de E.

ef : Une famille $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ de vecteurs de E est une base de E si les $\vec{v}_i$ sont lin. indep. et engendrent E.

q : Il existe une infinité de bases.

f : n est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants. c'est également le nombre minimal de vecteurs nécessaires pour engendrer E. Ce nombre s'appelle dimension de E.

Th : Soit E espace vectoriel, $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ une base de E, alors tout vecteur $\vec{v} \in E$ s'écrit de manière <u>unique</u> sous la forme

$$\vec{v} = \lambda^1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda^n \vec{e}_n$$ où λ_i sont des scalaires

* unicité :

$$\vec{v} = \sum \lambda^i \vec{e}_i = \sum \lambda^{i\prime} \vec{e}_i \Leftrightarrow \sum (\lambda^i - \lambda^{i\prime}) \vec{e}_i = 0$$

$\Rightarrow \lambda^i = \lambda^{i\prime}$ les $\vec{e}_i$ étant lin. indep. *

<u>Base canonique de $\mathbb{R}^n$</u>

Parmi toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ la base

$$\vec{e}_1 = (1, 0 \dots 0)$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1 \dots 0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0 \dots 1)$$

joue un rôle privilégié. C'est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

<u>Notation :</u>

Par la suite on notera les vecteurs en colonnes

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

où les v_i sont les composantes de $\vec{v}$ dans une base donnée, i.e. si $(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$ est la base

$$\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + \dots + v^n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i$$

indice supérieur. — indice inférieur

Rq : Avec cette convention les indices vont en descendant des composantes vers les vecteurs

$$v^i \searrow \vec{e}_i$$

1) Applications linéaires

a) Déf : Une application linéaire $\mathcal{L} : E \to F$ où E et F sont des e.v. est une application qui vérifie les propriétés suivantes:

$$\forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$$

$$\mathcal{L}(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda \mathcal{L}(\vec{v}_1) + \mu (\vec{v}_2)$$

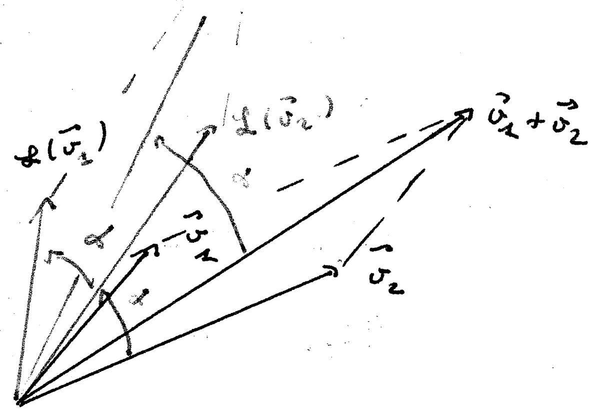
Prop : $\mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}$

Ex :

→ multiplication par un scalaire (dilatation contraction)

$$\vec{v} \longrightarrow \alpha \vec{v}$$

→ Rotation :



etc...

b) Matrice :

Soit $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ une base de E, $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_m$ une base de F, $\mathcal{A}$ une application linéaire. $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$ est un vecteur de F qui s'écrit donc comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{f}_i$:

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = A^1_1 \vec{f}_1 + A^2_1 \vec{f}_2 + \dots + A^m_1 \vec{f}_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A^i_1 \vec{f}_i$$

De même, tout vecteur $\vec{e_j}$ a pour image par $\mathcal{A}$

$$\boxed{\mathcal{A}(\vec{e_j}) = A^1_j \, \vec{f_1} + A^2_j \, \vec{f_2} \cdots + A^m_j \, \vec{f_m}}$$

$A^i_j \in K$

$\forall j = 1 .. n$

On convient de ranger les coefficients A^i_j ; $i = 1 \ldots m$, $j = 1 .. n$ dans un tableau, avec la convention suivante

→ l'indice supérieur est l'indice de ligne.

→ l'indice inférieur est l'indice de colonne.

Rq : Dans la notation non tensorielle on a la correspondance

$A^i_j \to A_{ij}$

Ce tableau est appelé matrice de l'application linéaire $\mathcal{A}$, exprimée dans les bases $\{\vec{e_j}\}_{j=1..n}$ (espace de départ), $\{\vec{f_i}\}_{i=1..m}$ (espace image)

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_j & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_j & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & A^i_2 & & A^i_j & & A^i_n \\ A^m_1 & A^m_2 & & A^m_j & & A^m_n \end{pmatrix}$$

Matrice $m \times n$

→ m lignes

n colonnes

Avec cette convention, on voit que la colonne j est l'image du vecteur $\vec{e_j}$, exprimée dans la base $\{f_i\}_{i=1..m}$.

La ligne i est la contribution du vecteur $\vec{f_i}$ de F aux images des vecteurs $\vec{e_1} \cdots \vec{e_n}$.

Remarque sur la notation

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} A^i_j \vec{f}_i$$

Si l'on oublie l'indice j, on voit qu'on a une formule de la forme

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} v^i \vec{f}_i \qquad \text{en posant } \vec{v} = A(\vec{e}_j) \text{ et } v^i = A^i_j$$

Cette notation est donc cohérente avec celle introduite précédemment.

Par ailleurs, l'indice inférieur j nous rappelle qu'on écrit les composantes d'un vecteur ($\mathcal{A}(\vec{e}_j)$)

En résumé :

A^{i}_{j}

i → Indice de ligne, composante (de $\mathcal{A}(\vec{e}_j)$) dans la direction $\vec{f}_i$, relatif à l'espace image F.

j → Indice de colonne, vecteur dont on exprime l'image (ici $\vec{e}_j$), relatif à l'espace de départ E.

→ nb de lignes : dimension de l'espace image (F)

Dans notre exemple $i = 1 .. m$

→ nb de colonnes : dimension de l'espace de départ

Dans notre exemple $j = 1 .. n$

Donc, dans cette notation $\mathcal{A} : E, j \longrightarrow F, i$

$i \longrightarrow$ espace image F , $i = 1 .. m$

$j \longrightarrow$ espace de départ E $j = 1 .. n$

A retenir :

$$\mathcal{A} : E, \{\vec{e}_j\}_{j=1..n} \longrightarrow F, \{\vec{f}_i\}_{i=1..m}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} A^i_j \, \vec{f}_i} \qquad j = 1..n$$

$$A : \begin{array}{c c}
\overbrace{\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(\vec{e}_1) & \cdots & \mathcal{A}(\vec{e}_j) & \cdots & \mathcal{A}(\vec{e}_n) \end{array}}^{\text{image de l'espace de départ}} & \\
\left(\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & A^i_j & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \end{array} \right) & \left. \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_i \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{array} \right\} \text{espace d'arrivée}
\end{array}$$

vecteur colonne

Image d'un vecteur quelconque par une application linéaire

Soit $\vec{x} \in E$, $\quad \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j$

Soit $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) \in F \Rightarrow \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{m} y^i \vec{f}_i$

$$\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x^j \mathcal{A}(\vec{e}_j) \quad \text{(application linéaire)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x^j \sum_{i=1}^{m} A^i_j \vec{f}_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j \vec{f}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j}_{\text{composantes}}\Big) \vec{f}_i}_{\text{décomposition sur la base d'arrivée}}$$

La décomposition d'un vecteur dans une base étant unique, on en tire, par identification :

$$\boxed{y^i = \sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j} \qquad i = 1..m$$

[illegible]

$$E, \{\vec{e}_j\}_{j=1..n} \xrightarrow{\mathcal{A}} F, \{\vec{f}_i\}_{i=1..m}$$

$$\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j\right) \vec{f}_i$$

$A^i_j x^j \nearrow$

Rq : cette fois-ci la sommation se fait "en montant"

La somme correspond au "produit" de la ligne i de la matrice A par la matrice colonne $\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_j & \cdots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \cdots & A^i_j & \cdots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \cdots & A^m_j & \cdots & A^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Notation : Par abus de notation on identifie l'application $\mathcal{A}$ et la matrice A et on note :

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

Ici la suite ... représentant d'applications linéaires données, dans une base donnée.

2) opérations sur les matrices

a) addition :

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 2 applications linéaires

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} : E \longrightarrow F \\ \mathcal{B} : E \longrightarrow F \end{array}\right\} \text{ même espaces } E, F$$

L'application $\quad \mathcal{C} : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$

$$\vec{x} \longrightarrow \mathcal{C}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x})$$

est une application linéaire par définition. En termes de matrice on a

$$C\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \overset{def}{=} (A+B)\vec{x}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C^i_j x^j \vec{f_i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} B^i_j x^j \vec{f_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}(A^i_j + B^i_j)x^j\right]\vec{f^i}$$

$$\boxed{C^i_j = A^i_j + B^i_j = (A+B)^i_j}$$

<u>Rq</u> : L'addition de 2 matrices n'est définie que pour des matrices A, B de même dimension (même nombre de lignes et de colonnes).

La matrice somme est la matrice dont les coef sont la somme des coef de A et B

b) Multiplication par un scalaire

$$\mathcal{A} : E \longrightarrow F$$
$$\vec{x} \longmapsto \mathcal{A}(\vec{x})$$

$\mathcal{A}$ étant linéaire $\quad \mathcal{A}(\lambda \vec{x}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}) \quad \lambda \in K$

En termes matriciels,

$$\lambda \mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j \vec{f_i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\lambda A^i_j) x^j \vec{f_i}$$

$\rightarrow$ définit une nouvelle application $\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$ dont la matrice a pour composantes λA^i_j.

c) Produit de 2 matrices

$$\mathcal{C}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\vec{x})$$

$$E, \{\vec{e}_j\}_{j=1..n} \xrightarrow{\mathcal{B}} G, \{\vec{g}_k\}_{k=1..p} \xrightarrow{\mathcal{A}} F, \{\vec{f_i}\}_{i=1..m}$$
$$x \longmapsto \mathcal{B}(\vec{x}) \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \mathcal{C}(\vec{x})$$

$$\mathcal{B}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} B^k_j x^j \right) \vec{g}_k$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} B^k_j x^j \vec{g}_k \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} B^k_j x^j \mathcal{A}(\vec{g}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} B^k_j x^j \left(\sum_{i=1}^{m} A^i_k \vec{f_i} \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B^k_j A^i_k x^j \vec{f_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{A^i_k B^k_j}_{\substack{\text{on calcule} \\ \mathcal{A}\mathcal{B}}} x^j \vec{f_i} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} A^i_k B^k_j \right) x^j \right) \vec{f_i}$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} C^i_j\, x^j \right) f_i$$

en identifiant on a

$$\boxed{C^i_j = \sum_{k=1}^{p} A^i_k\, B^k_j} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \end{array}$$

$$m\text{ lignes}\left\{ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} A^i_1 & \cdots & A^i_k & \cdots & A^i_p \end{pmatrix}}^{p\text{ colonnes}}}_{\mathcal{A}} \right. \quad p\text{ lignes}\left\{ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} B^1_j \\ \vdots \\ B^k_j \\ \vdots \\ B^p_j \end{pmatrix}}^{n\text{ colonnes}}}_{\mathcal{B}} \right. = m\text{ lignes}\left\{ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} & \vdots \\ \cdots & C^i_j = \sum_{k=1}^{p} A^i_k B^k_j \end{pmatrix}}^{n\text{ colonnes}}}_{\mathcal{C}} \right.$$

→ Produit ligne-colonne   sommation → l'indice k disparait

Rq : $$C^i_j = \sum_{k=1}^{p} A^i_k\, B^k_j$$

Remarque importante : $\boxed{AB \neq BA}$ en général

3) Matrices remarquables

a) matrice colonne

Matrice à 1 colonne et m lignes → représentation d'un vecteur dans une base donnée.

$$A^i_1 \equiv v^i \longrightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ | \\ | \\ v^m \end{pmatrix}$$

b) matrice ligne

Matrice à 1 ligne et n colonnes

$$A^1_j \equiv w_j \longrightarrow (w_1, w_2 \cdots, w_n)$$ (cf forme linéaire)

c) Transposée d'une matrice

C'est la matrice obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes de A, On la notera $\tilde{A}$ ou ${}^T A$.

$$\tilde{A}^i_j = A^j_i$$

Prop : 1) $\tilde{\tilde{A}} = A$

2) $\widetilde{(A+B)} = \tilde{A} + \tilde{B}$

3) $\widetilde{\lambda A} = \lambda \tilde{A}$

4) $\widetilde{AB} = \tilde{B}.\tilde{A}$

$$C = AB \qquad C^i_j = \sum_{k=1}^{p} A^i_k \, B^k_j \qquad \begin{array}{l} i = 1..n \\ j = 1..n \end{array}$$

$$\tilde{C} = C^j_i = \sum_{k=1}^{p} A^j_k \, B^k_i = \sum_{k=1}^{p} \tilde{A}^k_j \, \tilde{B}^i_k$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \tilde{B}^i_k \, \tilde{A}^k_j = \left(\tilde{B}\tilde{A}\right)^i_j$$

nb. de multiplication
a été réd. en montant à pk

Noyau et image d'une application linéaire

Soit $\mathcal{A} : E \to F$ une application linéaire. On définit 2 sous-espaces vectoriels remarquables, caractéristiques de l'application $\mathcal{A}$.

Noyau : $\boxed{\text{Soit } \vec{v} \in E. \quad \vec{v} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{0}}$

Prop :

1) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E.

$*$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. $\mathcal{A}(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda\mathcal{A}(\vec{v}_1) + \mu\mathcal{A}(\vec{v}_2) = \vec{0}$ $*$

2) En particulier $\vec{0} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

3) Soit $\{\vec{e}_j\}_{j=1..n}$ base de E, $\{\vec{f}_i\}_{i=1..m}$ base de F $\Rightarrow \boxed{\vec{v} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A^i_j v^j = 0 ;\ \forall i}_{\text{système linéaire}}}$

$*$ $\mathcal{A}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A^i_j v^j\right)\vec{f}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A^i_j v^j = 0 \quad \forall i = 1..m$

Image : $\boxed{\text{Soit } \vec{w} \in F. \quad \vec{w} \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists \vec{v} \in E \text{ t.q. } \mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{w}}$

1) $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subseteq F$ est un sous-espace vectoriel de F.

$*$ $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in F \Leftrightarrow \mathcal{A}(\vec{v}_1) = \vec{w}_1,\ \mathcal{A}(\vec{v}_2) = \vec{w}_2,\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E$

$\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \mathcal{A}(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \mathcal{A}(\vec{v}) \quad \vec{v} \in E$ $*$

2) En particulier $\vec{0} \in \operatorname{Im} F$ $\quad (\mathcal{A}(\operatorname{Ker}\mathcal{A}) = \vec{0})$

3) Soit $\{\vec{e}_j\}_{j=1..n}$ base de E, $\{\vec{f}_i\}_{i=1..m}$ base de F

$w \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists v \in E$ t.q. $\sum_j A_j^i v^j = w^i \quad i = 1 .. m$

$\rightarrow$ système linéaire.

Def: on appelle rang de $\mathcal{A}$ la dimension de son image. C'est le nombre max. de vecteurs de $\mathcal{A}(E)$ lin. indep. $\rightarrow$ nb max de colonnes de A lin. indep

Relation entre noyau et image:

Ces 2 sous espaces n'appartiennent pas au même espace ($\operatorname{Ker} \mathcal{A} \subset E$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subset F$)

on a cependant la relation suivante entre leur dimension respective.

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim E}$$

$*$ On peut décomposer E en 2 sous espaces supplementaires:

$E = \operatorname{Ker} \mathcal{A} \oplus H$, c'est à dire que : (i) $H \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\vec{0}\}$

(ii) $\forall \vec{v} \in E$,

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad \vec{v}_1 \in H$, $\vec{v}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathcal{A}(\vec{v}_1) + \mathcal{A}(\vec{v}_2) = \mathcal{A}(\vec{v}_1) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$$

Les vecteurs de H engendrent donc $\operatorname{Im} F$ donc $\dim F = \dim H$

Par ailleurs H et $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ étant supplémentaires $\dim H + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim E$ $*$

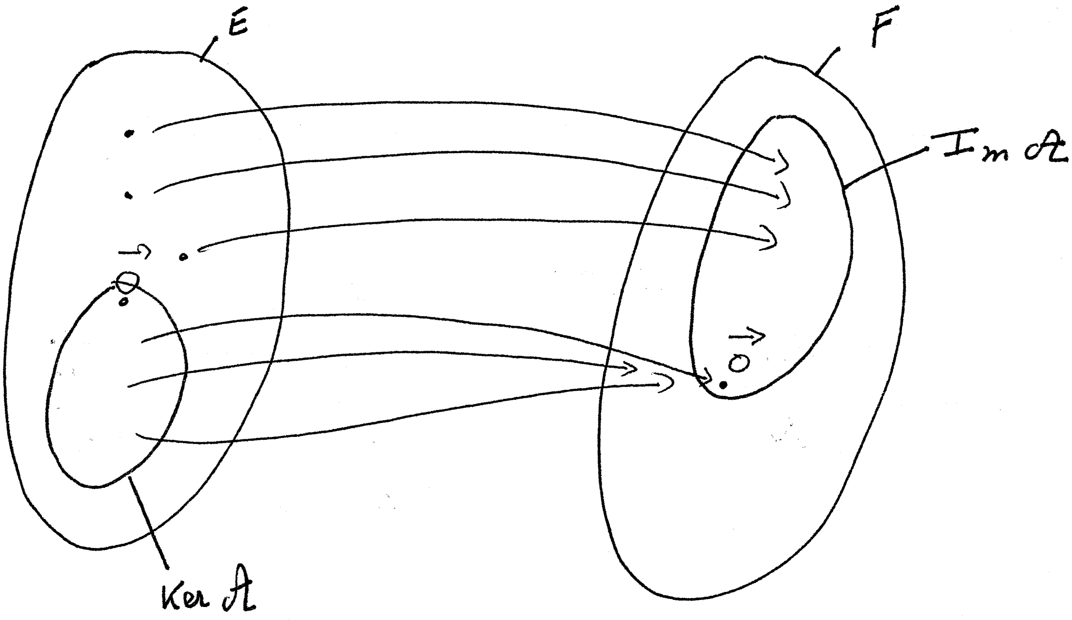
Par ailleurs, on a les inégalités suivantes:

$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} \leq \dim E \qquad$ (* $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \subset E$ *)

$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} \leq \dim F \qquad$ (* $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subset F$ *)

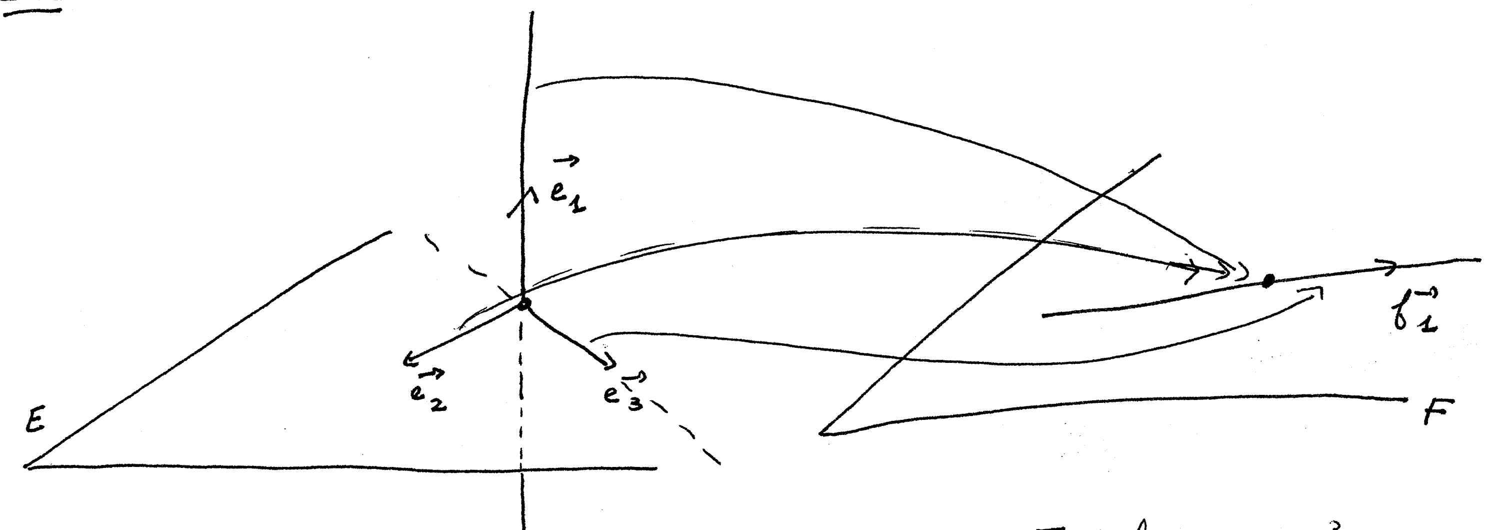
$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} \leq \dim E \qquad$ (* $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$ ne peut contenir plus de n vecteurs lin indep *)

Dessin récapitulatif



En fait, les ensembles naturels pour travailler étant des espaces, un dessin plus réaliste serait le suivant (en 3D).

Ex

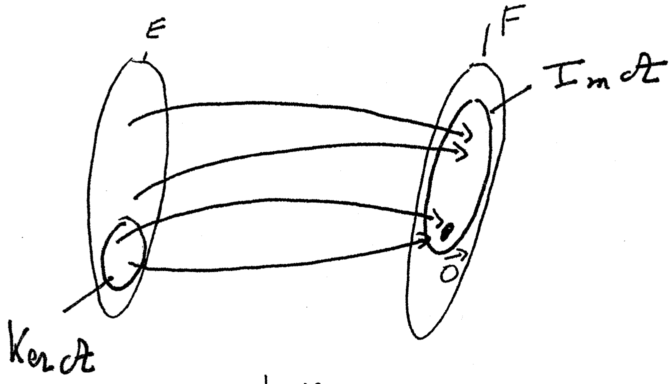


→ Tout l'espace $\mathbb{R}^3$ est projeté sur la droite de vecteur directeur $\vec{f_1}$.

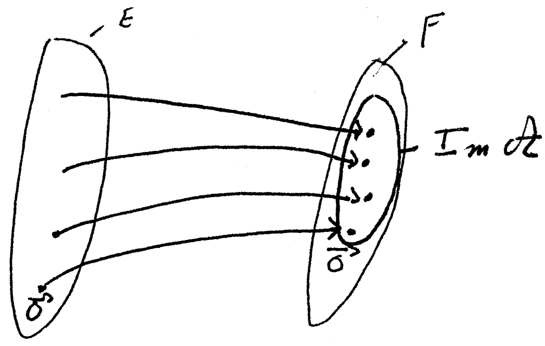
$$
A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccc|c}
A(\vec{e_1}) & A(\vec{e_2}) & A(\vec{e_3}) & \\
0 & 0 & 1 & \vec{f_1} \\
0 & 0 & 0 & \vec{f_2}
\end{array}
$$

Def : $\mathcal{A}$ est injective ssi $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{y}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

Cela signifie que tout vecteur de $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ est l'image d'un seul vecteur



non injective



injective

Prop : $\mathcal{A}$ est injective ssi $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$

$\ast \Rightarrow$ Si $\mathcal{A}$ injective, soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$. $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\Leftarrow$ Si $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$ alors $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{y}) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{0} = \mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y})$

$\Rightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$ $\ast$

Corollaire : $\mathcal{A}$ injective $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \dim E$

Remarque importante : On est souvent amené à résoudre un problème du type $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{y}$, $\vec{y} \in F$. Cette équation admet une solution si et seulement si $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est injective alors cette solution, si elle existe, est unique.

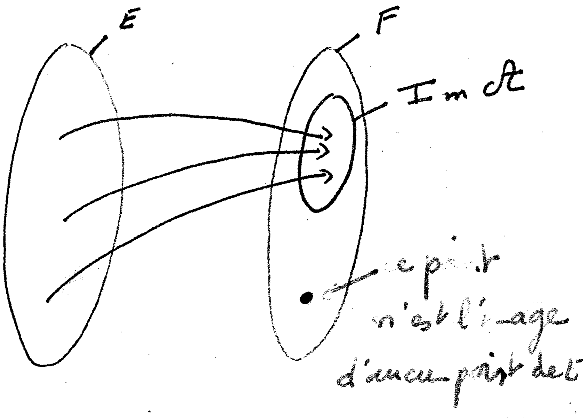
Ex :

$$\begin{array}{c} A(\vec{e}_1)\ A(\vec{e}_2)\ A(\vec{e}_3) \\ A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{non injective}} \end{array} ; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1 - x_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{infinité de solution.}$$

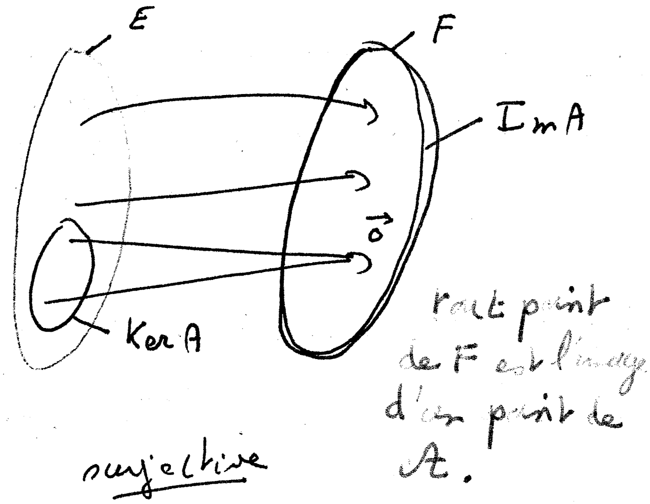
$A(\vec{e}_2) = 2A(\vec{e}_1) \Rightarrow A(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_1) = \vec{0} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Déf : $\mathcal{A}$ est surjective ssi $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathcal{A}(E) = F$.

Cela signifie que tout point de F est image d'un point de E ou encore que E est envoyé par $\mathcal{A}$ dans F tout entier.



non surjective



surjective

Prop : $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim F$.

Corollaire : si $\mathcal{A}$ est surjective $\dim E \geq \dim F$.

Remarque importante : Dans ce cas l'équation $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{y}$, $\vec{y} \in F$ a une solution $\underline{\forall \vec{y}}$. Cependant cette solution n'est pas forcément unique.

Ex :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A(\vec{e}_1) & A(\vec{e}_2) & A(\vec{e}_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Pas de solution. $A\vec{x} = \vec{y}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = -\frac{4}{3} x_3 \\ x_2 = -\frac{6}{5} x_3 \end{cases} \Rightarrow$ impossible

$\iff \quad \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = F$.

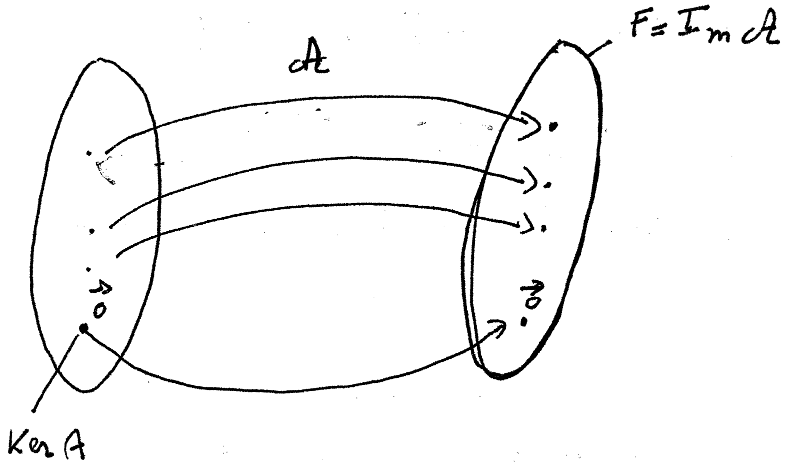
Prop : $\mathcal{A}$ est bijective $\Rightarrow$ $\dim E = \dim F$

Resp : Si $\dim E \neq \dim F$ alors $\mathcal{A}$ n'est pas bijective

Rq : la réciproque n'est pas vraie. L'application suivante $\mathcal{A} : E \to E$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas bijective.

Prop : Si $\mathcal{A}$ est bijective, le système $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, $\vec{y} \in F$, $\vec{x} \in E$ admet une et une seule solution $\iff \forall \vec{y} \in F, \exists!\, \vec{x} \quad \vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$.

Corollaire : Si $\mathcal{A}$ est bijective l'équation $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{0}$ admet l'unique solution $\vec{x} = \vec{0}$.



Def : Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.

Un isomorphisme définit une relation biunivoque entre E et F (1 élément de E a une et une seule image dans F). Une application linéaire transportant la linéarité, deux espaces vectoriels isomorphes ont essentiellement la même structure et ne diffèrent que via une transformation (cgt de variable ou de base) $\mathcal{A}$.

Inverse d'une application linéaire :

On appelle inverse de $\mathcal{A}$, et on note $\mathcal{A}^{-1}$ l'application (lorsqu'elle existe) telle que : $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\vec{x})) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\vec{x})) = \vec{x}$, $\vec{x} \in E$.

Rq : On rappelle qu'une application $\mathcal{B}$ est une relation qui a un élément $\vec{x}$ associe une unique image $\mathcal{B}(\vec{x})$.

Pour $\vec{x} \in E$, notons $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \subset F$.
L'application inverse est la relation t.q. $\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{y})$.
Cependant, on voit que s'il existe $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ t.q. $\mathcal{A}(\vec{x}_1) = \mathcal{A}(\vec{x}_2) = \vec{y}$, alors $\mathcal{A}^{-1}(\vec{y}) = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ n'est pas une application puisqu'un élément à 2 images.

Pour que $\mathcal{A}$ soit inversible en $\vec{y}$ il faut donc qu'il existe un unique $\vec{x}$ t.q. $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$.

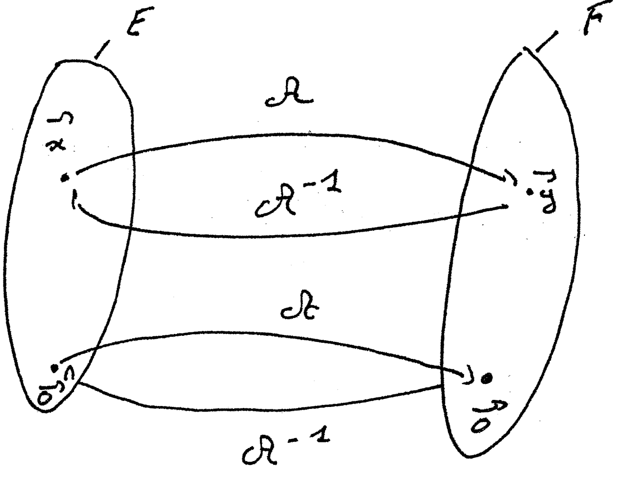
On voit donc que si $\mathcal{A}$ est injective alors tout $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ a un antécédent unique $\vec{x} \in E$ i.e. $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$. Cela signifie que dans ce cas on peut inverser $\mathcal{A}$ sur son image.

Cependant, pour pouvoir inverser $\mathcal{A}$ sur tout F il faut donc de plus que $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = F$ c.a.d. que $\mathcal{A}$ soit également surjective.

Donc :

Th : $\mathcal{A} : E \to F$ inversible sur $F \iff \mathcal{A}$ est bijective

Rq : On rappelle que $\mathcal{A}$ bijective $\Rightarrow \dim E = \dim F$



Corollaire : Un isomorphisme est une application linéaire $E \to F$ inversible sur F.

Corollaire : Si $\mathcal{A}$ est inversible l'équation $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ a une et une seule solution donnée par $\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{y})$.

Cas général :

1) Si $\mathcal{A}$ est injective non surjective on peut inverser $\mathcal{A}$ sur son image puisque tout $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ a un unique antécédent

Donc : $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}$ inversible sur son image.

2) Si $\mathcal{A}$ n'est pas injective cela signifie que $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \neq \{\vec{0}\}$, est un sous-espace vectoriel de E. On peut alors décomposer E en 2 sous espaces dits supplémentaires $E = \mathrm{Ker}\,A \oplus {}^c\mathrm{Ker}\,A$ où

$$\begin{cases} {}^c\mathrm{Ker}\,A \cap \mathrm{Ker}\,A = \{0\} \\ \forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \in \mathrm{Ker}\,A,\ \vec{x}_2 \in {}^c\mathrm{Ker}\,A \end{cases}$$

Donc, $\forall \vec{x} \in E$, $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \mathcal{A}(\vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_2) = \vec{y}$

Dans ce cas $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}({}^c\mathrm{Ker}\,\mathcal{A})$ et l'application $\mathcal{A}$ restreinte à ${}^c\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ est injective. L'application $\tilde{\mathcal{A}} : {}^c\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ est bijective et l'équation $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ admet une et une seule solution $\vec{x}_2 \in {}^c\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$. Cependant dans l'espace E tout entier cette solution n'est plus unique puisque tout vecteur

$x = x_1 + x_2$

x_2 est dite solution particulière. On a donc S.G = S.P. + S.H. (cf EDO)

Cas particulier important : Endomorphisme

Un endomorphisme est une application linéaire $\mathcal{A} : E \to E$.

Dans ce cas donc $F = E$.

Si $\mathcal{A}$ est injective, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} + \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$
$= \dim E = \dim F$.

$\Rightarrow \mathcal{A}$ est surjective $\Rightarrow \mathcal{A}$ est bijective.

Donc :

Th : Si $\mathcal{A}$ est un endomorphisme

$\mathcal{A}$ injective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ surjective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ bijective. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ inversible

Corollaire : Si $\mathcal{A}$ est un endomorphisme l'équation $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ admet une et une seule solution $\vec{x}$ ssi $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$, avec $\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{y})$.

Algèbre linéaire

Ch III

Matrices carrées

1) Définitions et propriétés :

1.a) Endomorphisme :

Def : Une application linéaire de $E \longrightarrow E$ est appelée endomorphisme.

Soit $\mathcal{A} : E \circlearrowleft$ un endomorphisme. On peut donc exprimer les vecteurs et leur image dans la même base

$$\mathcal{A} : E, \{\vec{e}_i\}_{i=1..n} \longrightarrow E, \{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$$

La matrice correspondante est donc une matrice carrée, $n \times n$.

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} A^i_j \, \vec{e}_i \quad ; \; j = 1..n$$

1.b) Exemples :

Matrice unité :

$$I = n\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{n}\right.$$

On notera $I^i_j = \delta^i_j$ où δ^i_j est le symbole de Kronecker

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Delta^i_j = \lambda_i \, \delta^i_j}$$

$\rightarrow$ i.e. tous les coef de la ligne i sont nuls sauf $\Delta^i_i = \lambda_i$

↳ diagonale.

Matrice triangulaire

$T =$ 

supérieure

$$T^i_j \begin{cases} \neq 0 & j \geq i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

inférieure

$$T^i_j \begin{cases} = 0 & j > i \\ \neq 0 & j \leq i \end{cases}$$

Matrice symétrique

$$A^i_j = A^j_i = \tilde{A}^i_j \qquad A = \tilde{A}$$

Matrice antisymétrique

$$A = -\tilde{A} \quad ; \quad A^i_j = -A^j_i$$

2) Anneau des matrices carrées :

Considérons toutes les matrices $n \times n$. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de ces matrices.

Sur cet ensemble, l'addition de matrices associe à 2 matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$ une matrice de $\mathcal{M}_n$. Plus généralement, cette opération a les propriétés suivantes :

a)

(i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n \qquad A + B \in \mathcal{M}_n$ (loi interne)

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ (associativité)

(iii) $A + 0 = 0 + A = A$ (élément neutre)

où 0 est la matrice dont tous les coef. sont nuls

(iv) $\forall A \in \mathcal{M}_n, \exists -A \in \mathcal{M}_n \in A$ t.q. (élément opposé)

$$A + (-A) = 0$$

(v) $A + B = B + A$ (commutativité)

Ces propriétés donnent à $(\mathcal{M}_n, +)$ une structure de groupe commutatif.

Par ailleurs, on voit que le produit de matrices carrées, est toujours défini dans $\mathcal{M}_n$, et possède les propriétés suivantes.

b)

(i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n \qquad A \cdot B \in \mathcal{M}_n$ (loi interne)

iii) $A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C$ (associativité)

iv) $A.(B+C) = A.B + A.C$ (distributivité de . par rapport à +)

Par contre . n'est pas commutative.

On dit que $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ forme un anneau, l'anneau des matrices carrées.

<u>Démonstration</u> : Notons $[\ \ ]^i_j$ la composante ^i_j d'une composition de matrices.

b iii)

Posons $D = B.C. \Rightarrow D^i_j = \sum_{k=1}^{n} B^i_k C^k_j$

$$[A.(B.C)]^i_j = \sum_{k_1=1}^{n} A^i_{k_1} D^{k_1}_j = \sum_{k_1=1}^{n} A^i_{k_1} \sum_{k_2=1}^{n} B^{k_1}_{k_2} C^{k_2}_j$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} A^i_{k_1} B^{k_1}_{k_2} C^{k_2}_j = \sum_{k_2=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k_1=1}^{n} A^i_{k_1} B^{k_1}_{k_2} \right)}_{[A.B]^i_{k_2}} C^{k_2}_j$$

$$= [(A.B).C]^i_j$$

b iv) $$[A.(B+C)]^i_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k [B+C]^k_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A^i_k (B^k_j + C^k_j) = \sum_{k=1}^{n} A^i_k B^k_j + \sum_{k=1}^{n} A^i_k C^k_j$$

$$= [A.B]^i_j + [A.C]^i_j = [A.B + A.C]^i_j$$

$(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ possède une propriété supplémentaire. Il existe un élément neutre (ou unitaire), la matrice identité I_n satisfaisant à :

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A \qquad \forall A \in M_n$$

$$* \quad [I_n]^i_j = \delta^i_j$$

$$[A \cdot I_n]^i_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k \, \delta^k_j$$

$$\underset{=1}{\delta^k_j \neq 0} \text{ ssi } k = j \implies \sum_{k=1}^{n} A^i_k \, \delta^k_j = A^i_j \quad *$$

$(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ est alors appelé <u>anneau unitaire</u>

<u>Inverse d'une matrice :</u>

Etant donné que $\mathcal{M}_n$ possède un élément neutre, I_n, la question se pose de savoir si $\forall A \in \mathcal{M}_n$, $\exists B \in \mathcal{M}_n$, $A \cdot B = I_n$, i.e. existe-t-il un élément inverse.

La réponse est non en général, mais sous certaines conditions, exposées plus bas, la matrice A admet une matrice inverse notée A^{-1} t.q.

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$$

<u>Déf</u>: une matrice inversible est dite <u>régulière</u>.

Ex : La matrice diagonale $A = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \lambda_i \neq 0 \end{cases}$ admet pour inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Par contre, la matrice 2×2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

En effet, supposons le contraire. Alors $\exists\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ t.q.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en faisant le produit on trouve $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui est absurde.

On verra plus loin une formule permettant de calculer A^{-1} lorsqu'elle existe.

Puissance d'une matrice :

Sur $\mathcal{M}_n$, la quantité $\underbrace{A.A.\cdots.A}_{p}$ est définie, c'est une matrice notée A^p.

2) Déterminants

3. a) calcul :

Soit $A_2 = \begin{pmatrix} a^1_1, & a^1_2 \\ a^2_1 & a_{22} \end{pmatrix}$ on définit le déterminant de cette matrice

2×2 comme

$$D_2 = \det A_2 = a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2$$

$$\left| \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right|$$

Pour une matrice 3×3 on a :

$$A_3 = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} ;$$

On définit le mineur D^i_j de la matrice A_3 comme le déterminant de la matrice 2×2 obtenue en barrant la ligne i et la colonne j dans A_3

$$D^1_1 = \begin{vmatrix} \cancel{a^1_1} & \cancel{a^1_2} & \cancel{a^1_3} \\ \cancel{a^2_1} & a^2_2 & a^2_3 \\ \cancel{a^3_1} & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = a^2_2 a^3_3 - a^3_2 a^2_3$$

Le cofacteur Δ^i_j est le nombre $\Delta^i_j = (-1)^{i+j} D^i_j$.

Le déterminant de A est alors :

$$\det A_3 = \sum_{j=1}^{3} a^i_j \Delta^i_j \quad (i \text{ fixé}) \quad \text{(développement selon une ligne)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a^i_j \Delta^i_j \quad (j \text{ fixé}) \quad \text{(développement selon une colonne)}.$$

Ex :

$$D_3 = a^1_1 \Delta^1_1 + a^2_1 \Delta^2_1 + a^3_1 \Delta^3_1 \quad : \quad \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$= a^1_1 \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} - a^2_1 \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} + a^3_1 \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_3 \end{vmatrix} \qquad (1^{ère} \text{ colonne})$$

$$= -a^2_1 \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} + a^2_2 \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} - a^2_3 \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix} \qquad (2 \text{ ligne})$$

cette formule se généralise à l'ordre n

$$A_n = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_j & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i_1 & \cdots & a^i_j & \cdots & a^i_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_j & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

le mineur D^i_j est définit de la même manière, comme le déterminant de la matrice $n-1 \times n-1$ obtenu en barrant la i ème ligne et j ième colonne de A_n. le cofacteur Δ^i_j est $(-1)^{i+j} D^i_j$ et

$$\boxed{\begin{aligned} \det A_n &= \sum_{j=1}^{n} a^i_j \, \Delta^i_j \qquad &(\text{développement selon la ligne } i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^i_j \, \Delta^i_j \qquad &(\text{développement selon la colonne } j) \end{aligned}}$$

Matrice des signes $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & & & \\ - & \cdots & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$

Exemples remarquables

Matrice diagonale : $A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\det A_n = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Matrice triangulaire : $A_n = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_n^n \end{pmatrix}$

$$\det A_n = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 0 & a_3^3 \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i^i$$

Prop (admise) : le déterminant est indépendant de la base dans laquelle est exprimée $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \boxed{\det \mathcal{A} = \det A}$ $\forall A$, matrice de $\mathcal{A}$.

Déterminant d'un système de vecteurs :

Considérons un système de n vecteurs $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ de dimension n.
On peut toujours ranger ces vecteurs (colonne) dans une matrice V t.q.

$$V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^n & v_2^n & & v_n^n \end{pmatrix}$$

On appelera déterminant du système de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n)$ le déterminant de V i.e.

$$\boxed{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n) \overset{def}{=} \det V}$$

Rq : 1) Le déterminant peut alors être vu comme une fonction de n vecteurs, $\Phi(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$.

2) Le déterminant d'une application linéaire $\mathcal{A}$ est donc le déterminant du système de vecteurs $\mathcal{A}(\vec{e}_1) \ldots \mathcal{A}(\vec{e}_n)$.

En effet, la matrice de $\mathcal{A}$, A, correspond à l'expression des vecteurs colonne $\mathcal{A}(\vec{e}_1) \ldots \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ dans la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1 \ldots n}$.

$$A = (\mathcal{A}(\vec{e}_1) \ldots \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathcal{A}(\vec{e}_1) & \mathcal{A}(\vec{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & & \\ A^1_n & \cdots & A^n_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A \equiv \det(\mathcal{A}(\vec{e}_1) \ldots \mathcal{A}(\vec{e}_n))}$$

3.b) Propriétés des déterminants.

3.b.1) Multilinéarité :

Multiplions la ligne i (resp. la colonne j) d'une matrice A par un coefficient λ. Le déterminant de cette nouvelle matrice, A^*, est indépendant de la colonne ou de la ligne selon laquelle on le développe. Donc, si on développe selon la ligne i (resp. la colonne j) on a :

$$\det A^* = \sum_{j=1}^{n} a^{*i}_j \Delta^i_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} a^i_j \Delta^i_j = \lambda \det A.$$

où Δ^i_j est le cofacteur de A en position i, j.

Ex :

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda A_1^1 , & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^* = \lambda \det A.$$

Les cofacteurs sont inchangés ds le développement selon la colonne 1.

Par conséquent :

i) $\boxed{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \lambda\vec{v}_k, \cdots \vec{v}_n) = \lambda \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_k \cdots \vec{v}_n)}$

et plus généralement :

$$\det(\mu_1\vec{v}_1, \mu_2\vec{v}_2 \cdots \mu_k\vec{v}_k \cdots \mu_n\vec{v}_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right) \det(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n)$$

En particulier,

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda \mathcal{A}(\vec{e}_1), \lambda\mathcal{A}(\vec{e}_2) \cdots \lambda\mathcal{A}(\vec{e}_n)) = \lambda^n \det(\mathcal{A}(\vec{e}_1) \cdots \mathcal{A}(\vec{e}_n))$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$$

De même, ajoutons à la colonne k de la matrice A un vecteur colonne $\vec{u}$.

Soit A' la nouvelle matrice

$$A' = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_k^1 + u^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_k^n + u^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} = \left[A_j^i\right]_{j=1\cdots n}^{i=1\cdots n}$$

En développant le déterminant selon la k-ième colonne on obtient :

$$\det A' = \sum_{i=1}^{n} (A_k^i + u^i)\,\Delta_k^i = \sum_{i=1}^{n} A_k^i \Delta_k^i + \sum_{i=1}^{n} u^i \Delta_k^i$$

où Δ_k^i est le cofacteur de A, obtenu en barrant la ligne i et la colonne k. Comme seule la colonne k diffère entre A et A' les cofacteurs obtenus en barrant cette colonne sont identiques.

Le déterminant obtenu est celui de la matrice

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\vec{e}_1) & \mathcal{A}(\vec{e}_k) & \mathcal{A}(\vec{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & - A_k^1 - & A_n^1 \\ | & | & \\ | & | & \\ A_1^n & - A_k^n & A_n^n \end{pmatrix} \end{array}}_{A} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\vec{e}_1) & \vec{u} & \mathcal{A}(\vec{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_1^1 & -- \; u^1 \; -- & A_n^1 \\ | & | & | \\ | & | & | \\ A_1^n & -- \; u^n \; -- & A_n^n \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $\det(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_k) + \vec{u}, \dots \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = \det(\mathcal{A}(\vec{e}_1) \dots \mathcal{A}(\vec{e}_k) \dots \mathcal{A}(\vec{e}_n))$

$+ \det(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \underset{\downarrow \atop k}{\vec{u}}, \dots \mathcal{A}(\vec{e}_n))$

Plus généralement (en fait de manière équivalente)

ii) $\boxed{\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k + \vec{u}, \dots \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \dots \vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1 \dots \underset{\downarrow \atop k}{\vec{u}} \dots \vec{v}_n)}$

Le déterminant, vu comme une fonction de n variables, possède donc les propriétés suivantes :

i) $\Phi(\vec{v}_1 \dots \lambda\vec{v}_k \dots \vec{v}_n) = \lambda\,\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n)$ $\forall k$

ii) $\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k + \vec{u} \dots \vec{v}_n) = \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n) + \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{u} \dots \vec{v}_n)$; $\forall k$

On condense ces 2 propriétés en une seule:

$$\Phi(\vec{v}_1 \dots, \lambda\vec{v}_k + \mu\vec{u}, \dots \vec{v}_n) = \lambda\,\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n) + \mu\,\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{u} \dots \vec{v}_n)$$

cela constitue la propriété de multilinéarité du déterminant ou linéarité par rapport à chacune des variables $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$.

3.b.2) Fonction alternée:

le déterminant a aussi la propriété suivante (admise ou exercice?)

$$\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_n) = -\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_n)$$

i.e. le déterminant change de signe si l'on permute 2 vecteurs.

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$.

3.b.3) Conséquences:

i) Si l'un des vecteurs est nul, le déterminant est nul.

$$* \quad \det(\vec{v}_1 \dots \underset{\substack{\downarrow \\ k}}{\vec{0}} \dots \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1 \dots 0.\vec{v}_k \dots \vec{v}_n)$$

$$= 0 \det(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n) = 0$$

ii) Si 2 vecteurs sont identiques le déterminant est nul.

$$* \ \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_n) \underset{\text{alternance}}{=} -\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_n)$$

$$\underset{\vec{v}_i = \vec{v}_j}{=} -\Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_n) \Rightarrow \Phi(\dots) = 0 \ *$$

iii) La valeur du déterminant ne change pas si l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

$$\Phi\Big(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda^i \vec{v}_i \dots \vec{v}_n\Big) = \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \Phi(\vec{v}_1 \dots \lambda^i \vec{v}_i \dots \vec{v}_n) = \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda^i \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_n) = \Phi(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \dots \vec{v}_n) \ *$$

$\forall i$, on a 2 fois 1 des vecteurs dans Φ

$\rightarrow$ chaque terme est nul

Prop. fondamentale :

iii) $\boxed{\Phi(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n) = 0 \iff \text{Les vecteurs } \vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \text{ sont linéairement dépendants.}}$

$* \Leftarrow$. $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ lin. dep. $\Rightarrow$ 1 des vecteurs est comb. lin. des autres

soit $\vec{v}_i \Rightarrow \det(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) = \det(v_1 \dots \vec{0} + \sum_{k \neq i} \lambda^k v_k \dots \vec{v}_n)$

$= \det(\vec{v}_1 \dots \vec{0} \dots \vec{v}_n) = 0 \ *$

$\Rightarrow$ admis.

3.b.4) Autres propriétés:

i) Transposée : $\boxed{\det A = \det {}^T A}$

* le det est indépendant de la ligne ou de la colonne selon laquelle on le développe *

ii) Produit : $\boxed{\det AB = \det A \det B}$ A, B matrices carrées.

* Exercice *

iii) Inverse : Si A^{-1} existe, $\boxed{\det A^{-1} = 1/\det A}$

* $\det I = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 = \det A A^{-1} = \det A \det A^{-1}$ *

4) Inverse d'une matrice

4.a) Inversibilité :

On a vu au chapitre précédent que $\mathcal{A}$ était inversible ssi elle était bijective. Par ailleurs, dans le cas d'un endomorphisme, $\mathcal{A}$ est bijective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ injective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ surjective. Ces conditions peuvent être exprimées en termes du déterminant de $\mathcal{A}$.

En effet, dans le cas d'un endomorphisme, $\mathcal{A}$ est surjective ssi $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim E = n$. Cela signifie que les n vecteurs $\mathcal{A}(\vec{e}_1) \dots \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ doivent être linéairement indépendants. Cette propriété est vérifiée ssi $\det(\mathcal{A}(\vec{e}_1) \dots \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = \det A \neq 0$.

Donc $\mathcal{A}$ surjective $\Leftrightarrow$ $\det \mathcal{A} \neq 0$. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ injective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ bijective

Donc $\boxed{\mathcal{A} \text{ est inversible ssi } \det \mathcal{A} \neq 0.}$

Les conditions étant équivalentes on sait que que $\det \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}$ non injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{\vec{0}\}$. Cette relation peut se comprendre de la façon suivante. ~~Si~~ $\det \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(\vec{e}_1) \dots \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ sont linéairement dépendants $\Leftrightarrow \exists k$ t.q. $\mathcal{A}(\vec{e}_k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha^i \mathcal{A}(\vec{e}_i)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}\left(\vec{e}_k - \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \vec{e}_i\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \vec{e}_i \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{\vec{0}\}.$$

Donc : $\boxed{\det \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ inversible}}$

__Corollaire :__ $\mathcal{A}$ est inversible ssi ses lignes (resp. ses colonnes) sont linéairement indépendantes.

4.b) calcul de la matrice inverse

On appelle comatrice la matrice des cofacteurs de A, i.e.

$$\mathrm{Com}\,A = \begin{pmatrix} \Delta_1^1 & \cdots & \Delta_n^1 \\ \vdots & & \\ \Delta_1^n & \cdots & \Delta_n^n \end{pmatrix}.$$

On montrera dans le chapitre sur la résolution de systèmes linéaires qu'on a alors :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{{}^{T}\mathrm{Com}\,A}{\det A}}$$

Ex : $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} ; \quad \det A = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \neq 0$$

$$\mathrm{Com}\,A = \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_1^2 \\ -a_2^1 & a_1^1 \end{pmatrix} ; \quad {}^{T}\mathrm{Com}\,A = \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$A . A^{-1} = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \begin{pmatrix} a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \; ; & -a_1^1 a_2^1 + a_2^1 a_1^1 \\ a_1^2 a_2^2 - a_2^2 a_1^2 \; ; & -a_1^2 a_2^1 + a_2^2 a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} *$$

<u>Rq</u> : En dimension 2 (et <u>seulement</u> ds ce cas) la matrice ${}^{T}\mathrm{Com}\,A$ est obtenue : – en intervertissant les termes diagonaux
– en changeant le signe des termes non diagonaux.

4.c) <u>Propriétés</u> :

i) <u>L'inverse de A, lorsqu'il existe, est unique.</u>
* cela résulte de la formule donnant A^{-1}. Une autre façon de le démontrer est la suivante. Supposons qu'il existe 2 matrices B et C qui soient l'inverse de A, alors :

$$AB = I \; ; \; AC = I \Rightarrow AB = AC$$

$$\Rightarrow A.B - A.C = 0 = A.(B-C)$$

cela signifie que $\forall \vec{v} \in E, \quad A.(B-C)\vec{v} = \vec{0}$

$\Rightarrow (B-C)\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,A$

Mais $\mathrm{Ker}\,A = \{\vec{0}\}$ donc $(B-C)\vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v}$

$\Rightarrow$ B−C est la matrice nulle $\Rightarrow B = C$. *

<u>Rq</u> : On a vu au chapitre précédent qu'on pouvait définir l'inverse d'une application même si elle n'est pas bijective, en se restreignant à son image (i.e. A^{-1} a pour support $\mathrm{Im}\,A$).
On voit cependant que si $\mathrm{Ker}\,A \neq \{\vec{0}\}$ l'inverse n'est plus unique (indétermination due au fait qu'on peut ajouter n'importe quel élément de Ker A) $\longrightarrow$ On peut définir différentes applications inverses (la plus naturelle ayant son image dans ${}^{c}\mathrm{Ker}\,A$).

ii) Si A est inversible, B est inversible AB est inversible

et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$

* AB, automorphisme, est inversible ssi $\operatorname{Ker} AB = \{\vec{0}\}$

$\vec{v} \in \operatorname{Ker} AB \iff AB\vec{v} = \vec{0} \iff B\vec{v} \in \operatorname{Ker} A$

Si A inversible alors $B\vec{v} \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow B\vec{v} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v} \in \operatorname{Ker} B$

Si B est inversible alors $B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Donc AB admet un unique inverse $(AB)^{-1}$

$$AB(AB)^{-1} = I \Rightarrow A^{-1}AB(AB)^{-1} = A^{-1} = B(AB)^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1}A^{-1} = B^{-1}B(AB)^{-1} = (AB)^{-1} \quad *$$

<u>Attention</u> : Bien prendre garde au fait que la multiplication est <u>non commutative</u> $\Rightarrow$ il n'est pas équivalent de multiplier à droite ou à gauche.

iii) $\boxed{{}^T(A^{-1}) = ({}^TA)^{-1}}$

* $AA^{-1} = I \Rightarrow {}^TI = {}^T(AA^{-1}) = {}^T(A^{-1})\,{}^TA = I$

$= ({}^TA)^{-1}\,{}^TA$

l'inverse étant unique ${}^T(A^{-1}) = ({}^TA)^{-1}$ *

4. d) Exemples :

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \neq 0$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$

Matrice orthogonale : $A^T A = I$ $\quad ({}^T A = A^{-1})$

Ex rotation : d'angle θ $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ${}^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta \, ; & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \, ; & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

autre façon : A^{-1} est la rotation d'angle $-\theta \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Involution $\quad A^2 = I$

Ex : $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{2}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $AA^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ etc.

Pour des matrices 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = -d \\ a^2 + bc = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a^2 = 1 = d^2 \\ b = c = 0 . \end{cases}$$

5) Changement de base :

5.a) Transformation de coordonnées :

Soit $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$ une base de E. Tout vecteur $\vec{v} \in E$ s'exprime, de façon unique, dans cette base, sous la forme

$$\boxed{\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i}$$

Soit maintenant $\{\vec{e}^{\,*}_k\}_{k=1..n}$ une autre base de E. Chaque vecteur $\vec{e}^{\,*}_k \in E$ est donc décomposable dans la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$ sous la forme :

$$\boxed{\vec{e}^{\,*}_k = \sum_{i=1}^{n} P^i_k \vec{e}_i}$$

où les coefficients P^i_k de la décomposition sont uniques (i.e. s'il existe une autre décomposition $\vec{e}^{\,*}_k = \sum_{i=1}^{n} P'^i_k \vec{e}_i$ alors $P'^i_k = P^i_k \ \forall i, k$).

Par ailleurs, cette relation définit une application linéaire $\mathcal{S} : E \to E$, dont la matrice exprimée dans la base $\{\vec{e}_i\}$ (base de départ et base d'arrivée) est P. En effet, $\sum_{i=1}^{n} P^i_k \vec{e}_i$ est l'image du vecteur $\vec{e}_k$ par l'application $\mathcal{S}$, exprimée dans la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$.

On a donc $\boxed{\vec{e}^{\,*}_k = \mathcal{S}(\vec{e}_k)}$

La matrice P est donc composée de colonnes, dont la k-ième est formée des composantes du "nouveau" vecteur de base $\vec{e}_k^{\,*}$, exprimé dans l'"ancienne" base $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$

$$E,\ \{\vec{e}_k\}_{k=1..n} \xrightarrow{\ \mathcal{S}\ } E,\ \{\vec{e}_k^{\,*}\}_{k=1..n}$$

$$\vec{e}_k \longmapsto \vec{e}_k^{\,*} = \mathcal{S}(\vec{e}_k)$$

Exemple

$$\vec{e}_1^{\,*} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \mathcal{S}(\vec{e}_1)$$
$$\vec{e}_2^{\,*} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \mathcal{S}(\vec{e}_2) \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_3^{\,*} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \mathcal{S}(\vec{e}_3)$$

Remarque fondamentale:

Il faut prendre garde que toute matrice carrée ne définit pas un changement de base. En effet, pour que l'endomorphisme $\mathcal{S}$ définisse un changement de coordonnées il faut et il suffit que l'image de la base $\{\vec{e}_i\}$ soit une nouvelle base $\{\vec{e}_k^{\,*}\}$, donc que tout vecteur $\vec{v} \in E$ ait une et une seule image, donc que $\mathcal{S}$ soit bijective (donc injective et surjective)

En terme matriciel, cela est équivalent à $\boxed{\det P \neq 0.}$

Par exemple, supposons que $\mathcal{S}$ est non surjective, alors $\mathcal{S}(E) \neq E$ donc tout vecteur de E n'est pas exprimable comme combinaison linéaire des $\vec{e}_k^{\,*}$, qui ne constituent donc pas une base.

De même si $\mathcal{S}$ non injective, $\operatorname{Ker} \mathcal{S} \neq \{\vec{0}\}$. En ce cas, $\vec{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{S} \Rightarrow$
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i \text{ et } \mathcal{S}(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v^i \mathcal{S}(\vec{e}_i) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i^{\,*} = \vec{0}$$

Dans ce cas les $\{\vec{e}_i\}$ sont linéairement dépendants, ...
construire une base.

Transformation d'un vecteur :

Soit $\vec{v} \in E$. Dans "l'ancienne base" $\vec{v}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} v^i \vec{e}_i}$$

tandis que dans la "nouvelle base" $\boxed{\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} v^{*k} \vec{e}_k}$

Soit $$\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} v^{*k} \sum_{i=1}^{m} P^i_k \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} P^i_k v^{*k} \right) \vec{e}_i$$

La dernière expression est la décomposition du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\vec{e}_i$.
Cette décomposition étant unique, on en tire :

$$\boxed{v^i = \sum_{k=1}^{m} P^i_k v^{*k}} \qquad i = 1..m$$

Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :

$$\boxed{v = P \cdot v^*}$$

où v, v^* sont des matrices colonnes représentant $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{e}_i\}$ (resp. $\{\vec{e}^{\,*}_k\}$)

<u>Remarque importante</u> : On voit donc que

- P exprime les <u>nouveaux</u> vecteurs en fonction des <u>anciens</u>

<u>mais</u> - les <u>anciennes</u> composantes en fonction des <u>nouvelles</u>.

Exemple :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \qquad \text{base } \{\vec{e}_i\}_{i=1..3}$$

$$\vec{v}^* = v^{1*}\vec{e}_1^{\,*} + v^{2*}\vec{e}_2^{\,*} + v^{3*}\vec{e}_3^{\,*}$$

$$\begin{aligned} &= v^{1*}(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ &+ v^{2*}(3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \\ &+ v^{3*}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) \end{aligned} = \left\{ \begin{aligned} &(2v^{1*} + 3v^{2*} + v^{3*})\vec{e}_1 \\ &(3v^{1*} - v^{2*} + 2v^{3*})\vec{e}_2 \\ &(v^{1*} + 2v^{2*} - 2v^{3*})\vec{e}_3 \end{aligned} \right.$$

Par identification :

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1*} \\ v^{2*} \\ v^{3*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On est donc amené à résoudre le système $Pv^* = v$.
Comme P est inversible il y a une unique solution $v^* = P^{-1}v$

$$P^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 8 & -5 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 8 & -5 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v^{1*} \\ v^{2*} \\ v^{3*} \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 8 & -5 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 35 \\ -5 \\ -28 \end{bmatrix}$$

<u>Remarque :</u>

Les relations $\vec{e}_k^{\,*} = S(\vec{e}_k)$; $v = P v^*$ peuvent paraître incompatibles. En fait, on déduit la seconde de la première, mais on peut également retrouver la première à partir de la seconde.

Dans la base $\{\vec{e}_k^{\,*}\}_{k=1..n}$, le vecteur $\vec{e}_k^{\,*}$ s'écrit, sous forme de composantes, comme la matrice colonne
$$v^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k.$$

$$P v^* = \begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_k^1 & \cdots & p_m^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1^k & \cdots & p_k^k & \cdots & p_m^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1^m & \cdots & p_k^m & \cdots & p_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k^1 \\ \vdots \\ p_k^k \\ \vdots \\ p_k^m \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est la k-ième colonne de la matrice P, donc le vecteur $S(\vec{e}_k)$ exprimé dans la base $\{\vec{e}_k\}$. C'est également, par définition, $\vec{e}_k^{\,*}$ exprimé dans la base $\vec{e}_k$. Le point important est donc que dans la relation $\vec{e}_k^{\,*} = S(\vec{e}_k)$ le <u>nouveau</u> vecteur est exprimé dans l'<u>ancienne</u> base.

<u>Def:</u> On dit que les composantes d'un vecteur sont <u>contravariantes</u>, car si $\{\vec{e}_i\}$ subit la transformation P, les composantes sont transformées par P^{-1}.

<u>Résumé</u> :

1) Ecrire les "nouveaux" vecteurs de base $\{\vec{e}_k^{\,*}\}$ en fonction des "anciens" $\{\vec{e}_k\}$

2) Ranger les composantes des $\{\vec{e}_k^{\,*}\}$ sous forme de matrices colonnes dans une matrice P. En vertu de la relation

$$\boxed{\vec{e}_k^{\,*} = \mathcal{S}(\vec{e}_k)}$$

la k-ième colonne exprime le "nouveau" vecteur $\vec{e}_k^{\,*}$, dans l'ancienne base $\{\vec{e}_k\}$.

3) Les relations contravariantes entre la matrice colonne v exprimant $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{e}_k\}$ et la matrice colonne exprimant le même vecteur dans la base $\{\vec{e}_k^{\,*}\}$ sont:

$$\boxed{v = P\, v^*} \Longleftrightarrow \boxed{v^* = P^{-1} v}$$

5b) <u>Transformation d'un endomorphisme</u> :

Soit $\mathcal{A} : E, \{\vec{e}_i\}_{i=1-n} \longrightarrow E, \{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$

de matrice A. Tout vecteur $\vec{x}$, a pour représentant dans la base E la matrice colonne X se transformant par selon la relation:

$$y^i = (A.X)^i = \sum_{k=1}^{n} A^i_k X^k$$ où $Y = (y^i)_{i=1..n}$ est la matrice colonne représentant $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ dans la base $\{\vec{e}_i\}$.

$$\Leftrightarrow \boxed{Y = A.X}$$

Soit $\mathcal{S}$ un changement de base $\{\vec{e}_i\} \to \{\vec{e}_i^{\,*}\}$, de matrice P. Soient Y^*, X^*, A^* les matrices exprimant $\vec{y}$, $\vec{x}$, $\mathcal{A}$ dans la nouvelle base, où $Y^* = A^*.X^*$

On a $\quad X = PX^*, \quad Y = PY^*$

$$P\cancel{Y}^* = A P X^*$$

contravariant

$$\Rightarrow \quad Y^* = P^{-1} A P X^*$$

d'où $\boxed{A^* = P^{-1} A P}$ ou $\boxed{A^{*i}_{j} = \sum_{k,l=1}^{n} (P^{-1})^{i}_{k} A^{k}_{l} P^{l}_{i}}$

covariant

Cette formule peut-être résumée par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] & Y \\ X^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A^*"'] & Y^* \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$$Y^* = P^{-1} Y = P^{-1} A . X = P^{-1} A P X^* = A^* X^*$$

<u>Def</u>: 2 matrices A, B, satisfaisant à $B = P^{-1}AP$ où P est une matrice régulière sont dites semblables. On voit qu'elles représentent en fait le même endomorphisme $\mathcal{A}$. Donc en étudiant les propriétés de $\mathcal{A}$, on étudie en même temps les propriétés matricielles communes à la classe entière des matrices semblables.

<u>Prop</u>:

i) Si $A \sim B$ alors $A^n \sim B^n$

* $B = P^{-1}AP$; $B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$, etc... *

ii) $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$

iii) Si f est un polynôme de matrice, $A \sim B \Rightarrow f(A) \sim f(B)$.

5c) Transformation d'une application linéaire quelconque

Soit maintenant : $\mathcal{M} : E, \{\vec{e}_j\}_{j=1..n} \to F, \{\vec{f}_i\}_{i=1..m}$

de matrice M dans ces bases. Soit $\mathcal{S}_E : \{\vec{e}_j\} \to \{\vec{e}_j^{\,*}\}$

cgt de base sur E, et $\mathcal{S}_F : \{\vec{f}_i\} \to \{\vec{f}_i^{\,*}\}$, cgt de base

sur F. Soient P_E, P_F les matrices associées.

En termes matriciels on a :

$$Y = MX \quad ; \quad Y = P_F Y^* \; ; \; X = P_E X^*$$

$$Y^* = M^* X^*$$

$$P_F Y^* = M P_E X^* \quad \Rightarrow \quad Y^* = P_F^{-1} M P_E X^*$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M^* = P_F^{-1} M P_E}$$

Rq : Ici M est une matrice $\underline{m \times n}$, P_F une matrice $\underline{m \times m}$ et P_E une matrice $\underline{n \times n}$.

Déf : Soient M, M^* matrices $m \times n$. Ces deux matrices sont dites équivalentes si il existe une matrice P inversible, $m \times m$ et une matrice Q, inversible, $n \times n$ telles que :

$$\boxed{M^* = P M Q}$$

pas les mêmes et les mécanismes de production des spikes pour les deux architectures ne sont pas équivalents.

Dans une manière générale, les résultats obtenus avec l'architecture évennementielle ne sont pas très satisfasaints comme ceux obtenues avec l'architecture analogique. Celui-là ne peut pas être interpreté comme que l'utilisation des spikes n'apporte pas des nouveaux horizons, celui-là veut dire peut-être que notre interpretation du codage neuronal n'est pas appropiée ou que nos cartes de vitesses (motion maps) proposées comme réprésentations de l'information du mouvement d'entrée ne peuvent pas être consideré comme une bonne réprésentation.

▼

Á propos de l'architecture évennementielle, notre principale perspective est l'étude des ***statistiques plus supérieurs pour l'analyse de trains des spikes*** *generés par les neurones de MT. Il est probable que cet étude peut nous donner des nouvelles idées par rapport à l'analyse de la sortie de MT, c'est-à-dire, le contenu de mouvement dans les vidéos d'entrée.*

Encore des validations?

Bien sûr, plus de validations sont nécessaires! Nous avons essayé notre modèle avec la base de données de Weizmann. La bonne performance obtenue avec notre modèle, tant que pour l'architecture analogique comme pour l'architecture évennementielle, reinforce notre hypothèse de la bonne réprésentation de nos motion maps.

La base de données de Weizmann a été aussi utilisé par Blank et al. (2005) et Jhuang et al. (2007) pour valider ses approches. Cependant, les conditions de tests et le protocol d'expérimentation ne sont pas les mêmes que ceux considerés dans nos expériences, et pourtant les résultats pour la reconnaissance ne peuvent pas être comparés d'une manière facile.

À partir de nos résultats, nous ne prétendons pas dire que notre modèle travail sur tous les conditions. Mais cette inquiétude est en realité générale comme Pinto et al. (2008) a bien remarqué: L'affirmation de déclarer que le problème global de la reconnaissance d'actions est résolu à partir des résultat obtenus pour une seule base de données est irréelle. Plus des validations, avec bases de données différentes, comme par example KTH[4], sont complètement necessaires.

▼

En plus de faire plus de validations, nous avons aussi pensé à deux autres perspectives additionelles. La première perspective est l'étude de comment l'information provenant de la ***forme*** *peut être ajouté à notre modèle d'une*

[4] `http://www.nada.kth.se/cvap/actions/`

Diagonalisation

1) Valeurs propres - Vecteurs propres

Une application linéaire $\mathcal{A}$ peut avoir, selon la base dans laquelle on l'exprime, une matrice plus ou moins complexe.

Dans ce chapitre, on s'intéressera uniquement aux endomorphismes décrits donc par une matrice carrée $n \times n$. La structure la plus simple que puisse avoir une matrice carrée est la structure diagonale.

Le pb que l'on se pose alors est : Etant donnée une application linéaire $\mathcal{A}$, de matrice A dans une base $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$ est-il possible de trouver un changement de base $\mathcal{S}$ permettant d'exprimer $\mathcal{A}$ par une matrice diagonale, i.e. ~~existe~~-t'il P, matrice de passage t.q.

$$\Lambda = P^{-1} A P$$

où Λ est diagonale.

La réponse est NON en général.

On voit cependant que si $\mathcal{A}$ est diagonalisable cela signifie que l'on peut trouver $\underline{\underline{n}}$ vecteurs $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ tels que :

$$\mathcal{A}(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$$

En effet, dans la base $\{\vec{v}_i\}_{i=1..n}$ $\mathcal{A}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Def : On appelle *valeur propre* de $\mathcal{A}$, tout ~~nombre réel~~ scalaire λ, t.q. :

$$\boxed{\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}} \qquad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

$\vec{v}$ est alors appelé *vecteur propre* associé à la *valeur propre* λ.

Rq : Pour $\vec{v} = \vec{0}$ l'équation $\mathcal{A}(\vec{0}) = \lambda \vec{0}$ est trivialement satisfaite $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

calcul des valeurs propres

Pour trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $\mathcal{A}$, considérons $\{\vec{e}_i\}_{i=1 \dots n}$ base arbitraire de E dans laquelle $\mathcal{A}$ a pour matrice A et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i$ a pour matrice colonne v.

On a alors à résoudre.

$$A v = \lambda v$$

Soit I la matrice identité $(n \times n)$. $\lambda v = \lambda I v \Rightarrow$

$$A v = \lambda v \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda I) v = 0}$$

Cela signifie que $\vec{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Comme $\vec{v} \neq \vec{0}$ cette équation est satisfaite ssi $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) \neq \{\vec{0}\}$ donc ssi $\mathcal{A} - \lambda I$ est *singulière* (non inversible).

En terme matriciels cette condition est équivalente à :

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Soit
$$\begin{vmatrix} a^1_1-\lambda & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2-\lambda & & a^2_n \\ \vdots & & & \\ a^n_1 & \cdots & & a^n_n-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

le calcul de ce déterminant conduit à un polynôme $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$, de degré n, appelé <u>polynôme caractéristique</u>. Les racines de ce polynôme sont les valeurs propres de $\mathcal{A}$.

<u>Rq</u> : Le polynôme caractéristique est en effet invariant par changement de base.
Soient A, A^* 2 matrices semblables, $A^* = P^{-1}AP$. On a

$$A^* - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I P$$
$$= P^{-1}(A-\lambda I)P$$

$$\det(A^* - \lambda I) = \det P^{-1} \det(A-\lambda I) \det P = \det(A-\lambda I)$$

$\rightarrow$ Le polynôme caractéristique est ~~bien~~ une grandeur intrinsèque de l'application $\mathcal{A}$ (non lié à la base dans laquelle on exprime $\mathcal{A}$).

<u>Vecteurs propres</u> :

Une fois calculés les valeurs propres λ (ce qui n'est pas toujours trivial, surtout si $n \geq 3$) on en déduit les vecteurs propres associés en résolvant l'équation

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

En termes matriciels, cela revient à résoudre le système :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} A^i_j \, v^j = \lambda v^i} \qquad \text{ou } Av = \lambda v$$

Ex 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

valeurs propres

$$P(\lambda) = (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (4-\lambda)^2 = 4 \quad \Rightarrow 4 - \lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 6$$

calcul de $\vec{v}_1$: $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\quad A v_1 = \lambda v_1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4y_1 = 2x_1 \\ x_1 + 4y_1 = 2y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4y_1 = 0 \\ x_1 + 2y_1 = 0 \end{cases}$$

On a donc 2 fois la même équation soit $y_1 = -\dfrac{x_1}{2}$

→ Engendre une droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Vecteur engendrant le noyau de $A - 2I$)

Vérification

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rq : tout vecteur $k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ est vecteur propre. En particulier $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normé !

Ces exemples nous montrent :

- Qu'une valeur propre peut être racine simple ou multiple de $P(\lambda)$ (multiplicité algébrique m_a)
- Si sa multiplicité est $m_a(\lambda) > 1$, elle peut avoir m_a vecteurs propres, au moins.

On va montrer le :

Th: Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_k$ sont vecteurs propres de A, associés à une même valeur propre λ, le vecteur $\mu_1 \vec{v}_1 + \ldots + \mu_k \vec{v}_k$ est soit le vecteur nul, soit un vecteur propre de A correspondant au même λ.

* $A\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_2$ ... $A\vec{v}_k = \lambda \vec{v}_k$

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} \mu^i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu^i A(\vec{v}_i) = \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu^i \vec{v}_i$$

donc si les $\vec{v}_i$ sont lin. dépendants et si les μ^i sont les coef. de la combinaison linéaire ce vecteur est nul, autrement c'est un vecteur propre. *

Donc

Th: Les vecteurs propres linéairement indépendants associés au même λ forment une base d'un sous-espace vectoriel, appelé sous espace propre E_λ associé à λ (tous les vecteurs de cet espace sont vecteurs propres).

On appelle multiplicité géométrique $m_g(\lambda) = \dim E_\lambda$

En général (cf Ex 3) $\boxed{m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$

Ces exemples nous montrent :

- Qu'une valeur propre peut être racine simple ou multiple de $P(\lambda)$ (multiplicité algébrique m_a)
- Si sa multiplicité est $m_a(\lambda) > 1$, elle peut avoir m_a vecteurs propres, au moins.

On va montrer le :

<u>Th</u>: Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_k$ sont vecteurs propres de A, associés à une même valeur propre λ, le vecteur $\mu_1 \vec{v}_1 + \ldots + \mu_k \vec{v}_k$ est soit le vecteur nul, soit un vecteur propre de A correspondant au même λ.

* $A\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_2$ $\ldots$ $A\vec{v}_k = \lambda \vec{v}_k$

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} \mu^i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu^i A(\vec{v}_i) = \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu^i \vec{v}_i$$

donc si les $\vec{v}_i$ sont lin. dépendants et si les μ^i sont les coef. de la combinaison linéaire ce vecteur est nul, autrement c'est un vecteur propre. *

Donc

<u>Th</u>: Les vecteurs propres linéairement indépendants associés au même λ forment une base d'un sous-espace vectoriel, appelé sous espace propre E_λ associé à λ (tous les vecteurs de cet espace sont vecteurs propres).

On appelle multiplicité géométrique $m_g(\lambda) = \dim E_\lambda$

En général (cf Ex 3) $\boxed{m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$

2) Matrices diagonalisables :

Prop : Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont linéairement indépendants.

$*$ $\mathcal{A}(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i \neq \vec{0} \qquad \lambda_i \neq \lambda_k, \quad i \neq k, \quad i, k = 1..m$

Soit $\{\mu^i\}_{i=1..m}$ t.q. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mu^i \vec{v}_i = \vec{0}$.

En appliquant $\mathcal{A} - \lambda_1 I$ sur ce vecteur on a

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{m} \mu^i \vec{v}_i\right) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \mu^i \vec{v}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \mu^i (\lambda_i - \lambda_1)\, \vec{v}_i = \vec{0} = \sum_{i=2}^{m} \mu^i (\lambda_i - \lambda_1)\, \vec{v}_i$$

En appliquant $\mathcal{A} - \lambda_2 I$ sur ce vecteur on a :

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=2}^{m} \mu^i (\lambda_i - \lambda_1)\, \vec{v}_i\right) - \lambda_2 \sum_{i=2}^{m} \mu^i (\lambda_i - \lambda_1)\, \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{m} \mu^i (\lambda_i - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_1)\, \vec{v}_i = \vec{0}$$

$$= \sum_{i=3}^{m} \mu^i (\lambda_i - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_1)\, \vec{v}_i = \vec{0}$$

etc... $\Rightarrow \mu^m (\lambda_m - \lambda_{m-1})(\lambda_m - \lambda_{m-2}) \cdots (\lambda_m - \lambda_1)\, \vec{v}_m = \vec{0}$

$$\Rightarrow \mu^m = 0$$

en recommençant on trouve que tous les μ^i sont nuls $*$

Donc, si $P(\lambda)$ possède n racines distinctes, les vecteurs propres associés $\{\vec{v}^i\}_{i=1..n}$ sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de E.

Dans cette nouvelle base, $\mathcal{A}$ s'écrit sous forme diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & & & 0 \\ & \lambda^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Dans cette base, l'effet de $\mathcal{A}$ ~~dans~~ la direction $\vec{v}_i$ est donc simplement une dilatation (contraction) dans cette direction, d'un facteur λ^i.
(rotation)

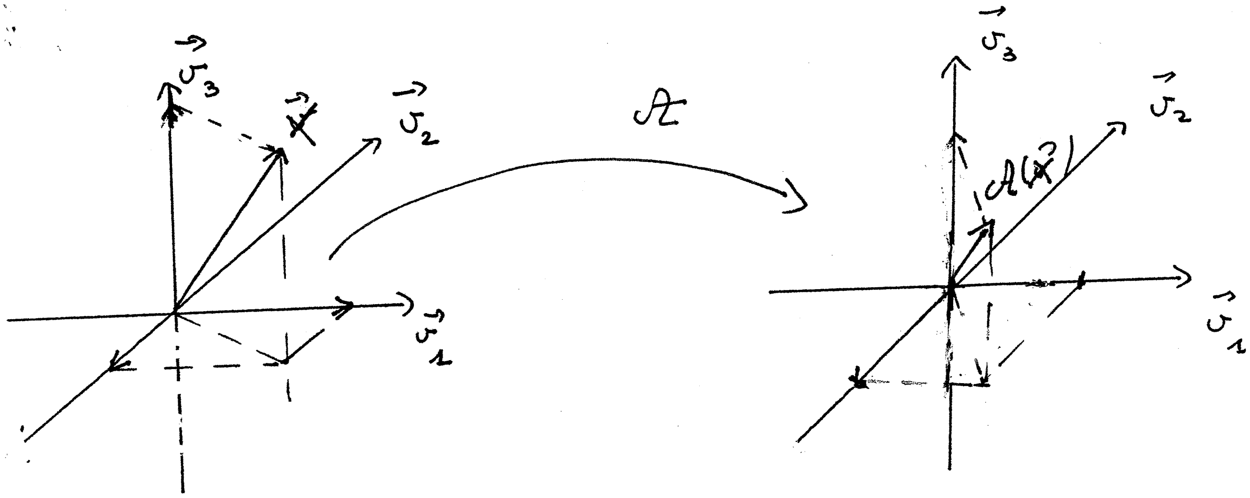
Plus généralement, soit $\cancel{\vec{X}} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{v}_i$

$$\mathcal{A}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \vec{v}_i$$

$\rightarrow$ chaque direction propre $\vec{v}_i$ est dilatée d'un facteur λ_i.

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ dans la base $\vec{v}_i$



Rq : On a vu que si les valeurs propres étaient distinctes (de multiplicité 1) il y avait n vecteurs propres linéairement indépendants constituant une base dans laquelle $\mathcal{A}$ est diagonale. Cette condition n'est cependant pas nécessaire, il existe en effet des applications diagonalisables admettant des valeurs propres de multiplicité > 1 (Voir exercices).

Changement de base

Si A est exprimée dans une base arbitraire $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$, la recherche des vecteurs propres $\{\vec{v}_i\}_{i=1..n}$ conduit à exprimer ceux-ci dans la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$. Cela définit donc un changement de coordonnées $\mathcal{S} : \vec{e}_i \longrightarrow \vec{v}_i$ dont la matrice P a pour colonnes les vecteurs $\vec{v}_i$ exprimés dans la base $\{\vec{e}_i\}$. L'application $\mathcal{A}$ étant diagonalisable est exprimée par une matrice Λ diagonale dans la base $\{\vec{v}_i\}$. En vertu de la règle de transformation d'une matrice par un changement de coordonnées on a :

$$\boxed{\Lambda = P^{-1} A P}$$

On rappelle le diagramme de transformation ; où X, Y sont les matrices colonnes d'un vecteur $\vec{x}$, $\vec{y}$ exprimés ds la base $\{\vec{e}_i\}$, X^*, Y^* les matrices colonnes des mêmes vecteurs dans la base $\{\vec{v}_i\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] & Y \\ X^* \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\Lambda"] & Y^* \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$$Y^* = \Lambda X^*$$

$$Y^* = P^{-1} Y = P^{-1} A X = P^{-1} A P X^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda = P^{-1} A P}$$

Ex 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \ ; \ \lambda_2 = 5$$

vecteurs propres :

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0 \\ x_1 + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -x_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x_2 - 2y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \dfrac{x_2}{2} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad PP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

__Ex 2__ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 + 2 - 6 + 3\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4)$$
$$= (\lambda - 1)^2(-\lambda + 4)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \quad ; \quad \lambda_3 = 4$

__λ_1__ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$

$\Rightarrow$ 3 variables 1 equations → liberté sur le choix de 2.

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pas orthogonaux

mais $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ le sont.

<u>vérif</u> :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x = y = z$

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ vérif : $\begin{pmatrix} +2 & 1 & 1 \\ 1 & +2 & 1 \\ 1 & 1 & +2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Com}\,P = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 1 \\ -2 & 1 & +1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b.) Cas général:

Ce cas est traité plus en détails en appendice. On a vu que, dans le cas général, certaines valeurs propres sont multiples (i.e. sont racines multiples du polynôme caractéristique). De manière générale, on montre alors qu'on peut ramener la matrice A, dans une forme canonique dite de Jordan. C'est une matrice par bloc, chaque bloc étant associé à une valeur propre donnée.

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & B_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & B_k \end{pmatrix}$$

Les éléments extra diagonaux sont nuls. Les blocs sont de la forme:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x & & 0 \\ & \lambda_1 & x & \\ \vdots & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

où λ_1 est la première valeur propre. Tous les éléments différents de x sont nuls. Les x peuvent être des 1 ou des 0. Par exemple

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & & \lambda_1 & 0 & \\ & & & \lambda_1 & 0 \\ & 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Le bloc B_1 correspond à un sous espace de dimension m_1 (multiplicité algébrique de λ_1), invariant par l'action de A, et engendré par des vecteurs de la forme

$$\text{type 1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \text{ou} \quad \text{type 2}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow k-1 \\ \leftarrow k \end{matrix}$$

i.e. les vecteurs colonnes du bloc B_1.

On voit alors que les vecteurs type 1 satisfont à :

$$B_1 \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_i$$

et sont donc <u>vecteurs propres</u> de B_1 (resp. de A).

Les vecteurs type 2 sont solution de :

$$B_1 \vec{v}_k = \lambda_1 \vec{v}_k + \vec{v}_{k-1}$$

et ne sont pas vecteurs propres. Ils sont appelés vecteurs caractéristiques et complètent la base du sous espace propre associé à B_1 lorsque il y a moins de vecteurs propres que de valeurs propres.

Ex :

$$\begin{array}{c|ccccc} & A(\vec{v}_1) & A(\vec{v}_2) & A(\vec{v}_3) & A(\vec{v}_4) & A(\vec{v}_5) \\ \hline \vec{v}_1 & \lambda_1 & 1 & & & \\ \vec{v}_2 & & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ \vec{v}_3 & & & \lambda_1 & 0 & \\ \vec{v}_4 & & & & \lambda_1 & \\ \vec{v}_5 & & 0 & & & \lambda_1 \end{array}$$

$A(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$

$A(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \lambda_1 \vec{v}_2$

$A(\vec{v}_3) = \vec{v}_2 + \lambda_1 \vec{v}_3$

$A(\vec{v}_4) = \lambda_1 \vec{v}_4$

$A(\vec{v}_5) = \lambda_1 \vec{v}_5$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ forment une <u>chaîne</u> de Jordan.

9) Propriétés :

On appelle Trace de A ($Tr(A)$) la somme des éléments diagonaux

i.e. $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_i^i$

1) Pour une matrice 2×2 le polynôme caractéristique est :

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\,\lambda + \det A}$$

c.a.d.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i = Tr(A) \; ; \; \prod_{i=1}^{2} \lambda_i = \det A}$$

$*$ $\det \begin{pmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda \end{pmatrix} = (A_1^1 - \lambda)(A_2^2 - \lambda) - A_1^2 A_2^1$

$= \lambda^2 - \lambda (A_1^1 + A_2^2) + A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1 = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A$ $*$

2) Les valeurs propres d'une matrice réelle sont réelles ou complexes conjuguées.

$*$ Sur $\mathbb{R}$, $P(\lambda)$ est décomposable sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \cdots (\lambda^2 - s_1 \lambda + P_1) - (\lambda^2 - s_r \lambda + P_r)$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in \mathbb{R}$, $P_i \in \mathbb{R}$, ces coefficients étant donnés par le determinant d'une matrice réelle.

Les racines des facteurs $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ sont donc réelles.

Les polynomes élémentaires $(\lambda^2 - s_i \lambda + p_i)$ sont des polynômes n'admettant pas de racine dans $\mathbb{R}$ (sinon on pourrait les factoriser).

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les racines de $\lambda^2 - s\lambda + p$.

$\lambda_1 = a + ib$; $\lambda_2 = c + id$

$\lambda_1 + \lambda_2 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+c) + i(b+d) \in \mathbb{R} \Rightarrow b = -d$

$\lambda_1 \lambda_2 = p \in \mathbb{R} \Rightarrow (ac - bd) + i(ad + bc) \in \mathbb{R} \Rightarrow ad + bc = 0$

$\Rightarrow a = c$

donc $\lambda_1^* = \lambda_2$ *

3) Les valeurs propres d'une matrice <u>réelle</u>, <u>symétique</u>, sont <u>réelles</u> (et les vecteurs propres sont orthogonaux * ...ic).

associés à des v.p différentes

* (admis)

Ex avec une matrice 2×2 $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

$$\Rightarrow \Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2$$

$$= (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ v.p. réelles.

<u>Corollaire</u> : Une matrice symétique réelle est <u>diagonalisable</u>.

* Les vecteurs propres correspondant à une même v.p. peuvent être choisis

<u>1</u>.

orthogonalité

On définit le produit scalaire usuel $(u,v) = \sum u^i v^i = \tilde{u} v$

Soit u_i, t.q. $A u_i = \lambda_i u_i$; v_j tq $A v_j = \lambda_j v_j$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$

On a :

$(v_j, A u_i) = \tilde{v}_j A u_i = \lambda_i (\tilde{v}_j u_i = \lambda_i (v_j, u_i)$

$(u_i, A v_j) = \tilde{u}_i A v_j = \lambda_j \tilde{u}_i v_j = \lambda_j (u_i, v_j) = \lambda_j (v_j, u_i)$

Donc $\widetilde{\tilde{u}_i A v_j} = \tilde{v}_j \tilde{A} u_i = \tilde{v}_j A u_i = \lambda_i (v_j, u_i)$ car A est symétrique

$\Rightarrow \lambda_i (v_j, u_i) = \lambda_j (v_j, u_i)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow (v_j, u_i) = 0$ *

4) Les valeurs propres d'une matrice réelle, antisymétrique, sont imaginaires pures.

* (admis). Rq : $A^T = -A \Rightarrow A^i_i = -A^i_i = 0 \Rightarrow$ les éléments diagonaux sont nuls. En 2 d_i on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + b^2 \Rightarrow \lambda = \pm i b$ *

5) Soit une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & \\ & & & \boxed{B} & & & \\ & & & & \lambda_m & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors les λ_i sont valeurs propres de A ($i = 1..k, m..n$) et les autres valeurs propres sont valeurs propres de B $\Rightarrow$ il suffit juste de calculer les valeurs propres de B. Les vecteurs propres associés aux λ_i sont les vecteurs de la base canonique $\Rightarrow$ il suffit seulement de calculer ceux de B

* $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_k) \det(B - \lambda I)(\lambda - \lambda_m) \dots (\lambda - \lambda_n)$

en développant le déterminant selon les λ_i et en utilisant $\det B.C = \det B \det C$. *

Par ailleurs, $A(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$ $\quad i = 1..k$, $i = m..n$

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \det \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

On a déjà calculé les valeurs propres de la matrice restante (ex 1)

donc : $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = 6$

$\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres d'une matrice de rotation

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{avec}}} \quad a^2+b^2 = 1$$

<u>valeurs propres</u>

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 = (\lambda - a)^2 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - a)^2 = -b^2 \Rightarrow \lambda - a = \pm ib$$

$$\lambda = a \pm ib$$

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \quad ; \quad \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

<u>vecteurs propres</u>

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = a+ib \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -ib & b \\ -b & -ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} by_1 = ibx_1 \\ -bx_1 = iby_1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = ix_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} ib & b \\ b & ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -ix_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

<u>diagonalisation</u>

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = ({}^tP)^*$$

AP

$$\Lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+ib & a-ib \\ -b+ia & -b-ia \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(a+ib) & 0 \\ 0 & 2(a-ib) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

Appendice :

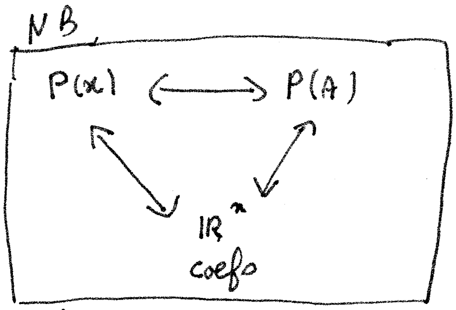
On a vu au chapitre III que $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ l'espace des matrices carrées muni des lois $+$, $\cdot$ est un anneau unitaire. Sur cet anneau la puissance d'une matrice a un sens, (ainsi que la multiplication par un scalaire et l'addition de matrices). Cela signifie que l'on peut définir des polynômes de matrices, comme on définit des polynômes de nombres.

Soit $P(x)$ un polynôme de $\mathbb{R}$, $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$

on définit le prolongement matriciel de ce polynôme à $\mathcal{M}_n$ par :

$$P(A) = p_n A^n + p_{n-1} A^{n-1} + \dots + p_0$$

où $A \in \mathcal{M}_n$ est une matrice quelconque.



Ex : $p(\lambda) = x^2 + x + 1 \longrightarrow P(A) = A^2 + A + I$

En particulier on peut définir sur $\mathcal{M}_n$, comme sur $\mathbb{R}$ la factorisation de polynômes, la division etc..

Ex : Montrer que $A^2 - I = (A - I)(A + I)$

$*$ $(A - I)(A + I) = A^2 - I.A + A.I - I$

I commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n$ $\Rightarrow$ $IA = AI$ $*$

On a vu que les valeurs propres de A étaient racines du polynôme caractéristique $\mathcal{S}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Soit $\mathcal{S}(A)$ le prolongement matriciel de ce polynôme, on a le très important théorème (admis) dû à Hamilton-Cayley :

Th: Soit $\delta(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A, alors

$\delta(A) = 0$, i.e. toute matrice carrée satisfait son équation caractéristique.

Supposons que $K = \mathbb{C}$ i.e. que nos matrices soient à coefficients complexes.
Alors l'équation $\delta(\lambda) = 0$ se factorise sous la forme

$$\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda^1)^{m_1} (\lambda - \lambda^2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda^k)^{m_k} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

où les λ^k sont les valeurs propres de A, de multiplicité m_k.

En termes de prolongement matriciel, cela signifie que :

$$\delta(A) = (A - \lambda^1 I)^{m_1} (A - \lambda^2 I)^{m_2} \cdots (A - \lambda^k I)^{m_k} = 0$$

par Hamilton - Cayley

L'équation $\delta(A) = 0 \iff \delta(A)\vec{v} = \vec{0} \quad \forall v \in E$.

ou encore $(A - \lambda^1 I)^{m_1} (A - \lambda^2 I)^{m_2} \cdots (A - \lambda^k I)^{m_k} \vec{v} = \vec{0}$

On montre alors qu'il existe une famille de vecteurs $\{\{\vec{v}_1^1 \cdots \vec{v}_1^{m_1}\}, \cdots, \{\vec{v}_k^1 \cdots \vec{v}_k^{m_k}\}\}$ constituant une base de E (donc lin. indép), t.q.

$$(A - \lambda^j I)^{m_j} \vec{v}_j^i = 0 \quad , \quad j = 1 \ldots k;\ i = 1 \ldots m_j$$

i.e. les vecteurs $\{\vec{v}_j^1 \cdots \vec{v}_j^{m_j}\}$ constituent le noyau de la matrice $(A - \lambda^j I)^{m_j}$, facteur du polynôme $\delta(A)$ associé à la valeur propre λ^j.

Par ailleurs, on montre qu'il existe une base dans laquelle A s'écrit sous forme de blocs $A^{(1)} \dots A^{(k)}$, diagonaux, le bloc j ayant polynôme caractéristique $(A^{(j)} - \lambda^j I)^{m_j}$

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & \\ & A^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{(k)} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant un bloc, par exemple $A^{(1)}$. Les vecteurs $\vec{v}_1^{\,i}$, $i = 1 \dots m_1$ engendrent le noyau de $(A^{(1)} - \lambda^1 I)^{m_1}$ i.e. sont tous solutions de :

$$(A^{(1)} - \lambda^1 I)^{m_1} \vec{v}_1^{\,i} = \vec{0} = (A^{(1)} - \lambda^1 I)^{m_1 - 1} (A^{(1)} - \lambda^1 I) \vec{v}_1^{\,i}$$

$$= (A^{(1)} - \lambda^1 I)^{m_1 - 2} (A^{(1)} - \lambda^1 I)^2 \vec{v}_1^{\,i} = \dots = \vec{0}$$

On voit alors que ces vecteurs peuvent être générés de la façon suivante :

$$(A^{(1)} - \lambda^1 I) \vec{v}_1^{\,1} = \vec{0} \Rightarrow A^{(1)} \vec{v}_1^{\,1} = \lambda^1 \vec{v}_1^{\,1}$$

$$\vec{v}_1^{\,1} = (A^{(1)} - \lambda^1 I) \vec{v}_1^{\,2} \Rightarrow A^{(1)} \vec{v}_1^{\,2} = \vec{v}_1^{\,1} + \lambda^1 \vec{v}_1^{\,2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_1^{\,m-1} = (A^{(1)} - \lambda^1 I) \vec{v}_1^{\,m}$$

Ch VI. — Formes linéaires, bilinéaires, quadratiques

1) Formes linéaires :

Déf: On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de

$f : E \longrightarrow K$, t.q :

$$(i) \quad f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$
$$(ii) \quad f(\lambda \vec{a}) = \lambda f(\vec{a}) \qquad \lambda \in K.$$

On a
$$f(\vec{x}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(\vec{e}_i) \quad , \quad \forall \vec{x} \in E$$

en particulier

Espace dual : Soit E^* l'ensemble des formes linéaires sur E muni des propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f = g \iff f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad , \quad \forall \vec{x} \in E \\ (f+g) = f+g \iff (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \\ (\lambda f) = \lambda f \iff (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda . f(\vec{x}) \end{cases}$$

On voit alors aisément que E^* possède une structure d'espace vectoriel, c'est le <u>dual</u> de E.

Base duale : Considérons les formes linéaires e^i telles que :

$$e^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

les $\{e^i\}_{i=1..n}$ forment une base de E^*, la base duale, i.e. toute forme linéaire sur E^* est décomposable de manière unique sur la base $\{e^i\}_{i=1..n}$

En effet, tout d'abord :

$$e^i(\vec{x}) = e^i\left(\sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x^j e^i(\vec{e}_j) = x^i$$

Donc, $e^i(\vec{x}) = x^i$ $e^i \to$ donne la i-ème composante du vecteur $\vec{a}$.

Par ailleurs,

$$f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(\vec{e}_i).$$

On pose $f_i = \underbrace{f(\vec{e}_i)}_{\text{nombre}} \Rightarrow f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i e^i(\vec{x}), \forall \vec{x}$

Donc, tout f se décompose sous forme de combinaison linéaire des e^i avec

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} f_i e^i}$$

où les f_i sont les composantes de f relativement à la famille $\{e^i\}_{i=1..n}$ de E_n^*

Enfin, les e^i sont linéairement indépendants. En effet :

$$\lambda e^i + \mu e^j = 0 \qquad i \neq j$$

$$\Rightarrow \lambda e^i(\vec{x}) + \mu e^j(\vec{x}) = 0 \qquad \forall \vec{x} \in E$$

$$\Rightarrow \lambda x^i + \mu x^j = 0 \qquad \forall x^i, x^j$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc, les e^i constituent une base de E^* et toute forme linéaire f se décompose de manière unique dans cette base sous la forme ci-dessus.

Changement de base :

Soit $\vec{e}^{\,*}_k = \mathcal{P}(\vec{e}_k)$, où $\mathcal{P}$ est le changement de base

Quel transformation a-t-on sur le dual, et sur les e^i ?

On a $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x^{*i} \vec{e}^{\,*}_i$

Par ailleurs $x^i = e^i(\vec{x})$ et par analogie $x^{*i} = e^{*i}(\vec{x})$

où les e^{*i} correspondent à la nouvelle base sur le dual.

On a :

$$x^i = \sum_{k=1}^{n} P^i_k \, x^{*k}$$

$$\Rightarrow e^i(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} P^i_k \, e^{*k}(\vec{x})$$

Donc $$\boxed{\underbrace{e^i}_{\text{ancienne base}} = \sum_{k=1}^{n} P^i_k \underbrace{e^{*k}}_{\text{nouvelle base.}}}$$

Les vecteurs de base du dual sont donc contravariants

Par ailleurs, $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e^i = \sum_{k=1}^{n} f^*_k e^{*k}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\sum_{k=1}^{n} P^i_k e^{*k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} P^i_k f_i \right) e^{*k}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^*_k = \sum_{k=1}^{n} P^i_k f_i} \rightarrow \text{composantes covariantes.}$$

Représentation matricielle:

$$(f_1^* \cdots f_n^*) = (f_1 \cdots f_n) \begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_n^1 \\ \vdots & & \\ p_1^n & \cdots & p_n^n \end{pmatrix} = (f_1 \cdots f_n) \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$$

p^i : $i$ème ligne de la matrice P.

Par ailleurs,

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i x^i \Leftrightarrow f(\vec{x}) = (f_1 \cdots f_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

2) Formes bilinéaires:

Def : On appelle forme bilinéaire une application $F : E \times E \to K$ ayant les propriétés suivantes:

(i) $F(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{y}) = \alpha F(\vec{u}, \vec{y}) + \beta F(\vec{v}, \vec{y})$ linéarité par rapport à la première variable.

(ii) $F(\vec{x}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha F(\vec{x}, \vec{u}) + \beta F(\vec{x}, \vec{v})$ linéarité par rapport à la seconde variable.

Soit $\{\vec{e}_i\}_{i=1..n}$ base de E, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i$; $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y^j \vec{e}_j$

On a alors : $$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j F(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

On pose alors : $$F(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = F_{ij}$$

$$\boxed{F(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}\, x^i y^j}$$

<u>Exemple</u> :

$$F(\vec{x},\vec{y}) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 2x^1y^3 - x^2y^1 + 5x^2y^2 + 4x^2y^3 - 3x^3y^1 + 7x^3y^2.$$

<u>changement de base</u> :

$$F(\vec{x},\vec{y}) = F(\vec{x}^*,\vec{y}^*)$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}\, x^i y^j = \sum_{k,\ell=1}^{n} F^*_{k\ell}\, x^{*k} y^{*\ell}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} F_{ij} \sum_{k=1}^{n} P^i_k x^{*k} \sum_{\ell=1}^{n} P^j_\ell y^{*\ell}$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} P^i_k P^j_\ell F_{ij} \right) x^{*k} y^{*\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{F^*_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} P^i_k P^j_\ell F_{ij}}$$

2 fois covariant.

<u>Représentation matricielle</u>:

On peut ranger les F_{ij} dans une matrice F, où le 1er indice est l'indice de ligne et le second l'indice de colonne. Cette matrice diffère de celle d'une application linéaire en ce qu'elle est <u>2 fois covariante</u> (alors que celle d'une application linéaire est 1 fois <u>covariante</u> et une fois <u>contravariante</u>). La forme bilinéaire s'écrit alors sous la forme :

$${}^T x\, F\, y.$$

et le changement de variable : $x = Px^*$, $y = Py^*$ donne

$$\boxed{F^* = {}^T P F P}$$

donc cette transformation n'est pas diagonalisable en général

Ex :

Pb : matrice ligne, mais indices en haut.

$$F(\vec{x},\vec{y}) = (x^{1}\ x^{2}\ x^{3}) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

$$= (x^1\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} y^1 + 3y^2 + 2y^3 \\ -y^1 + 5y^2 + 4y^3 \\ -3y^1 + 7y^3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x^1y^1 + 3x^1y^2 + 2x^1y^3 \\ -x^2y^1 + 5x^2y^2 + 4x^2y^3 \\ -3x^3y^1 + 7x^3y^3 \end{cases}$$

3) Forme linéaire symétrique

Une forme bilinéaire est dite symétrique si $F(\vec{x},\vec{y}) = F(\vec{y},\vec{x})$.

Cela entraine que $F_{ij} = F_{ji}$ i.e. que la matrice F est symétrique.

On a vu au IV que si la matrice est symétrique (réelle) ses valeurs propres sont réelles, et ~~elle~~ elle est diagonalisable (dans une base orthogonale).

→ Elle admet donc, dans cette base, une représentation simplifiée, du type : $\boxed{F(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i y^i}$

Ex :
$$(X^1, X^2, X^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} = (X^1, X^2, X^3) \begin{pmatrix} Y^1 \\ -Y^2 \\ 2Y^3 \end{pmatrix}$$

$$= X^1Y^1 - X^2Y^2 + 2X^3Y^3$$

Prop : La matrice de changement de base, O, est une matrice orthogonale i.e. elle satisfait à :

$$\boxed{{}^{T}O\,O = I \iff O^{-1} = O^{T}}$$

Matrice orthogonale.

Soit A une matrice. Celle-ci peut s'écrire :

$$A = (A^1 - - A^n) = \left(\begin{bmatrix} A_1^1 \\ | \\ A_1^n \end{bmatrix} - - \begin{bmatrix} A_n^1 \\ | \\ A_n^n \end{bmatrix} \right)$$

où les colonnes $A^1 - - - A^n$ sont les composantes de vecteurs $\vec{v}_1 - - \vec{v}_n$ exprimés dans une certaine base.

L'opération de transposition transforme ces colonnes en lignes,

donc ${}^TA$ peut s'écrire :

$$ {}^TA = \begin{pmatrix} A^1 \\ \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^1 - - A_1^n} \\ \\ \boxed{A_n^1 - - - A_n^n} \end{pmatrix}$$

et les vecteurs $\vec{v}_1 - - \vec{v}_n$ sont maintenant représentés sous forme de lignes.

Le produit matriciel ${}^TA . A$ correspond à multiplier les lignes de de ${}^TA$ par les colonnes de A. Donc, le coefficient ij du produit, multiplication de la $i$ème ligne de ${}^TA$ par la $j$ième colonne de A n'est autre que le produit scalaire (usuel) de $\vec{v}_i$ par $\vec{v}_j$.

Si ces vecteurs sont orthonormés alors $(\vec{v}_i . \vec{v}_j) = \delta_{ij}$ et donc

${}^TAA = I$.

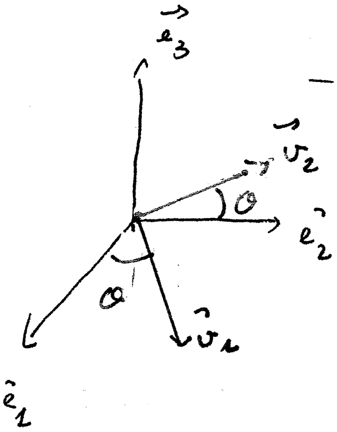
Réciproquement si ${}^TAA = I$ les vecteurs représentés par les colonnes de A forment un système orthonormé.

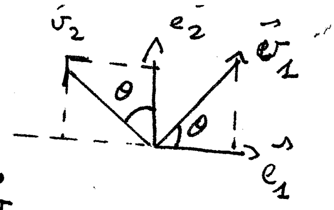
On comprend donc l'appellation matrice orthogonale.

Ex :

Matrice de rotation

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





$\vec{v}_1 = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2$

$\vec{v}_2 = -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2$

$\vec{v}_3 = \vec{e}_3$

$${}^T O' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^T O\, O = \begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Prop :

Une transformation orthogonale préserve le produit scalaire (donc la métrique).

* Soient X, Y matrices colonnes représentant les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ dans une base donnée.

$(\vec{x}, \vec{y}) \to {}^T X . Y$

Soit A une transformation orthogonale, $X' = A.X$, $Y' = AY$.

On a $${}^T X' . Y' = {}^T X\, \underbrace{{}^T A A}_{I}\, Y = {}^T X\, Y$$

Rq : c'est en fait la définition d'une transformation orthogonale.

Ex

$$\begin{array}{c} \text{ligne} \quad \text{colonne} \\ F(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2 - x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^3y^3 \end{array}$$

$$(x^1 \ x^2 \ x^3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (x^1 x^2 x^3)\begin{pmatrix} 2y^1 - y^2 \\ -y^1 + 2y^2 - y^3 \\ -y^2 + 2y^3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2 - x^2y^3 - x^3y^2 + 2x^3y^3$$

Valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 2\right] = (2-\lambda)\left[(2-\lambda-\sqrt{2})(2-\lambda+\sqrt{2})\right]$$

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$; $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$

Vecteurs propres

$\lambda_1 = 2$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -v_1^2 = 0 \\ -v_1^1 - v_1^3 = 0 \\ -v_1^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ou $\underbrace{\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{normé}}$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$ $\begin{pmatrix} +\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & +\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & +\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} +\sqrt{2}\,v_2^1 - v_2^2 = 0 \\ -v_2^1 + \sqrt{2}\,v_2^2 - v_2^3 = 0 \\ -v_2^2 + \sqrt{2}\,v_2^3 = 0 \end{cases}$

(1) $v_2^2 = +\sqrt{2}\; v_2^1$

(3) $v_2^2 = \sqrt{2}\; v_2^3$

(2) $-v_2^1 + \sqrt{2}\, v_2^2 - v_2^3 = -v_2^1 + 2v_2^1 - v_2^3 = 0 \Rightarrow v_2^3 = v_2^1$

$$\vec{v}_2 = k\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}}_{\text{normé}} \; ; \; \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\ -2+2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}+2\end{pmatrix}$$

$$= (2-\sqrt{2})\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 2+\sqrt{2}}$:

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & -\sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_3^1\\ v_3^2\\ v_3^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-\sqrt{2}\, v_3^1 - v_3^2 = 0\\ -v_3^1 - \sqrt{2}\, v_3^2 - v_3^3 = 0\\ -v_3^2 - \sqrt{2}\, v_3^3 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}v_3^2 = -\sqrt{2}\; v_3^1\\ -v_3^1 + 2v_3^1 - v_3^3 = 0 \Rightarrow v_3^1 = v_3^3\\ v_3^2 = -\sqrt{2}\, v_3^3\end{cases}$$

$$\vec{v}_3 = k\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\ -2-2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}+2\end{pmatrix} = 2+\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Orthogonalité : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ +\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = 0$; $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = 0$; $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = 0$

Matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$${}^tP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix} \; ; \; {}^tP\,P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$ {}^{T}P\,P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{{}^{T}P = P^{-1}}} $$

<u>Diagonalisation</u> :

$$ \Lambda = P^{-1} A P = {}^{T}P\, A\, P $$

$$ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 0 & -2+2\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8-4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8+4\sqrt{2} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} $$

<u>Forme diagonale</u> :

Donc dans cette base, la forme bilinéaire symétrique F s'écrit :

$$ F(\vec{x},\vec{y}) = (X^1\ X^2\ X^3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} $$

$$ = 2X^1Y^1 + (2-\sqrt{2})X^2Y^2 + (2+\sqrt{2})X^3Y^3 $$

où X^i, Y^i sont les composantes de $\vec{x}, \vec{y}$ dans la nouvelle base.

Vérification directe :

On a $\underset{\text{anciennes}}{\underbrace{x}} = P\underset{\text{nouvelles}}{\underbrace{X}}$; $y = PY$

P_t

donc

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}X^1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3 \\ x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X^3 \\ x^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}X^1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{cases} y^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}Y^1 + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Y^3 \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}Y^3 \\ y^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}Y^1 + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Y^3 \end{cases}$$

On injecte ce changement de variable dans F :

$$F(\vec{x},\vec{y}) = x^1(2y^1 - y^2) + x^2(-y^1 + 2y^2 - y^3) + x^3(-y^2 + 2y^3)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X^1 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{2}\right)\left(\sqrt{2}Y^1 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)Y^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)Y^3\right)$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X^3\right)\left(0\,Y^1 + (-1+\sqrt{2})Y^2 + (-1-\sqrt{2})Y^3\right)$$

$$+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}X^1 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{2}\right)\left(-\sqrt{2}Y^1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2}Y^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)Y^3\right)$$

$$= X^1Y^1\left(\overbrace{1+1}^{2}\right) + X^1Y^2\left(\overbrace{\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}^{0}\right) + X^1Y^3\left(\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}^{0}\right)$$

$$X^2Y^2\left(\overbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}}^{2-\sqrt{2}}\right) + X^2Y^1\left(\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\right) + X^2Y^3\left(\overbrace{\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4}}^{0}\right)$$

$$+ X^3Y^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + X^3Y^2\left(\underbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4}}_{0}\right) + X^3Y^3\left(\underbrace{\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4}}_{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{F(\vec{x},\vec{y}) = 2X^1Y^1 + (2-\sqrt{2})X^2Y^2 + (2+\sqrt{2})X^3Y^3}$$

Forme définie positive :

Une forme bilinéaire F est dite définie positive si :

(i) $F(x,x) \geq 0$

$F(x,x) = 0 \iff x = 0$

Produit scalaire (sur IR)

Soit E un espace vectoriel dont les vecteurs sont réels ($E \sim IR^n$).

Le produit scalaire sur cet espace est une forme bilinéaire symétrique, définie (positive), i.e.

$$\langle\,,\,\rangle : E \times E \longrightarrow IR$$

(i) $\langle \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{w}\rangle + \mu\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$

$\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}\rangle = \lambda(\vec{u},\vec{v}) + \mu(\vec{u},\vec{w})$

(ii) $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})$

(iii) $\left((\vec{u},\vec{u}) \geq 0\right) \longrightarrow$ cette condition peut être oubliée (ex : métrique de Minkowsky)

$(\vec{u},\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Matrice du produit scalaire :

Soient $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y^j \vec{e}_j$

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i y^j (\vec{e}_i,\vec{e}_j)$$

On pose : $g_{ij} = (\vec{e}_i,\vec{e}_j)$

et le produit scalaire de 2 vecteurs s'écrit, dans cette base : $\boxed{(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i g_{ij} y^j}$

cette matrice est dite matrice métrique. C'est en effet elle qui donne la longueur d'un vecteur dans la base choisie. On rappelle en effet que la longueur (norme euclidienne) d'un vecteur est : $\boxed{\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x},\vec{x}) = \sum_i g_{ii}\, x^{i2}.}$

En particulier, la positivité du produit scalaire entraîne que $g_{ii} \geq 0 \ \forall i$.
Par ailleurs, cette forme étant symétrique la matrice G est symétrique i.e

$$\boxed{G = {}^TG}$$

Représentation matricielle :

Par analogie avec ce qui précède on peut écrire le produit scalaire $(\vec{x},\vec{y})$, dans la base $\{\vec{e}_i\}$ sous la forme

$$(\vec{x},\vec{y}) = {}^Tx\, G\, y$$

avec $g_{ij} = (\vec{e}_i,\vec{e}_j)$

Système orthonormé :

Un système de vecteurs $\{\vec{e}_i\}$ est dit orthonormé si $(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \delta_{ij}$.

Prop : Des vecteurs orthogonaux sont linéairement indépendants.

$*\ \lambda\vec{e}_i + \mu\vec{e}_j = \vec{0}\ ;\ (\lambda\vec{e}_i+\mu\vec{e}_j, \lambda\vec{e}_i+\mu\vec{e}_j) = \lambda^2(\vec{e}_i,\vec{e}_i) + \lambda\mu(\vec{e}_i,\vec{e}_j) + \mu\lambda(\vec{e}_j,\vec{e}_i) + \mu^2(\vec{e}_j,\vec{e}_j)$
$= \lambda^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow \lambda, \mu = 0\ *$

Dans une base orthonormé la matrice H est donc la matrice unité et le produit scalaire est simplement :

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i H_{ij}\, y^j = \sum_{i,j=1}^{n} x^i \delta_{ij}\, y^j = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

Sous forme matricielle : $\boxed{(\vec{x},\vec{y}) = {}^Tx . y} = (x^1 - x^n)\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$

4) Formes sesquilinéaires hermitiques

Si l'on travaille sur le corps des complexes, il est préférable d'utiliser une extension des notions précédentes.

Def : On appelle forme sesquilinéaire une application :

$$F : E_{(\mathbb{C})} \times E_{(\mathbb{C})} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.q.}$$

(i) $F(\vec{x}, \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda F(\vec{x},\vec{u}) + \mu F(\vec{x},\vec{v})$ — linéarité par rapport à la seconde variable

(ii) $F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{v}) = \bar{\lambda} F(\vec{x},\vec{v}) + \bar{\mu} F(\vec{y},\vec{v})$ — antilinéarité par rapport à la variable.

où "—" signifie le complexe conjugué.

Def : On appelle forme hermitique une forme sesquilinéaire t.q.

$$F(\vec{x},\vec{y}) = \overline{F}(\vec{y},\vec{x})$$

Ex :

$$F(\vec{x},\vec{y}) = 2\cdot\bar{x}^1 y^1 - \bar{x}^2 y^2$$

$$F(\lambda\vec{x},\vec{y}) = 2\,(\overline{\lambda x^1})y^1 - \overline{\lambda x^2}\,y^2 = 2\,\bar{\lambda}\bar{x}^1 y^1 - \bar{\lambda}\bar{x}^2 y^2 = \bar{\lambda} F(x^1,y^1)$$

$$F(\vec{x},\lambda\vec{y}) = 2\,x^1(\lambda y^1) - x^2(\lambda y^2) = \lambda\, 2\, x^1 y^1 - \lambda x^2 y^2 = \lambda F(x^1,y^1)$$

$$F(\vec{x},\vec{u}+\vec{v}) = 2\,\bar{x}^1(u^1+v^1) - \bar{x}^2(u^2+v^2) = F(\vec{x},\vec{u}) + F(\vec{x},\vec{v})$$

$$F(\vec{y},\vec{x}) = 2\,\bar{y}^1 x^1 - \bar{y}^2 x^2 = \overline{2\, y^1\bar{x}^1 - y^2\bar{x}^2} = \overline{F(\vec{x},\vec{y})}$$

Produit scalaire $\mathbb{C}$:

Le produit scalaire est une forme sesquilinéaire, hermitique, définie positive.

Donc :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e_i} \quad , \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y^j \vec{e_j} \quad \Rightarrow$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x^i}\, y^j\, (\vec{e_i}, \vec{e_j})$$

En posant $H_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j})$ on définit l'analogue de la matrice G de la section précédente.

On voit alors que $H_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \overline{(\vec{e_j}, \vec{e_i})} = \overline{H_{ji}}$

donc $\boxed{H = \overline{{}^T H} = H^+}$

Une telle matrice est dite <u>hermitique</u>. La notation $+$ désigne l'adjoint de H.

En particulier, dans une base orthogonale $H_{ij} = \delta_{ij}$ et le produit scalaire s'écrit :

$$\boxed{(\vec{x} . \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x^i}\, y^i}$$

La norme euclidienne d'un vecteur est alors :

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x^i}\, x^i = \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2$$

Il s'agit bien d'un nombre réel, ce qui justifie la définition du produit scalaire comme forme sesquilinéaire.

<u>Rq</u> : Dans le cas où les vecteurs sont réels, la définition ci-dessus redonne le produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

Représentation matricielle d'une forme hermitique sesquilinéaire

Une forme sesquilinéaire - hermitique, s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\boxed{F(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i H_{ij} y^j} \quad \text{ou} \quad \boxed{F(\vec{x},\vec{y}) = {}^T x \; H \; y}$$

où H est une matrice hermitique.

<u>Prop:</u> Les valeurs propres d'une matrice hermitique sont réelles et les vecteurs propres sont orthogonaux. Elle est donc diagonalisable, sous forme d'une matrice diagonale réelle. Par ailleurs, la transformation U qui diagonalise est unitaire i.e.

$$\boxed{U U^{+} = U\,{}^T\overline{U} = I}$$

<u>Rq:</u> La notion de matrice unitaire généralise la notion de matrice orthogonale définie plus haut.

<u>Donc :</u> Une forme hermitique, sesquilinéaire est représentée, dans une certaine base par une matrice diagonale, réelle.

Ex : $F(\vec{x},\vec{y}) = x^1y^1 + i x^1 y^2 - i x^2 y^1 + x^2y^2 + i x^2 y^3 - i x^3 y^2 + x^3 y^3$

$$(x^1\, x^2\, x^3)\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 1 & i\\ 0 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\ y^2\\ y^3\end{pmatrix} = (x^1\, x^2\, x^3)\begin{pmatrix}y^1 + i y^2\\ -i y^1 + y^2 + i y^3\\ -i y^2 + y^3\end{pmatrix}$$

$$= x^1y^1 + i x^1 y^2 - i x^2 y^1 + x^2 y^2 + i x^2 y^3 - i x^3 y^2 + x^3 y^3$$

Valeurs propres

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & i & 0\\ -i & 1-\lambda & i\\ 0 & -i & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 2\right]$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda-\sqrt{2})(1-\lambda+\sqrt{2})$$

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$; $\lambda_3 = 1+\sqrt{2}$

Vecteurs propres:

$\lambda_1 = 1$ $\quad\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 0 & i\\ 0 & -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^1\\ v_1^2\\ v_1^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i v_1^2 = 0\\ -i v_1^1 + i v_1^2 = 0\\ -i v_1^2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_1^2 = 0\\ v_1^1 = v_1^3\end{matrix}$

$\vec{v}_1 = k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; Normalisation : $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 1 & i\\ 0 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$

$\begin{pmatrix}+\sqrt{2} & i & 0\\ -i & +\sqrt{2} & i\\ 0 & -i & +\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_2^1\\ v_2^2\\ v_2^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2}\, v_2^1 + i v_2^2 = 0\\ -i v_2^1 + \sqrt{2}\, v_2^2 + i v_2^3 = 0\\ -i v_2^2 + \sqrt{2}\, v_2^3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2^2 = i\sqrt{2}\, v_2^1\\ -i v_2^1 + 2i v_2^1 + i v_2^3 = 0\\ v_2^2 = -i\sqrt{2}\, v_2^3\end{cases}$

$\Rightarrow v_2^1 = -v_2^3 \Rightarrow \vec{v}_2 = k\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$; Norme : $(1\;\; -i\sqrt{2}\;\; -1)\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix} = 1+2+1 = 4$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 1 & i\\ 0 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ -2i + i\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix} = 1-\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & i & 0 \\ -i & -\sqrt{2} & i \\ 0 & -i & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\, v_3^1 + i v_3^2 = 0 \\ -i v_3^1 - \sqrt{2}\, v_3^2 + i v_3^3 = 0 \\ -i v_3^2 - \sqrt{2}\, v_3^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3^2 = -i\sqrt{2}\, v_3^1 \\ -i v_3^1 + 2i v_3^1 + i v_3^3 = 0 \\ v_3^2 = i\sqrt{2}\, v_3^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_3^1 = -v_3^3 \Rightarrow \vec{v}_3 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; \text{ Norme: } (1 \;\; i\sqrt{2} \;\; -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -2i - i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = 1+\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalité:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 ; \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 ; \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Matrice de passage:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad P^+ = \overline{{}^T P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i\sqrt{2} & -1 \\ 1 & +i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$P P^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i\sqrt{2} & -1 \\ 1 & i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I.$$

$\Rightarrow P^+ = P^{-1} \rightarrow$ transformation unitaire.

Diagonalisation:

$$P^+ F P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i\sqrt{2} & -1 \\ 1 & i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i\sqrt{2} & -1 \\ 1 & i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 0 & -2i + i\sqrt{2} & -2i - i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Donc, sous forme réduite, la forme F s'écrit :

$$F(\vec{x},\vec{y}) = \cancel{X}^1\cancel{Y}^1 + (1-\sqrt{2})X^2Y^2 + (1+\sqrt{2})X^3Y^3$$

<u>Vérification directe :</u>

$$x = PX \;;\; y = PY \Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}X^1 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{2} \\ x^2 = \frac{i\sqrt{2}}{2}X^2 - \frac{i\sqrt{2}}{2}X^3 \\ x^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}X^1 - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}Y^1 + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{2} \\ y^2 = \frac{i\sqrt{2}}{2}Y^2 - \frac{i\sqrt{2}}{2}Y^3 \\ y^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}Y^1 - \frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{2} \end{cases}$$

$$F(\vec{x},\vec{y}) = x^1(y^1 + iy^2) + x^2(-iy^1 + y^2 + iy^3) + x^3(-iy^2 + y^3)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X^1 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}Y^1 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}Y^2 + \frac{1-i}{2}Y^3\right)$$

$$+ \left(\frac{i\sqrt{2}}{2}X^2 - \frac{i\sqrt{2}}{2}X^3\right)\left(0Y^1 + \frac{i(-2+\sqrt{2})}{2}Y^2 - \frac{i(2+\sqrt{2})}{2}Y^3\right)$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X^1 - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}Y^1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}Y^2 - \frac{(\sqrt{2}+1)}{2}Y^3\right)$$

$$= X^1Y^1\overbrace{\left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right)}^{1} + X^1Y^2\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right)}^{0} + X^1Y^3\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\right)}^{0}$$

$$+ X^2Y^1\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}^{0} + X^2Y^2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}(-2+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\right) + X^2Y^3\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right)$$

$$+ X^3Y^1\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}_{0} + X^3Y^2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-2+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}-1}{4}\right) + X^3Y^3\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right)$$

5) Formes quadratiques :

A toute forme bilinéaire symétrique $F(\vec{x}, \vec{y})$ on peut associer la forme quadratique :

$$\boxed{q(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{x})} \quad \text{ou} \quad \boxed{q(\vec{x}) = {}^T x\, F x}$$

en représentation matricielle dans une base donnée.

Ex :

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = (x^1\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = 2x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2 - x^2y^3 - x^3y^2 + x^3y^3$$

$$q(\vec{x}) = (x^1\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2(x^1)^2 - x^1x^2 - x^2x^1 + 2(x^2)^2 - x^2x^3 - x^3x^2 + (x^3)^2$$

$$= 2(x^1)^2 - 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 - 2x^2x^3 + (x^3)^2$$

Exemples physiques :

1) Energie cinétique d'une particule :

Soit $\vec{v}$ la vitesse d'une particule dans $\mathbb{R}^3$: $v = \begin{cases} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{cases}$, de masse m

l'énergie cinétique est :

$$E = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 = \frac{1}{2} m (v^1)^2 + \frac{m}{2} (v^2)^2 + \frac{m}{2} (v^3)^2$$

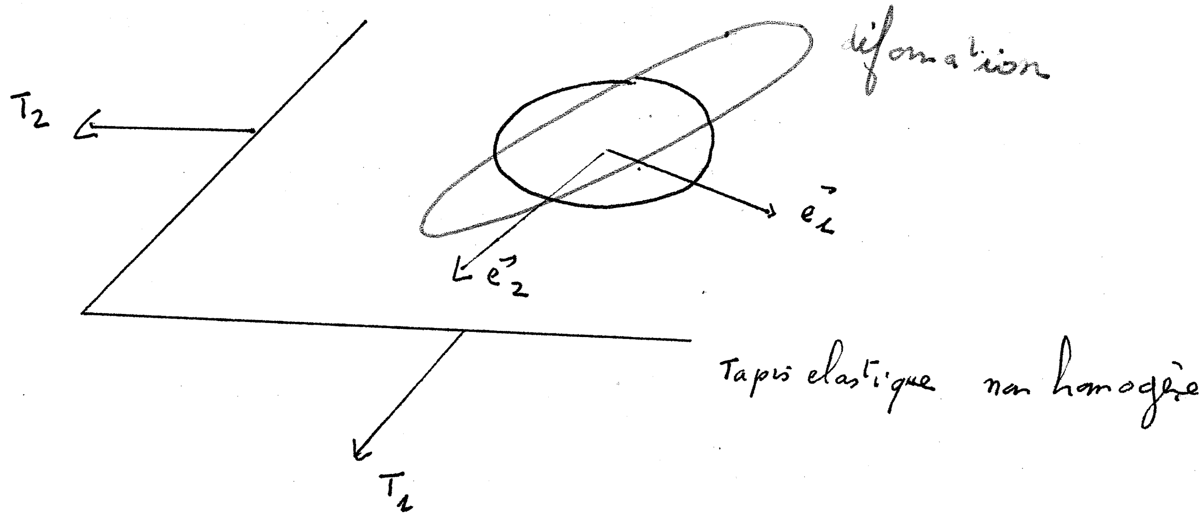
$$E = \frac{1}{2} m\, {}^T v\, I\, v$$

c'est donc une forme quadratique.

2) Energie potentielle d'un ressort :

$$E = \frac{1}{2} k \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right] = \frac{1}{2} k\, {}^T x\, I\, x$$

c) Energie potentielle d'un milieu élastique :

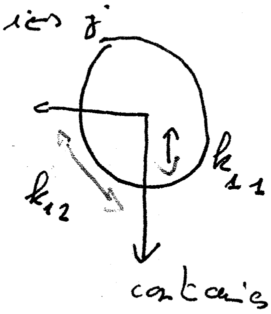


$\vec{T}$, tractions

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\, x^i x^j$$

k_{ii} : raideur de la direction i

k_{ij} : couplage i et j

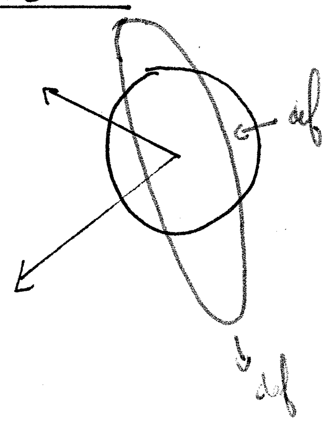


Rq : relation entre contraintes et déformations → (Hook)

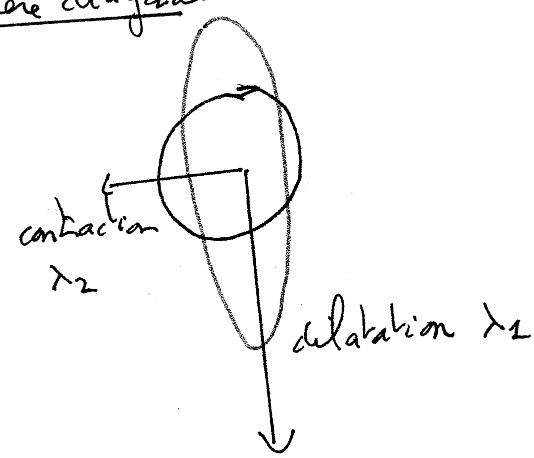
Rq : En physique $k_{ij} = k_{ji}$ (interactions symétriques)

Idée importante : Trouver un repère permettant de diagonaliser la forme

Repère initial



Repère diagonal



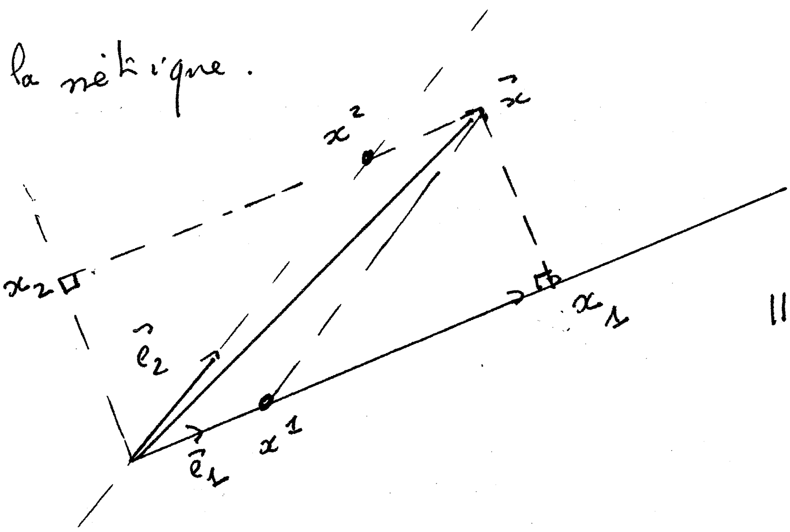
d) Longueur d'un vecteur :

On a vu, que la norme d'un vecteur est donnée par

$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} x^i g_{ij} x^j$$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = g_{11}$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = g_{12}$
$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = g_{21}$
$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = g_{22}$

où G est la métrique.



$$x_i = \sum_{j=1}^{2} g_{ij} x^j$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} g_{ij} x^j\right)$$

Rq: Pseudo-métrique de Minkowsky $E = \mathbb{R}^4$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{v}\|^2 = {}^T x\, G\, x = (x^1 x^2 x^3 x^4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \underbrace{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}_{\text{espace}} - \underbrace{(x^4)^2}_{\text{temps}}$$: quadrivecteur. ...

Forme quadratique définie positive

On appelle ainsi une forme quadratique $q(\vec{x})$ t.q.

i) $q(\vec{x}) \geqslant 0$

ii) $q(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

Ex : Energie cinétique, energie potentielle d'un ressort, distance euclidienne

contre exemple : pseudo distance de Minkowsky

Quadrique representative :

La forme quadratique $q(\vec{x})$ est l'équation d'une hyper surface dans $\mathbb{R}^n$ (on a 1 équation liant n inconnues → surface de codimension 1 donc de dimension $n-1$), par l'equation : $\boxed{q(\vec{x}) = k}$ Ex : surfaces d'énergie constante

(Si $\ker A = \{0\}$)

Cette quadrique est évidemment plus aisément representable dans le repère ~~des~~ orthogonal qui diagonalise la forme (symétrique).

Dans cette base, la forme quadratique s'écrit :

$$q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i)^2$$

où les λi sont les valeurs propres de la matrice associée.

Pour une déformation, les directions propres correspondent aux directions principales de déformation, et les valeurs propres à l'intensité de la déformation dans chaque direction principale.

En particulier, le signe des λ_i détermine le type de quadrique.
On appelle signature de la forme quadratique la différence entre le nb de valeurs propres positives et négatives.

Quadriques de dimension 2 :

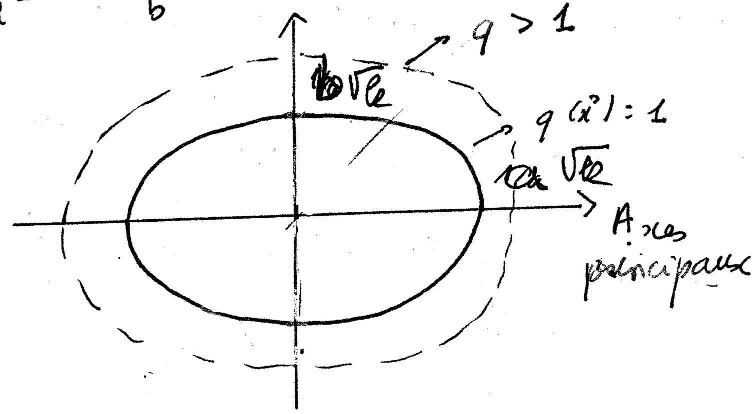
Signature 2 $(+,+)$

Dans la base diagonale, $\lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 = k$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$

On pose : $\lambda_1 = 1/a^2$
$\lambda_2 = 1/b^2$ $\Rightarrow \dfrac{(x^1)^2}{a^2} + \dfrac{(x^2)^2}{b^2} = k$

$\Rightarrow$ ellipse.

$\rightarrow$ En variant $q(\vec{x}) = k$
$\rightarrow$ ellipse concentriques.



Rq : Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ on a une sphère.

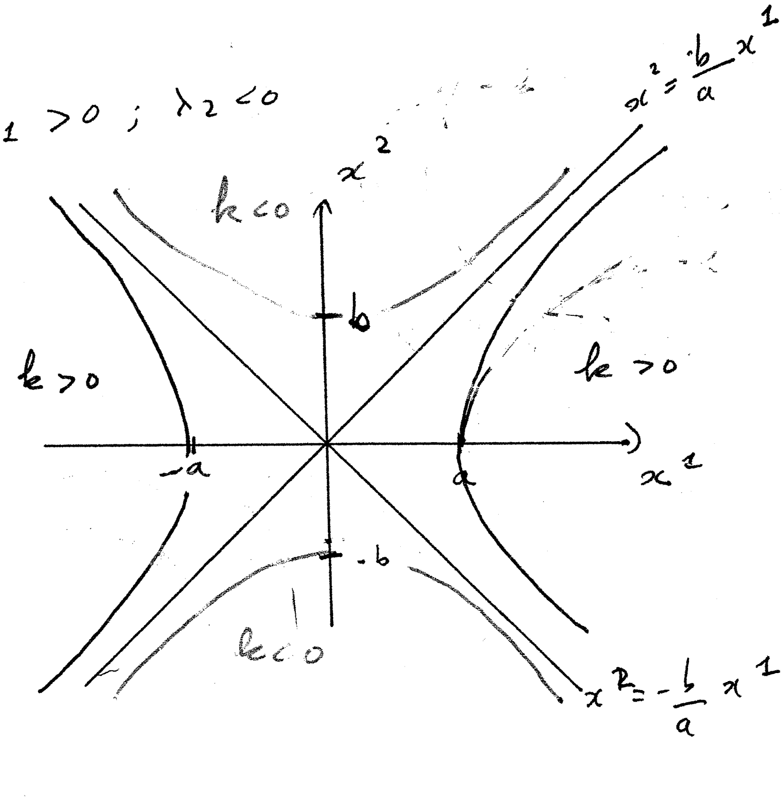
Signature 0 $(+,-)$ ou $(-,+)$

$\lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 = k$ $\quad \lambda_1 > 0 ; \lambda_2 < 0$

On pose : $\lambda_1 = 1/a^2 ; \quad \lambda_2 = \dfrac{-1}{b^2}$

$\Rightarrow \dfrac{(x^1)^2}{a^2} - \dfrac{(x^2)^2}{b^2} = k$

$\Rightarrow$ hyperbole.



Signature -2 $(-,-)$

Même cas que $(+,+)$ en posant $k<0$.

Cas de valeurs propres nulles.

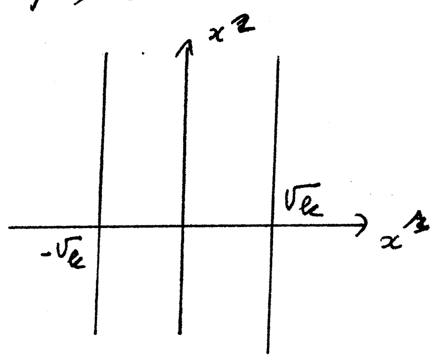
Si une ou plusieurs valeurs propres sont nulles ($\ker A \neq \{\vec{0}\}$) la ~~forme~~ quadrique s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i)^2 = k$$

avec certains des $\lambda_i = 0$ $\to$ dans ce cas, les variables x^i correspondantes sont libres.

Ex en 2 dimensions. $\lambda_2 = 0$ $\lambda_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad (x^1)^2 = k > 0 \to (x^1) = \pm\sqrt{k}, \quad x^2 \text{ q.c.q.}$$

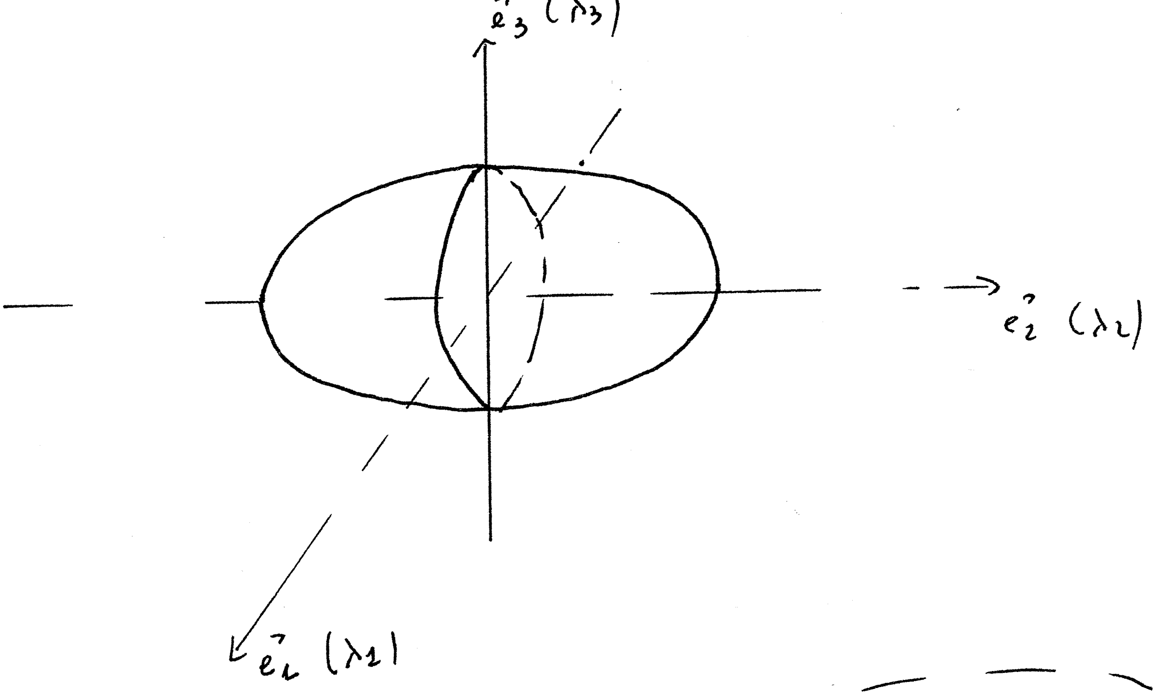


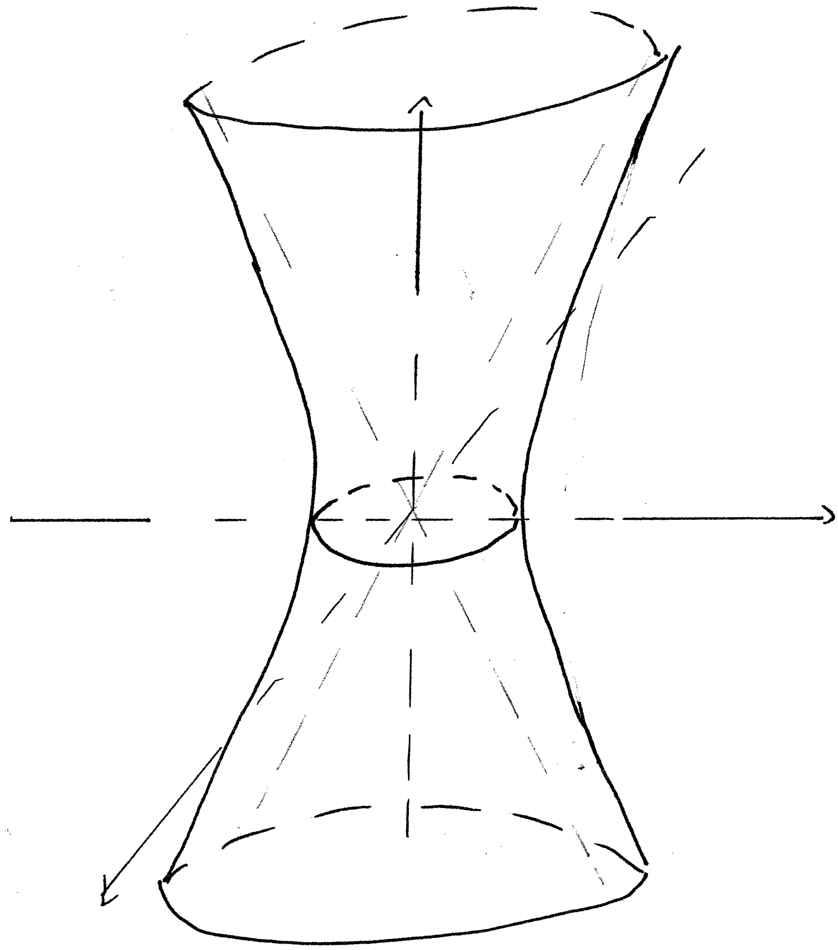
Quadriques de dimension 3

Signature $(+,+,+)$

$$q(x^i) = \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{c^2} = k$$

$\Rightarrow$ ellipsoïde.





<u>Signature $(+,+,-)$</u> $(k>0)$

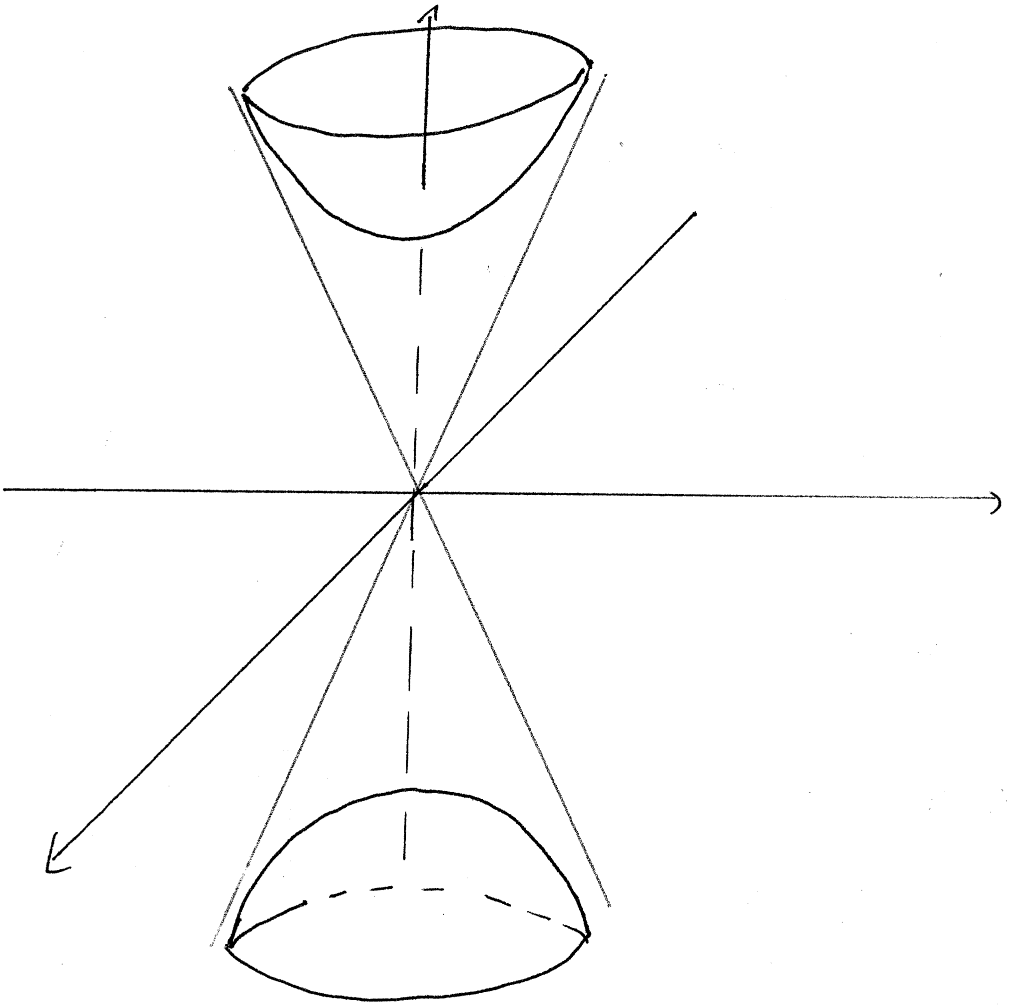
$$\underbrace{\underbrace{\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}}-\frac{(x^3)^2}{c^2}}_{\text{hyperbole}}=k$$

hyperboloïde à une nappe.

<u>Signature $(+,-,-)$</u> $(k \geq 0)$

$$\frac{(x^1)^2}{a^2}-\left(\frac{x^2}{b}\right)^2-\left(\frac{x^3}{c}\right)^2=k$$

hyperboloïde à 2 nappes (se déduit du précédent en faisant $k<0$ et permutant les axes)

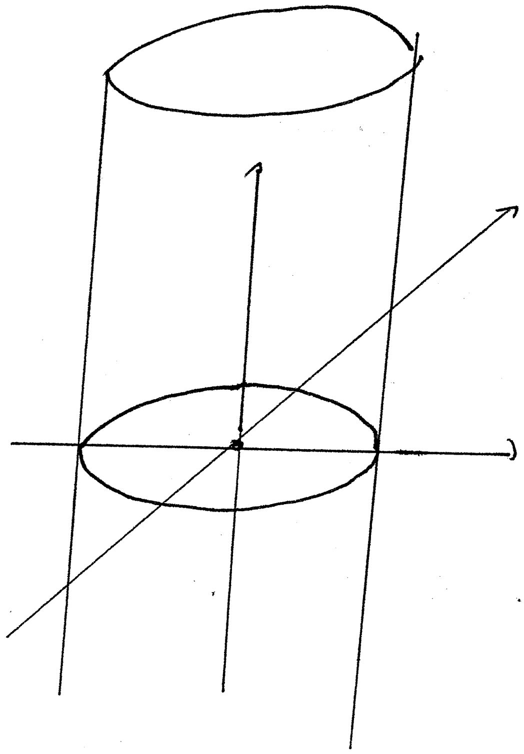


Signature (- - -)

Se déduit du +, +, + pour k < 0.

Cas d'une v.p nulle:

Ex $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\Longrightarrow$



I] Définitions

1) Exemples :

Vecteur : $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i$

→ représentation du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$: la matrice colonne $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$

Soit $S : \vec{e}\,'_i \to \vec{e}_i$ un changement de base : $\boxed{\underset{\text{nouveau}}{\vec{e}\,'_i} = \sum_{=1}^{n} P_i^j \underset{\text{ancien}}{\vec{e}_j} = S(\vec{e}_i)}$ covariant

v' composantes de $\vec{v}$ dans la nouvelle base, se transforme comme

$$\boxed{\underset{\text{"ancien"}}{v^i} = \sum_{j=1}^{n} P_j^i \underset{\text{"nouveau"}}{v'^j}} \quad \to \quad \text{contravariant.}$$

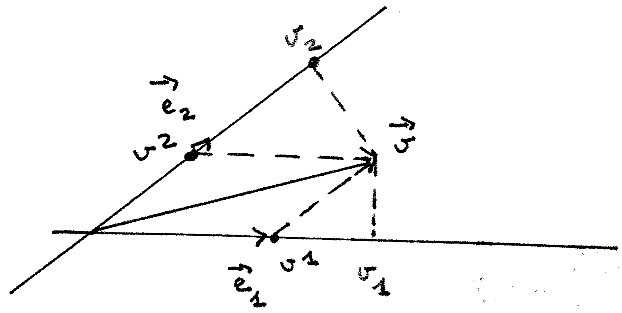
$$\boxed{v'^i = \sum_{i=1}^{n} P^{-1}{}_j^i\, v^j}$$

Les v^i sont appelées composantes contravariantes du vecteur $\vec{v}$.

Composantes covariantes :

On note $(\, , \,)$ le produit scalaire.

Soit $v_i = (\vec{v}, \vec{e}_i)$. la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la direction $\vec{e}_i$. v_i est appelée composante covariante de $\vec{v}$ dans la direction $\vec{e}_i$. En général, $v_i \neq v^i$



<u>Changement de base</u> : $v'_i = (\vec{v}, \vec{e}'_i) = (\vec{v}, \mathcal{P}(\vec{e}_i)) = (\vec{v}, \sum_{j=1}^{n} P_i^j \vec{e}_j)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité du produit scalaire}}}{=} \sum_{j=1}^{n} P_i^j (\vec{v}, \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} P_i^j v_j$$

$$\boxed{v'_i = \sum_{j=1}^{n} P_i^j v_j}$$

<u>covariant</u>

<u>Application linéaire</u> (endomorphisme $E, \{\vec{e}_i\} \circlearrowleft$)

$\mathcal{A}$: application linéaire de matrice $A = A_i^j$ dans la base $\vec{e}_i$

Dans le changement de base $\mathcal{A}$ se transforme comme :

$$\boxed{A'^{\,i}_{\;j} = \sum_{k,l=1}^{n} (P^{-1})^i_k \, A^k_l \, P^l_j}$$

contra

co

1 fois covariante → ind. inf.
1 fois contravariante → ind. sup.

Rq : $\det A' = \det P^{-1} A P = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$

$\Longrightarrow$ Le déterminant est un invariant ici.

Forme bilinéaire

$$g(\vec{v},\vec{v}) = \tilde{v}\, G\, v = \sum_{i,j=1}^{n} v^i g_{ij} v^j \qquad \text{(nombre)}$$

$G = \{g_{ij}\}_{ij}$ est 2 fois covariante. En effet,

$$g(\vec{v},\vec{v}) = v\, G\, v = \sum_{i,j} v^i g_{ij} v^j$$

$$= \sum_{i,j} \Big(\sum_k P^i_k v'^k\Big) g_{ij} \Big(\sum_l P^j_l v'^l\Big)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} v'^k P^i_k g_{ij} P^j_l v'^l = \sum_{k,l} v'^k \Big(\sum_{i,j} P^i_k g_{ij} P^j_l\Big) v'^l$$

Par ailleurs, $g(\cdot,\cdot)$ est un nombre donc est invariant par changement de base.

$$\Rightarrow g(\vec{v},\vec{v}) = g(\vec{v}',\vec{v}') \overset{\text{def}}{=} \sum_{k,l} v'^k g'_{kl} v'^l$$

Donc : $$\boxed{g'_{kl} = \sum_{i,j} P^i_k g_{ij} P^j_l}$$ 2 fois covariant

Rq $\det G' = \det \tilde{P} \det G \det P = (\det P)^2 G \Longrightarrow$ ce n'est pas un invariant.

Conclusion : Tous ces objets sont définis par un ensemble de composantes qui obéissent à des lois de transformation déterminées lors d'un changement de repère.

$$\begin{cases} \text{partie covariante (indice inférieur)} \longrightarrow \text{matrice } P \\ \text{partie contravariante (indice supérieur)} \longrightarrow \text{matrice } P^{-1} \end{cases}$$

2) Notations

Dans le changement de base, on note $'$ les objets rapportés à la nouvelle base.

Ex : v^i , v_i'

Par ailleurs, pour la matrice de passage on adopte la notation : $\boxed{\begin{array}{l} P = \alpha \\ P^{-1} = \beta \end{array}}$

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \, \vec{e}_i \qquad \underline{\underline{\text{et}}} \qquad \vec{e}_i = \sum_{j'=1}^{n} \beta^j_i \, \vec{e}_j{}'$$

au lieu de $\vec{e}_i = \sum_{j'=1}^{n} \left[\alpha^{-1}\right]^j_i \vec{e}_j{}'$

Donc : $\alpha^i_j \rightarrow$ matrice P

$\beta^j_i \rightarrow$ matrice P^{-1}

3) Définition

On appelle tenseur M fois covariant et N fois contravariant un ensemble de n^{N+M} composantes :

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_N}_{j_1 j_2 \cdots j_M}$$

où i_k varient de 1 à n (0 à $n-1$) $k = 1 .. N$, et j_ℓ varient de 1 à n (0 à $n-1$) $\ell = 1 .. M$

qui, lors d'un changement de repère se transforment selon la loi :

$$t'^{i'_1 i'_2 \cdots i'_N}_{j'_1 \cdots j'_M} = \sum_{\substack{i_1 = 1 \ldots n \\ i_2 = 1 \ldots n \\ \vdots \\ j_n = 1 \ldots n}} \beta^{i'_1}_{i_1} \beta^{i'_2}_{i_2} \cdots \beta^{i'_N}_{i_N} \alpha^{j_1}_{j'_1} \cdots \alpha^{j_M}_{j'_M} t^{i_1 \cdots i_N}_{j_1 \cdots j_M}$$

Ex : $A'^{ij} = \sum_{k,l} \beta^i_k \beta^j_l A^{kl}$ 2 fois contravariant

4) Convention d'Einstein

Lorsqu'un indice apparait une fois en position supérieure et une fois en position inférieure on convient de sommer sur cette indice et d'enlever le signe Σ.

Ex : 1) $\sum_{i=1}^{n} v_i w^i \longrightarrow v_i w^i$

2) $\sum_{j=1}^{n} A^i_j v^j \longrightarrow A^i_j v^j$

3) $\sum_{i,j=1}^{n} v^i g_{ij} v^j \longrightarrow v^i g_{ij} v^j$

4) $A'^{ij} = \beta^{ij}_{kl} A^{kl}$

Dans cette convention les règles de transformation deviennent :

composantes contravariantes d'un vecteur $\qquad v'^i = \beta^i_j v^j$

composantes covariantes d'un vecteur $\qquad v'_i = \alpha^j_i v_j$

Application linéaire $\qquad A'^{i}_{j} = \beta^{i}_{k} \alpha^{l}_{j} A^{k}_{l}$

Tenseur 2 fois covariant $\qquad A'_{ij} = \alpha^{k}_{i} \alpha^{l}_{j} A_{kl}$
(forme bilinéaire)

Tenseur 2 fois contravariant $\qquad A'^{ij} = \beta^{i}_{k} \beta^{j}_{l} A^{kl}$

Tenseur M covariant, N contravariant:

$$t'^{i'_1 \ldots i'_N}_{j'_1 \ldots j'_M} = \beta^{i'_1}_{i_1} \beta^{i'_2}_{i_2} \ldots \beta^{i'_N}_{i_N} \alpha^{j_1}_{j'_1} \ldots \alpha^{j_M}_{j'_M} \, t^{i_1 \ldots i_N}_{j_1 \ldots j_M}$$

II] Exemples importants:

1) Tenseur métrique

On appelle espace euclidien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Le produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive i.e..

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda (\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda \vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \lambda \vec{y}) \\ (\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}) \end{array}\right\} \text{linéarité}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{définie.}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \qquad \text{positif}$$

On pose $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. On a alors:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = ((\sum_i) x^i \vec{e}_i, \sum_j y^j \vec{e}_j) = \sum_{i,j} x^i y^j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i,j} x^i y^j g_{ij}$$

convention d'Einstein

Le tenseur 2 fois covariant g_{ij} définit donc le produit scalaire dans le repère $\{\vec{e}_i\}$ selon la relation :

$$(\vec{x},\vec{y}) = x^i y^j g_{ij}$$

Cette quantité étant un nombre, il est invariant par changement de base i.e.

$$x^i y^j g_{ij} = x'^i y'^j g'_{ij}$$

Par ailleurs $x^i = \alpha^i_{j'} x'^{j'}$, $~~y~~ y^j = \alpha^j_{i'} x'^{i'}$ $\Rightarrow$

$$x^i y^j g_{ij} = \alpha^i_k x'^k \alpha^j_l y'^l g_{ij} = \alpha^i_k g_{ij} \alpha^j_l x'^k y'^l$$
$$= g'_{kl} x'^k y'^l$$

$$\Rightarrow \boxed{g'_{kl} = \alpha^i_k \alpha^j_l g_{ij}} \Rightarrow \boxed{G' = \tilde{\alpha} G \alpha}$$

Donc g_{ij} est bien 2 fois covariant.

__Prop__ : 1) __$\det g \neq 0$__

En effet $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow g_{ij} x^i x^j = 0 \Leftrightarrow x^i = 0 \ \forall i$

ne peut être vérifié que si $\det g \neq 0$.

2) __$g_{ij} = g_{ji}$__ * par symétrie $x^i g_{ij} y^j = y^i g_{ij} x^j = x^i g_{ji} y^j$.

__Relation entre composantes co- et contra-variantes__

$$x_i = (\vec{x},\vec{e}_i) = (x^j \vec{e}_j, \vec{e}_i) = x^j g_{ji}$$

$$\boxed{x_j = g_{ij} x^i}$$

g étant inversible on a :

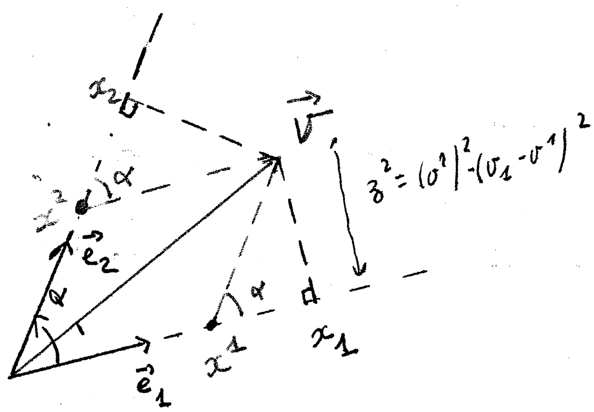
$$x^i = [g_{ij}]^{-1} x_j$$

On pose : $\boxed{g^{ij} = g_{ij}^{-1}}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^i = g^{ij} x_j}$$

Donc, le tenseur métrique permet de passer des composantes covariantes aux composantes contravariantes.

<u>Ex :</u>



On suppose :

$\|\vec{e_1}\|^2 = (\vec{e_1}, \vec{e_1}) = 1$

$\|\vec{e_2}\|^2 = (\vec{e_2}, \vec{e_2}) = 1$

on a

$(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \cos\alpha \|\vec{e_1}\| \|\vec{e_2}\|$

$= \cos\alpha$

$\|v\|^2 = (v^1)^2 + 2\cos\alpha\, v^1 v^2 + (v^2)^2$

$= v_1^2 + (v^2)^2 - (v_1 - v^1)^2 = -(v^1)^2 + (v^2)^2 + 2 v_1 v^1$

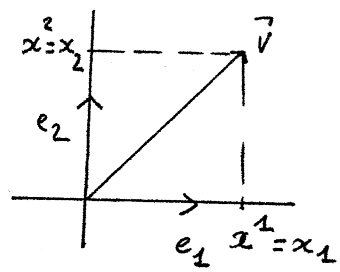
$$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x^1 + x^2 \cos\alpha = 1.x^1 + \cos\alpha\, x^2 = g_{1j} x^j$$

$$x_2 = x^2 + x^1 \cos\alpha = \cos\alpha\, x^1 + 1.x^2 = g_{2j} x^j$$

<u>Cas particulier</u> : Repère orthogonal - normé

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad g = I$$



Dans ce cas $x^i = x_i$

et on peut ne pas faire la distinction

entre composantes co- et contra variantes

<u>Par ailleurs</u>, (x_i) <u>vecteur ligne</u>, <u>transposé de</u> (x^i)

Norme A partir du produit scalaire (du tenseur métrique) on définit la norme (euclidienne) d'un vecteur :

$$\boxed{\|\vec{v}\|^2 = (\vec{v},\vec{v}) = g_{ij}\, v^i v^j = v_j v^j}$$

La norme définit ainsi une distance dans l'espace ponctuel ($d(x,y) = \|\vec{Ox} - \vec{Oy}\|$) qui permet de mesurer les longueurs. D'où le nom de tenseur métrique. C'est lui qui définit la façon de mesurer les longueurs (surfaces, volumes) dans l'espace considéré.

Ex : 1) Produit scalaire usuel

$$g_{ij} = \delta_{ij} \qquad (G = I)$$

$$\Rightarrow (\vec{v},\vec{v}) = v^i v^j \delta_{ij} = v^i v^i = v_i v^i ; \left(\sum_{i=1}^{n} (v^i)^2\right)$$

On retrouve le produit scalaire usuel. $(\vec{v},\vec{v}) = \tilde{v}.v$

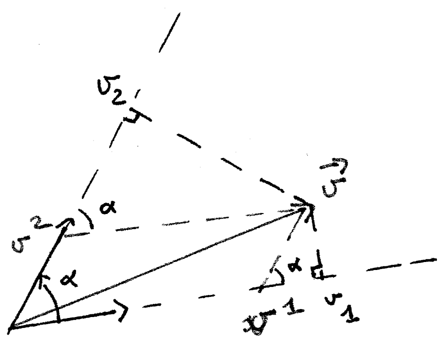
2) Ex précédent

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (\vec{v},\vec{v}) = v^i v^j g_{ij}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = g_{11}(v^1)^2 + g_{12} v^1 v^2 + g_{21} v^2 v^1 + g_{22}(v^2)^2$$

$$= (v^1)^2 + 2\cos\alpha\, v^1 v^2 + (v^2)^2$$

$$= v^1(v^1 + \cos\alpha\, v^2) + v^2(v^2 + \cos\alpha\, v^1) = v^1 v_1 + v^2 v_2$$

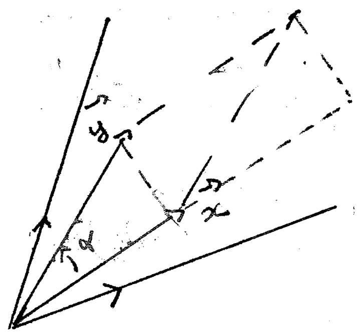


Rappel : $\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + (v^2 \sin\alpha)^2$
$= v_2^2 + (v^1 \sin\alpha)^2$

Volume

Soient 2 vecteurs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$. Ils définissent un parallélogramme dont la surface est:

$$S = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sin\alpha$$



$$\Rightarrow \quad S^2 = (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \sin^2\alpha$$

$$S^2 = (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \left[1 - \cos^2\alpha\right]$$

$$= (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \left[1 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})}\right]$$

Donc, $S^2 = (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) - (\vec{x},\vec{y})(\vec{y},\vec{x})$

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\vec{x},\vec{x}) & (\vec{x},\vec{y}) \\ (\vec{y},\vec{x}) & (\vec{y},\vec{y}) \end{vmatrix}$$

En particulier, si $\vec{x} = \vec{e}_1$, $\vec{y} = \vec{e}_2$; $S^2 = \begin{vmatrix} (\vec{e}_1,\vec{e}_1) & (\vec{e}_1,\vec{e}_2) \\ (\vec{e}_2,\vec{e}_1) & (\vec{e}_2,\vec{e}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$

Donc la surface du parallélogramme délimité par les 2 vecteurs de base est

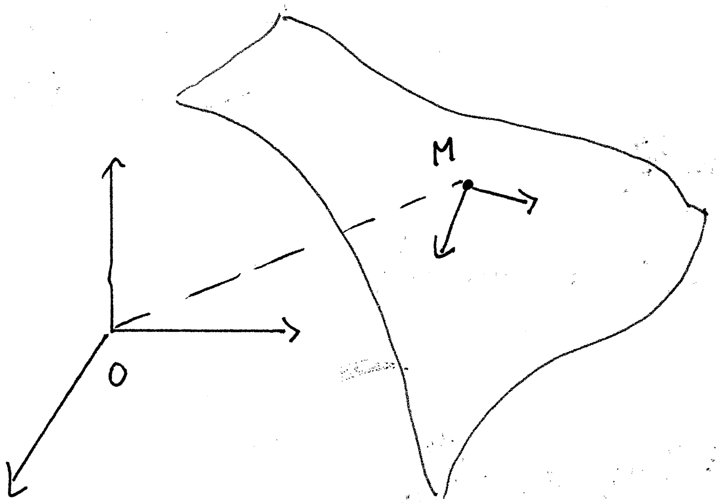
$$\boxed{S = \sqrt{|g|}}$$

Cette relation se généralise en dimension n. Le volume du polyèdre défini par les n vecteurs de base est,

$$\boxed{V = \sqrt{|g|}}$$

Coordonnées curvilignes ; élément de longueur

On se donne un repère de référence $\{\vec{e}_i\}$, d'origine O. Un point M est repéré par $\vec{OM} = \vec{M} = x^i \vec{e}_i$. Il peut être parfois utile de changer de système de coordonnées. Par exemple : système ayant la symétrie sphérique, cylindrique, ou encore mouvement sur une surface. Le changement de coordonnées est alors défini par un système d'équation du type



nlle ancienne

$$\boxed{y^i = f^i(x^1 \dots x^n)}$$

$i = 1 \dots n$

$$\boxed{x^i = g^i(y^1 \dots y^n)} \; ; \; g = f^{-1}$$

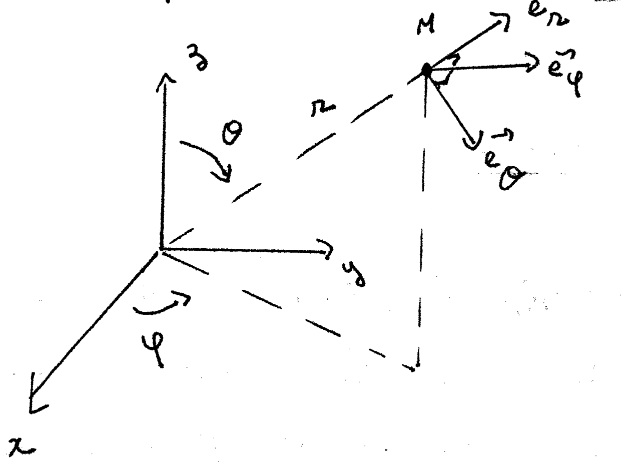
On définit n nouveaux vecteurs de la façon suivante. On fait varier la première coordonnée en bloquant les autres. Le point $\vec{M}$ se déplace selon $\vec{e}_1$, etc... On a :

$$\boxed{\vec{e}_i\,' = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i}\left(\times \frac{1}{\left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i}\right\|}\right)} \longrightarrow \text{normalisation}$$

Ex : coordonnées sphériques

$(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \to \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$



$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = f_1(r, \theta, \varphi) \\ y = f_2(r, \theta, \varphi) \\ z = f_3(r, \theta, \varphi) \end{cases}$$

NB : ces vecteurs varient avec le point.

On a :

$$d\vec{M} = dx^1 \vec{e}_1 + \dots + dx^n \vec{e}_n = dx^i \vec{e}_i$$

$$= \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y^1} dy^1 + \dots + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y^n} dy^n = dy^i \vec{e}_i'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \vec{e}_j = \delta_i^j \vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial x^i} y^j \vec{e}_j'$$

$$\boxed{\vec{e}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \vec{e}_j' = (P_i^j)^{-1} \vec{e}_j'}$$

ancien nouveau

On pose : $\boxed{P_i^j = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)^{-1} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}}$ (th d'inversion locale)

P est la matrice de passage ; c'est aussi la matrice jacobienne du changement de variable $\boxed{x^i = g^i(\vec{y})}$

ancien nouveau

Donc :

$$\boxed{P^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \quad ; \quad P'^j_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}} \qquad P' = P^{-1}$$

$$\boxed{\vec{e}'_i = P^j_i \vec{e}_i}$$

Ex : sphériques

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad\vec{e}_r \quad & \quad \vec{e}_\theta \quad & \quad \vec{e}_\varphi \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & (r)\cos\theta\cos\varphi & -(r)\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & (r)\cos\theta\sin\varphi & (r)\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -(r)\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Géométriquement :

$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z = \vec{u}_r$

$\vec{e}_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z = r\vec{u}_\theta$

$\vec{e}_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y = r\vec{u}_\varphi$

$\underline{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi}$ vecteurs normés

Rq : La matrice de passage dépend du point.

Élément de longueur

$$d\vec{M} = dx^i \vec{e}_i$$

$$ds^2 = d\vec{M}\cdot d\vec{M} = dx^i \vec{e}_i \cdot dx^j \vec{e}_j = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)\, dx^i dx^j = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

Ex : sphériques

$(\vec{e}_r,\vec{e}_r) = 1 \quad (\vec{e}_\theta,\vec{e}_\theta) = r^2 \qquad (\vec{e}_\varphi,\vec{e}_\varphi) = r^2\sin^2\theta$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

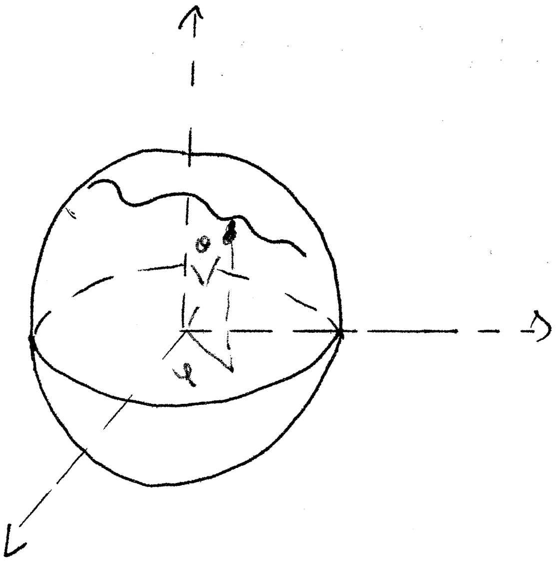
Elément de longueur :

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

En particulier, élément de longueur sur la sphère (r = cste)

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

$$\Rightarrow dl = r\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2}$$



Rq : Chemin sur la sphère

$\Rightarrow$ fonction $\varphi = \varphi(\theta)$

$\theta = \theta(\varphi)$

$\Rightarrow$

$$dl = r\,d\theta\sqrt{1 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}$$

ou

$$dl = r\,d\varphi\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta}$$

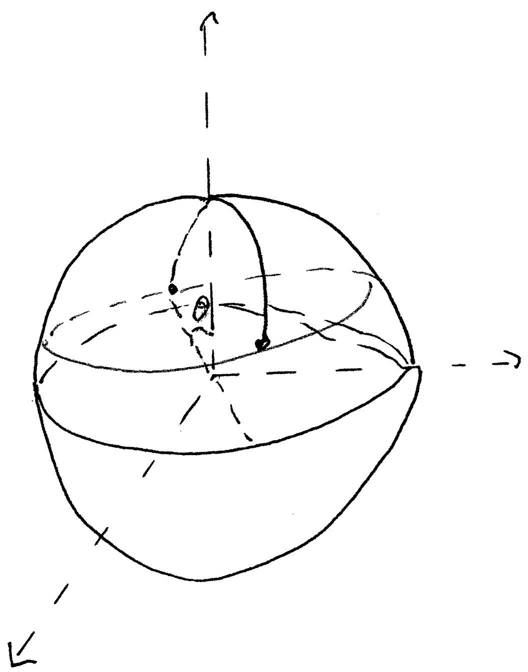
Rq : $d\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}d\theta \Rightarrow d\varphi^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 d\theta^2$

Ex : 1) Arc de cercle $\varphi = cste$

$$dl = r\,d\theta \Rightarrow l = r(\theta_2 - \theta_1) = 2r\theta$$

2) Cercle $\theta = cste$

$$l = \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \sin\theta \, d\varphi = 2\pi r \sin\theta$$



$$Rq = \frac{\text{longueur du cercle}}{\text{rayon du cercle}} = \frac{2\pi r \sin\theta}{2r\theta}$$

$$= \frac{\pi \sin\theta}{\theta} \neq \pi \quad !!$$

Element de volume

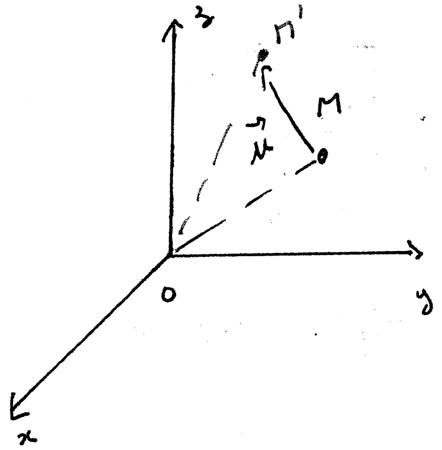
$$Vol(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \sqrt{|G|} = r \sin\theta$$

$$dV = \sqrt{|G|}\, dr\, d\theta\, d\varphi \to dV = r \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Tenseur de déformation

On considère un solide dont les points sont repérés par leurs coordonnées $x_i \ (=x^i)$ dans un repère orthogonal. On déforme ce solide : tous les points se déplacent. En particulier : $M \to M'$

Le vecteur déplacement est $\vec{MM'} = \vec{u}$



$$u_i = x'_i - x_i \equiv u_i(\vec{x})$$

fonction du point

Soient 2 pts infiniment voisins avant déformation $\Rightarrow$ dx_i distance initiale.

Au cours de la déformation on a :

$$dx'_i = dx_i + du_i$$

Par ailleurs, la distance initiale était :

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \Rightarrow dl^2 = dx_i \, dx_i$$

Après :

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \Rightarrow dl'^2 = dx'_i \, dx'_i$$

Mais : $du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \Rightarrow$

$$dl'^2 = (dx_i + du_i)^2 = dx_i \, dx_i + 2\, dx_i \, du_i + du_i^2$$

$$dl'^2 = dl^2 + 2\, dx_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \right)$$

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i \, dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k \, dx_l$$

Mais : $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k$

$$\Rightarrow \quad 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$$

On pose : $\boxed{u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)}$

u_{ik} est le tenseur de déformation. Il est symétrique : $u_{ik} = u_{ki}$

On a alors :

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}\, dx_i dx_k \Rightarrow dx_i^2 + 2u_{ik}\, dx_i dx_k = (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k$$

$\boxed{dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik})\, dx_i dx_k}$ → forme quadratique

⇒ u_{ik} étant symétrique on peut diagonaliser localement la forme quadratique dans un repère orthogonal (les axes dépendant a priori des coordonnées).

$$\boxed{dl'^2 = (1 + 2u^{(1)})\, dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\, dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\, dx_3^2}$$

où $u^{(i)}$ → valeur propre direction i.

La quantité : $\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$ → allongement relatif le long des axes [illegible] (comme exemple : barre mince)

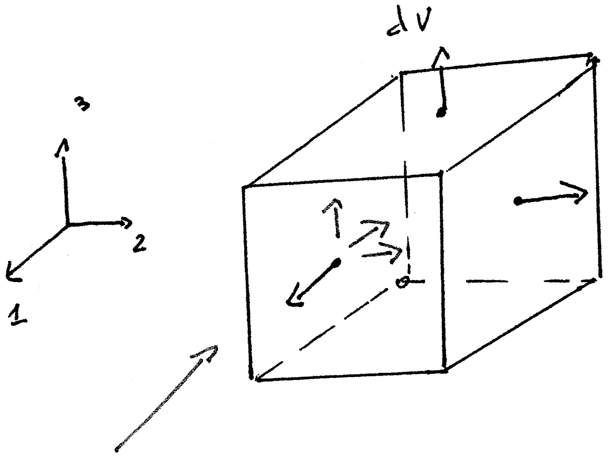
→ dérivée du 1er ordre

$$\boxed{u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}$$

2) Tenseur des contraintes

On soumet un solide à des forces. Par exemple on applique une pression sur les faces.

$d\vec{S_i}$: vecteur normal à la surface i.



Une pression sur la face k résulte en 3 forces dirigées selon 1, 2, 3,

⇒ σ_{ik} : $i$ème composante de la force agissant sur l'élément dS_k

⇒ Force dans la direction i $\sigma_{ik}\, dS_k$

σ_{ik} est appelé tenseur des contraintes

σ_{ii} : force normale à i

σ_{ik} : forces tangentielles. (cisaillage) → les éléments // à S glissent les uns sur les autres.

Ex : pression uniforme $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$

3) Relations contraintes déformation :

$$\boxed{\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}}$$

λ_{iklm} : tenseur des modules d'élasticité.

λ_{iklm} : déterminés par le système cristallin (triclinique : 18 ; monoclinique 12 ; orthorhombique : 9 - - - cubique 3)