CALCUL SYMBOLIQUE POUR LA GÉOMÉTRIE

B. Mourrain

INRIA, SAGA
2004 route des Lucioles, BP 93
06902 Sophia-Antipolis Cedex
mourrain@sophia.inria.fr
http://www.inria.fr/saga/mourrain/

Problème géométrique ?

Problème invariant par un certain groupe de transformations

- ◦ Alignements de points,
- ◦ Cocyclicité de points,
- ◦ Théorème de Désargues,
- ◦ Singularité d'un robot parallèle,
- ◦ Configuration de molécules satisfaisant des contraintes de distances.
- ◦ Études des correspondances dans les images.

- Géométrie projective : problèmes invariants par le groupe des transformations inversibles Sl_n.
- Géométrie affine : problèmes invariants par le sous-groupe des transformations laissant fixe l'hyperplan à l'infini.
- Géométrie Euclidienne : problèmes invariants par le sous-groupe des transformations laissant fixe l'hyperplan à l'infini $\mathcal{H}$ et la quadrique $\mathcal{Q}$ définissant le produit scalaire.

Voir Programme d'Erlangen de F. Klein.

Géométrie et Algèbre

- Addition, soustraction.
- Les rapports : Thalès (-620-546) et ses pyramides.
- École de Pythagore (-585-400) : 218 Pythagoriciens et les acousmaticiens, mais Hippase de Métaponte, les nombres irrationels
- La multiplication et la commutativité : Théorème de Pappus.

- Associativité, corps archimédien,...

Algèbre et Géométrie

Action de groupe :

$$\forall g \in G, \forall x \in V, g \cdot x \in V, \forall p \in \mathbb{K}[V],\ \ p^g(\mathbf{x}) = p(g^{-1} \cdot \mathbf{x}).$$

Invariants $\mathbb{K}[V]^G$: élément p de $\mathbb{K}[V]$ tel que $\forall g \in G, p^g = p$.

Exemple : Sl_2 agit sur $V = \mathbb{K}^2$ et sur $a\,x_2^2 + 2\,b\,x_1\,x_2 + c\,x_2^2$. Invariant : $b^2 - a\,c$.

Théorème : L'algèbre $\mathbb{K}[V]^G$ est engendrée par un nombre fini d'éléments.

$$\mathbb{K}[V]^G = \sum_{i=1}^{m} \nu_i\, \mathbb{K}[\theta_1, \ldots, \theta_d].$$

Série de Molien-weil :

$$H_{\mathbb{K}[V]^G} = \sum_n \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V]^G_{[n]})\, z^n = \int_G \frac{1}{det(1 - zM_g)} d\mu$$

Les invariants de Sl_n

- **Générateurs :** $[X_{i_1},\ldots,X_{i_n}]$
- **Relations entre ces générateurs** (règles de Plücker) :

$$[i_1,\ldots,i_n]\,[i'_1,\ldots,i'_n]$$
$$\to\ -\sum_{\sigma\neq id}\epsilon(\sigma)[i_1,\ldots,i_k,\,i^{\sigma}_{k+1},\ldots,i^{\sigma}_n]\,[i'^{\sigma}_1,\ldots,i'^{\sigma}_{k+1},i'_{k+2},\ldots,i'_n]$$

- Structure d'algèbre avec lois de redressement.
  - Ordre partiel : $[i_1,\ldots,i_n]\ll[i'_1,\ldots,i'_n]$ si $i_1\leq i'_1,\ldots,i_n\leq i'_n$.
  - Normalisation : si x_1 et x_2 non-comparables alors

$$x_1x_2\to\sum_{i=1}^{s}y_{i,1}y_{i,2},\ \text{avec}\ y_{i,1}\ll x_1,\ y_{i,1}\ll x_2,\ y_{i,1}\ll y_{i,2}.$$

$$[1,2,5][1,3,4]\to[1,2,3][1,4,5]-[1,2,4][1,3,5]$$

- Dimension, degré, résolution injective, algèbre Cohen-Macaulay.

Les relations entre 5 points du plan projectif.

$|3,4,5|$

$|2,4,5|$

$|1,4,5|$ $|2,3,5|$

$|1,3,5|$ $|2,3,4|$

$|1,2,5|$ $|1,3,4|$

$|1,2,4|$

$|1,2,3|$ dimension 7

Les premiers “théorèmes fondamentaux” :

$$\begin{aligned}
f_1 &= |1,2,5||1,3,4| + |1,2,3||1,4,5| - |1,2,4||1,3,5|\\
f_2 &= |1,2,5||2,3,4| + |1,2,3||2,4,5| - |1,2,4||2,3,5|\\
f_3 &= |1,3,5||2,3,4| + |1,2,3||3,4,5| - |1,3,4||2,3,5|\\
f_4 &= |2,3,4||1,4,5| + |1,2,4||3,4,5| - |1,3,4||2,4,5|\\
f_5 &= |1,4,5||2,3,5| + |1,2,5||3,4,5| - |1,3,5||2,4,5|
\end{aligned}$$

Les deuxièmes “théorèmes fondamentaux” :

$$\begin{aligned}
f_2\wedge f_1 &= |1,3,4|\ f_2 - |2,3,4|\ f_1 - |1,2,4|\ f_3 + |1,2,3|\ f_4\\
f_3\wedge f_2 &= |1,2,5|\ f_3 - |1,3,5|\ f_2 + |2,3,5|\ f_1 - |1,2,3|\ f_5\\
f_4\wedge f_2 &= |1,2,5|\ f_4 - |1,4,5|\ f_2 + |2,4,5|\ f_1 - |1,2,4|\ f_5\\
f_4\wedge f_3 &= |1,3,5|\ f_4 - |1,4,5|\ f_3 + |3,4,5|\ f_1 - |1,3,4|\ f_5\\
f_5\wedge f_4 &= |2,3,4|\ f_5 - |2,3,5|\ f_4 + |2,4,5|\ f_3 - |3,4,5|\ f_2
\end{aligned}$$

Le troisième “théorème fondamental” :

$$\begin{aligned}
f_5\wedge f_4\wedge f_1 &= (|1,4,5||2,3,5| + |1,2,5||3,4,5| - |1,3,5||2,4,5|)\ f_2\wedge f_1\\
&+ (|1,2,4||3,4,5| - |1,3,4||2,4,5| + |2,3,4||1,4,5|)\ f_3\wedge f_2\\
&- (|1,2,3||3,4,5| + |1,3,4||2,3,5| - |1,3,5||2,3,4|)\ f_4\wedge f_2\\
&+ (|1,2,5||2,3,4| - |1,2,4||2,3,5| + |1,2,3||2,4,5|)\ f_4\wedge f_3\\
&+ (|1,2,3||1,4,5| - |1,2,4||1,3,5| + |1,2,5||1,3,4|)\ f_5\wedge f_4
\end{aligned}$$

Calculs géométriques

Représentations dans l'algèbre extérieure :

$$\wedge\mathbb{E} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{E} \oplus \wedge^2\mathbb{E} \oplus \cdots \oplus \wedge^n\mathbb{E}$$

où $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n$. Éléments de la forme $\sum_i \lambda_i\, v_{i,1}\wedge\cdots\wedge v_{i,k_i}$.

- Les points sont les éléments de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$.
- Les droites, plans, ... sont des éléments de $\mathbb{P}(\wedge\mathbb{E})$ de la forme $a\wedge b$, $a\wedge b\wedge c$, ... (**Grassmannienne** de $\mathbb{E}$).
- Un point x est dans l'espace $L = \langle v_1, \ldots, v_d\rangle$ ssi

$$x\wedge v_1\wedge\cdots\wedge v_d = 0$$

ou encore (règle de Cramer)

$$x \to v_1\,[v_2, \ldots, v_d, x] - \cdots \pm v_d\,[v_1, \ldots, v_{d-1}, x]$$

- Intersection générique de $E_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ et $E_2 = y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$:

$$\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) x_1^{\sigma} \wedge \cdots \wedge x_{p+q-n}^{\sigma} [x_{p+q-n}^{\sigma}, \ldots, x_p^{\sigma}, y_1, \ldots, y_q]$$

- Généralisation dans les cas non-génériques.

$$D(E_1, E_2) = D^0(E_1, E_2) + D^1(E_1, E_2) + \cdots + D^p(E_1, E_2) \in \wedge \mathbb{E} \otimes \wedge \mathbb{E}$$

Le dernier terme non-nul est de la forme $I \otimes S$ où

– I =Intersection de E_1 et E_2.

– S =Somme de E_1 et E_2.

Exemple:

– $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = a\,[b,c,d] - b\,[a,c,d] = c\,[a,b,d] - d\,[a,b,c]$.

– $(a \wedge b), (c \wedge d), (e \wedge f)$ concourantes ssi

$$[a,e,f]\,[b,c,d] - [b,e,f]\,[a,c,d] = 0.$$

La Grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$

- Représentation :

$$L = (L_{1,2}, L_{1,3}, L_{2,3}, L_{0,1}, L_{0,2}, L_{0,3})$$

dans la base canonique $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$, $e_0 \wedge e_1$, $e_0 \wedge e_2$, $e_0 \wedge e_3$.

$$x \wedge y = (x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_3 - x_3 y_3, y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

- Relations pour les droites : $L_{1,2} L_{0,3} - L_{1,3} L_{0,2} + L_{0,1} L_{2,3} = 0$.
  Produit scalaire :

$$[L|L'] = L_{1,2} L'_{0,3} + L'_{1,2} L_{0,3} - L_{1,3} L'_{0,2} - L'_{1,3} L_{0,2} + L_{0,1} L'_{2,3} + L_{0,1} L'_{2,3}$$

- $[L|L] = 0$ si et seulement si $L \in \mathcal{G}_2$.
- Pour toutes droites L, $L' \in \mathcal{G}_2$, $[L|L'] = 0$ ssi L et L' sont coplanaires.
- Si $L = a \wedge b$ et $L' = a' \wedge b'$ alors

$$[L|L'] = det(a, b, a', b') = [a, b, a', b'] \|a\, b\| \, \|a'\, b'\| d_{L,L'} sin(\alpha).$$

- Si $L = a \wedge b = (\mathbf{oa} \times \mathbf{ob}, \mathbf{ab})$ et $L' = a' \wedge b' = (\mathbf{oa}' \times \mathbf{ob}', \mathbf{a}'\mathbf{b}')$, alors

$$[L|L'] = \langle \mathbf{oa} \times \mathbf{ob} | \mathbf{a}'\mathbf{b}' \rangle = |\mathbf{oa}', \mathbf{ob}', \mathbf{a}'\mathbf{b}'| = |\mathbf{oa}', \mathbf{ob}, \mathbf{ab}|$$

$\Pi_1 = (X_1,X_2,X_4)$, $\Pi_2 = (X_2,X_3,X_5)$, $\Pi_3 = (X_3,X_1,X_6)$, $\Pi_4 = (X_4,X_5,X_6)$ concourants ssi

$$\begin{array}{l}
-x_{4,1}^2 x_{6,2} x_{5,3} x_{1,2} x_{6,3} x_{5,1} x_{3,2} x_{2,3} - x_{4,1}^2 x_{6,2} x_{5,3} x_{1,2} x_{6,3} x_{5,1} x_{2,2} x_{3,3} + x_{4,1} x_{3,2}^2 x_{5,3}^2 x_{6,1} x_{1,2} x_{1,1} x_{4,3} + x_{2,1} x_{5,2} x_{6,3} x_{6,1} x_{3,2} x_{4,3}^2 x_{3,1} x_{1,2} \\
-x_{4,1}^2 x_{6,2} x_{5,3} x_{3,2} x_{6,3} x_{5,1} x_{2,2} x_{3,3} - x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1} x_{4,2} x_{6,3} x_{5,1} x_{3,2} x_{2,3} - x_{4,1}^2 x_{6,2}^2 x_{5,3} x_{3,3} x_{5,1} x_{3,2} x_{2,3} - x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{6,1} x_{3,2}^2 x_{1,3} x_{5,1} x_{2,3} \\
+x_{4,1}^2 x_{6,2}^2 x_{5,3} x_{3,3} x_{5,1} x_{3,2} x_{1,3} + 2 x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{4,1} x_{6,2} x_{1,3} x_{1,1} x_{3,3} + x_{2,1} x_{6,2} x_{4,3}^2 x_{6,1} x_{3,2} x_{1,3} x_{3,1} x_{1,2} - x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{4,1} x_{6,2} x_{3,3}^2 x_{1,1} \\
-x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{6,1} x_{3,2}^2 x_{4,3} x_{5,1} x_{2,3} + x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{6,1} x_{3,2}^2 x_{4,3} x_{5,1} x_{1,3} - x_{4,1} x_{3,2}^2 x_{6,3}^2 x_{2,1} x_{1,2} x_{1,1} x_{4,3} - 2 x_{5,1}^2 x_{2,2} x_{4,3}^2 x_{3,1} x_{1,2} x_{3,2} x_{2,3} \\
+x_{5,1} x_{6,2} x_{4,3} x_{6,1} x_{4,2} x_{1,3} x_{1,1} x_{2,2} x_{3,3} + x_{4,1} x_{3,2}^2 x_{6,3}^2 x_{5,1} x_{1,2} x_{1,1} x_{4,3} - x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{6,1} x_{1,2} x_{3,3}^2 x_{1,1} - x_{5,1} x_{2,2} x_{6,3} x_{6,1} x_{3,2}^2 x_{4,3} x_{1,1} x_{2,3} \\
-x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{6,3} x_{6,1} x_{3,2} x_{4,3}^2 x_{1,1} - 2 x_{5,1}^2 x_{2,2} x_{4,3}^2 x_{1,1} x_{6,2} x_{3,2} x_{2,3} + x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{6,1} x_{1,2} x_{3,3} x_{1,1} x_{5,3} - x_{6,1}^2 x_{5,2} x_{4,3} x_{3,2} x_{1,3}^2 x_{3,1} x_{4,2} \\
+x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3}^2 x_{6,1} x_{1,2} x_{1,1} x_{3,3} - x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3}^2 x_{6,1} x_{1,2} x_{1,1} x_{5,3} + x_{5,1}^2 x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{1,1} x_{4,2} x_{3,3}^2 - x_{5,1} x_{6,2}^2 x_{3,3} x_{2,1}^2 x_{1,3}^2 x_{4,2} \\
+x_{5,1}^2 x_{4,2}^2 x_{6,3} x_{6,2} x_{1,3}^2 x_{2,1} + 3 x_{5,1} x_{6,2} x_{4,3} x_{6,1} x_{4,2} x_{3,3} x_{1,1} x_{3,2} x_{2,3} + x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{4,1} x_{1,2} x_{3,3}^2 + x_{1,1} x_{6,1} x_{3,2}^2 x_{5,3} x_{5,1} x_{1,2} x_{2,3} x_{4,1} x_{1,3} \\
-x_{6,1} x_{3,2}^2 x_{5,3}^2 x_{2,1} x_{6,2} x_{4,1} x_{2,3} + x_{4,1} x_{6,2}^2 x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{4,3} x_{5,2} x_{1,3} + x_{4,1} x_{6,2}^2 x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{1,3} x_{5,2} x_{2,3} - x_{4,1} x_{6,2}^2 x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{1,3}^2 x_{5,2} \\
-x_{4,1} x_{6,2}^2 x_{5,3}^2 x_{3,1}^2 x_{1,3} x_{2,2} + x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{4,2} x_{6,3} x_{5,2} x_{2,3} - x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{4,2} x_{6,3} x_{5,2} x_{1,3} - x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3}^2 x_{3,1}^2 x_{4,2} x_{6,3} x_{2,2} \\
-x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{4,2} x_{1,3} x_{5,2} x_{2,3} + x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{4,2} x_{1,3}^2 x_{5,2} + x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3}^2 x_{3,1}^2 x_{4,2} x_{1,3} x_{2,2} - x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{1,2} x_{6,3} x_{5,2} x_{2,3} \\
+x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3}^2 x_{3,1}^2 x_{1,2} x_{6,3} x_{2,2} - x_{5,1}^2 x_{3,2}^2 x_{4,3}^2 x_{2,2} x_{1,3} x_{2,1} - x_{4,1} x_{6,2} x_{5,3} x_{3,1}^2 x_{1,2} x_{4,3} x_{5,2} x_{1,3} - x_{5,1} x_{2,2}^2 x_{4,3} x_{4,1} x_{1,2} x_{3,3} x_{1,1} x_{5,3} \\
-x_{4,1}^2 x_{6,2} x_{2,3} x_{3,2} x_{6,3} x_{5,1} x_{1,2} x_{3,3} - x_{4,1} x_{3,2} x_{5,3} x_{1,1}^2 x_{5,2} x_{2,3}^2 x_{4,2} + \cdots 10894 \text{ autres termes} \cdots = 0
\end{array}$$

mais aussi

$$\begin{array}{l}
[X_6\, X_5\, X_4\, X_2][X_6\, X_4\, X_3\, X_1][X_5\, X_3\, X_2\, X_1] \\
\quad -[X_6\, X_5\, X_4\, X_3][X_6\, X_5\, X_2\, X_1][X_4\, X_3\, X_2\, X_1] = 0
\end{array}$$

car

$$\begin{array}{rcl}
\Pi_1 \cap \Pi_2 & = & X_3 \wedge X_2 [X_5, X_4, X_2, X_1] - X_5 \wedge X_2 [X_3, X_4, X_2, X_1] \\
(\Pi_1 \cap \Pi_2) \cap \Pi_3 & = & X_3 [X_6\, X_5\, X_2\, X_1][X_4\, X_3\, X_2\, X_1] \\
 & & -X_2 [X_6\, X_4\, X_3\, X_1][X_5\, X_3\, X_2\, X_1] \\
 & & +X_5 [X_6\, X_3\, X_2\, X_1][X_3, X_4, X_2, X_1]
\end{array}$$

$\boxed{\text{Les invariants de } O_n}$

- Générateurs : $[X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}], \langle X_i | X_j \rangle$
- Relations entre ces générateurs de type Plücker.
- Structure d'algèbre avec lois de redressement et normalisation.
- Dimension, degré, résolution injective, algèbre Cohen-Macaulay.

Espace des sphères

∘ **Représentation** :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,a\,x - 2\,b\,y - 2\,c\,z + \rho = 0 \mapsto (\rho : a : b : c : 1) \in \mathbb{S} = \mathbb{P}^4.$$

On note

- $\omega = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$,
- $\overline{P} = (a^2 + b^2 + c^2 : a : b : c : 1)$ la **sphère-point** associée à $P = (a : b : c : 1)$.

∘ **Produit scalaire sur** $\mathbb{S}$:

$$[(\rho,a,b,c,t)|(\rho',a',b',c',t')] = (\rho\,t' + \rho' t) - 2(a\,a' + b\,b' + c\,c')$$

- S est un point ssi $[S,S] = 0$,
- $[S,\omega] = 1$, $[\omega,\omega] = 0$.
- $P \in S$ ssi $[\overline{P},S] = 0$.
- Si O est le centre de S et R son rayon, $S = \overline{O} - R^2\,\omega$.
- $[S,S'] = dist(O,O') - R^2 - R'^2$ et $S \perp S'$ ssi $[S,S'] = 0$.
- $\overline{a} - \overline{b}$ est la plan median de a,b.

– $\{a,b,c,d,e\}$ sont cosphériques ssi $|\overline{a},\ldots,\overline{e}| = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & [\overline{a},\overline{b}] & \cdots & [\overline{a},\overline{e}] \\ [\overline{a},\overline{b}] & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & [\overline{d},\overline{e}] \\ [\overline{a},\overline{e}] & \cdots & [\overline{d},\overline{e}] & 0 \end{vmatrix} = [a,b,c,d,e|a,b,c,e] = 0$$

– Lois de redressement sur les déterminants de Cayley-Menger :

$$D(a,b,c,\ldots) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & [\overline{a},\overline{b}] & \cdots & [\overline{a},\overline{e}] \\ \vdots & [\overline{a},\overline{b}] & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & [\overline{d},\overline{e}] \\ 1 & [\overline{a},\overline{e}] & \cdots & [\overline{d},\overline{e}] & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rho^2(p_1,p_2,p_3) = 8\frac{D(p_1,p_2,p_3)}{D(p_1,p_2)\,D(p_2,p_3)\,D(p_1,p_3)} \rightarrow \text{courbure}^2 \text{ de } \mathcal{C} \text{ en } p.$$

$$\tau^2(p_1,p_2,p_3,p_4) = 18\frac{D(p_1,p_2,p_3,p_4)}{(\Pi_{i_1,i_2,i_3} D(p_{i_1},p_{i_2},p_{i_3}))^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \text{torsion}^2 \text{ de } \mathcal{C} \text{ en } p.$$

Les déplacements

Représentation habituelle $D = [R,T]$:

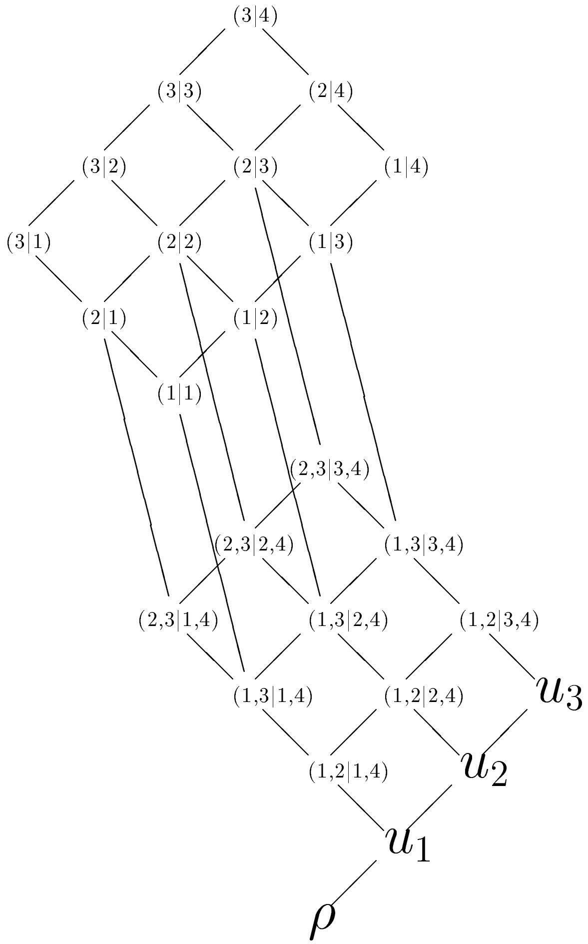
$$R\,R^t = R^t R = Id_3,\ \ det(R) = 1$$

On rajoute les variables

$$\rho = (T|T), u_i = (R_i|T), w_{i,j} = (i,j|k,4) = (R_k \times T)_l,\ \ \{i,j,l\} = \{1,2,3\}.$$

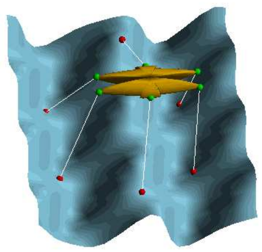
Relations dans $\mathbb{C}[\mathcal{D}] = \mathbb{K}[(i|j),(i|4),(i,j|k,4),u_l,\rho]$

- $(R_i|R_j) = \delta_{i,j}$, $(R_i^*|R_j^*) = \delta_{i,j}$,
- $(R_i|T) = u_i$, $(R_i^*|U) = t_i$, $(T|T) - \rho = 0$, $(U|U) - \rho = 0$,
- $(i,j,|i',j') = (-1)^{k+k'}(k|k')$, $w_{i,j} = -w_{j,i}^*$,
- $w_{i,l}\,(j|m) - w_{j,l}\,(i|m) = u_m(k|l) - \delta_{l,m}(k|4)$,
- $w_{i,l}\,u_j - w_{j,l}\,u_i = -t_m(k|l) + \delta_{l,m}u_k$,
- $w_{i,k}w_{j,l} = \begin{vmatrix} \delta_{k,l} & u_k & r_{j,k} \\ u_l & \rho & t_j \\ r_{i,l} & t_i & \delta_{i,j} \end{vmatrix}$

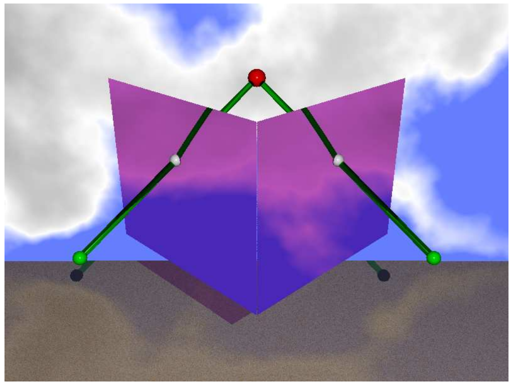


Degré = 40.

– Problème direct du robot parallèle : au plus 40 solutions.



– Problème de la reconstruction entre 2 images avec 5 points: au plus 10 solutions.



Algèbre de Clifford

- Q forme quadratique.
- On quotiente l'algèbre tensorielle par les relations

$$x \otimes x - Q(x,x), x \in \mathbb{E}.$$

- Représentation synthétique des
  - rotations par les quarternions : $H = \langle 1,i,j,k \rangle$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i\,j = -j\,i = k$, $j\,k = -k\,j = i$, $k\,i = -i\,k = j$.

$$v \in \langle i,j,k \rangle \mapsto q\,v\,q^{-1}.$$

  - déplacement par les quaternions duaux : $H + \epsilon\,H$, $\epsilon^2 = 0$.

$$v \mapsto q\,v\,q^{-1}.$$

Invariants de matrices

- Les variables
$$X = \{X_1, X_2, \ldots\}$$
sont des matrices et l'algèbre non-commutative est $\mathbb{K}\langle X \rangle$.
- Invariants engendrés par les
$$Tr(X_1\, X_2\, X_3)\, Tr(X_1) \cdots$$
- Relations de la forme
$$X_1^2 - T(X_1)X_1 + \frac{1}{2}(T(X_1)^2 - T(X_1^2))\, I \equiv 0$$
engendrées par l'identité de Cayley-Hamilton.
- Algorithme de normalisation.

Applications

- □ Démonstration automatique en géométrie.
- □ Étude des lieux singuliers de mécanismes séries.
- □ Le langage des barres et des joints sphériques.
- □ Reconstruction de structures moléculaires.
- □ Passage du 2D au 3D.
- □ Étude des correspondances entre N images.
- □ Prédicats géométriques fiables et efficaces.
- □ Énumerateurs de poids de codes linéaires de type II sur $\mathbb{Z}_4$.
- □ …

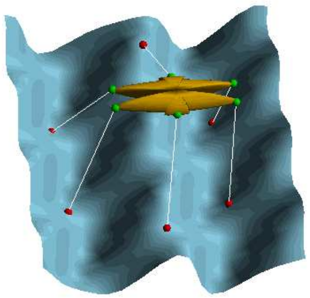
Application à la mécanique

On étudie « l'espace tangent » des déplacements :

$$\partial_t(D^t(M)) = V + OD^t(M) \times \Omega$$

On identifie le mouvement infinitésimal (champ de vitesse) à $\mathcal{I} \in \wedge^2\mathbb{E}$:

$$\mathcal{I} = V_1\, e_2\wedge e_3 - V_2\, e_1\wedge e_3 + V_3\, e_1\wedge e_3 + \Omega_1\, e_1\wedge e_4 + \Omega_2\, e_2\wedge e_4 + \Omega_3\, e_3\wedge e_4.$$



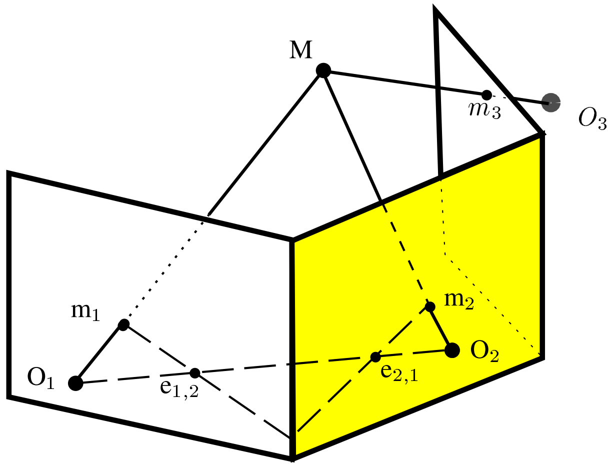
Dans le cas d'un robot parallèle dans une position instable on a :

$$\partial_t([D.Y_i - X_i, D.Y_i - X_i]) = [X_i\wedge Z_i, \mathcal{I}].$$

Le mécanisme est instable

- ssi il existe une mouvement infinitésimale $\mathcal{I}$, « orthogonal » aux barres $(X_i\wedge Z_i)_{1\leq i\leq 6}$,
- ssi les vecteurs $(X_i\wedge Z_i)_i$ sont linéairement dépendants dans $\wedge^2\mathbb{E}$.

Correspondances entre N caméras



- M **point** de $\mathbb{P}^3$.
- $(m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2$ **images** de M dans les caméras ($\mathbf{m}_i = (x_i : y_i : z_i)$).
- Caméra représentée par une projection centrale sur le plan rétinien :

$$\mathbf{m} \equiv \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{3,1} & \cdots & c_{3,4} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.M} \\ \mathbf{2.M} \\ \mathbf{3.M} \end{pmatrix}$$

Relations linéaires en $\mathbf{M}$:

$$\begin{matrix} x_1 & & \mathbf{1}.\mathbf{M} & & x_2 & & \mathbf{4}.\mathbf{M} & \\ y_1 & \wedge & \mathbf{2}.\mathbf{M} & = 0, & y_2 & \wedge & \mathbf{5}.\mathbf{M} & = 0, \ldots \\ z_1 & & \mathbf{3}.\mathbf{M} & & z_2 & & \mathbf{6}.\mathbf{M} & \end{matrix}$$

Bilinéarités :

$$\mathbf{m}_1^t \begin{bmatrix} [2,3,5,6] & -[1,3,5,6] & [1,2,5,6] \\ -[2,3,4,6] & [1,3,4,6] & -[1,2,4,6] \\ [2,3,4,5] & -[1,3,4,5] & [1,2,4,5] \end{bmatrix} \mathbf{m}_2 = 0$$

– Centre optique: $O_1 = \mathbf{1} \triangle \mathbf{2} \triangle \mathbf{3}$.

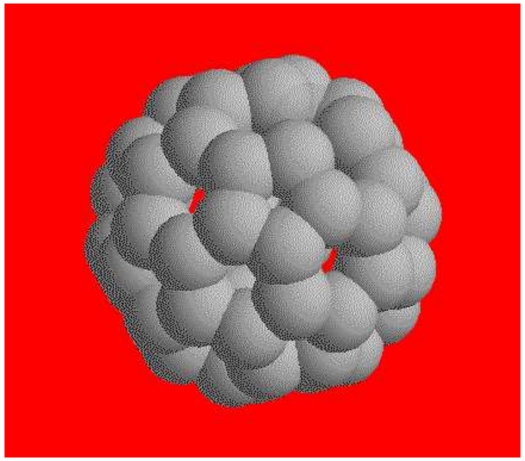
– Epipole : $\mathbf{e}_{1,2} = ([1,4,5,6] : [2,4,5,6] : [3,4,5,6])$.

Trilinéarités : $T(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\mathbf{m}_3) = 0$.

– Reconstruction des épipoles à partir d'une trilinéarité.

– Reconstruction de $\mathbf{M}$ à partir de deux trilinéarités.

Configurations de molécules



– Par RMN, encadrements de certaines distances.

– Projection de la matrice des distances^2 sur l'espace des matrices de rang ≤ 5.

– Reconstruction de la géométrie de la molécule à partir de cette matrice.

Démonstration automatique en Géométrie

- **Points ordonnés :** $x_1, \ldots, x_n$
- **Hypothèses :**
  - $x_1, x_2, \ldots$ libres
  - x_i est construit à partir de $x_1, \ldots, x_{i-1}$ suivant les hypothèses :

$$\begin{cases} H_1(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}) = 0, \\ \vdots \\ H_{k_i}(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}) = 0 \end{cases}$$

- **Conclusion :** $C(x_1, \ldots, x_s) = 0$.
- **Construction de règles de réduction :** $x_i \rightarrow$ point générique de $V(H_1(x, x_1, \ldots, x_{i-1}) = \cdots = H_{k_i}(x, x_1, \ldots, x_{i-1}) = 0)$ avec la condition de non-dégénérescence $S(x_1, \ldots, x_i) \neq 0$.
- **Réduction de la conclusion** C par ces règles.

Réécriture dans l'algèbre extérieure

- **Points ordonnés :** $x_1, \ldots, x_s$
- **Hypothèses :** $x_{i_2} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} = 0, \ldots$
- Pour chaque nouveau point x_{k+1} non-construit tel que

$$x_{k+1} \wedge E_1(x_1, \ldots, x_k) = \cdots = x_{k+1} \wedge E_l(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

  – $I_1 := E_1$, $i := 1$. Tant que $i \neq l$,

    1. Calculer $D(I_i, E_{i+1})$.
    2. Utiliser les règles sur $x_1, \ldots, x_k$ pour déterminer le dernier terme non-nul.
    3. En déduire I_{i+1}, $i := i + 1$.

  – Calculer la règle de réécriture sur x_{k+1} à partir de I_l par Cramer.
- **Réduction de la conclusion** C par ces règles.

La méthode J. R. Gebert

- Essentiellement la géométrie projective et en 2D.
- Calcul sur des *déterminants* $|a,b,c|$.
- Basée sur les relations de Plücker :

$$|a,b,c|\,|d,e,f| - |a,b,d|\,|c,e,f| + |a,b,e|\,|c,d,f| - |a,b,f|\,|c,d,e| = 0$$

$A = \{a,b,c,\ldots\}$ colinéaire ssi

$$|a,b,e|\,|a,c,f| = |a,b,f|\,|a,c,e| \text{ or } \frac{|a,b,e|\,|a,c,f|}{|a,b,f|\,|a,c,e|} = 1$$

$\forall a,b,c \in A,\ e,f \notin A$.

- Construction d'un ensemble de binômes à partir des hypothèse :

$$\begin{array}{c} x_1 \;\; x_2 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; x_n \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & 0\cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\cdots 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Réduction de la conclusion par manipulations linéaires sur les exposants.

Le point de vue algébrique

La variété $V(H_1,\dots,H_s)$ se décompose en composantes irréductibles :

$$V(H_1,\dots,H_s) = V_1^* \cup \cdots \cup V_k^* \cup V_1' \cup \cdots \cup V_l'.$$

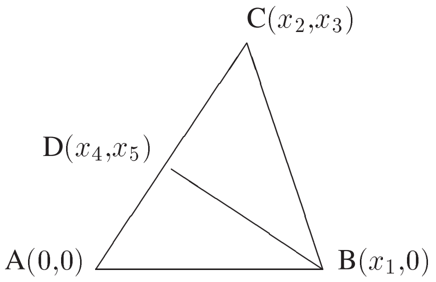
Problème : Montrer que la conclusion c s'annullent sur les composantes génériques V_i^*.

Approche :

- Construire un ensemble réducteur pour chaque composante irréductible non-dégénérée.
- Réduire la conclusion.

Exemple :

Soient A,B,C des points quelconque du plan et D la projection de B sur A,C. Alors $AB = BC$?



Points :	$A(0,0),B(x_1,0),C(x_2,x_3),D(x_4,x_5)$	
Hypothèses :	$D \in (A,C)$	$h_1 := x_2x_5 - x_3x_4 = 0,$
	$(D,B)\perp(A,C)$	$h_2 := (x_4 - x_1)x_2 + x_5x_3 = 0.$
Conclusion ??:	$AB = BC$	$g := x_2^2 + x_3^2 - 2\,x_1\,x_2$

$$(x_4^2+x_5^2- x_1\,x_4)\times g = (h_1 - 2\,x_1x_5 + x_1x_3)\,h_1+(x_5x_3 - 2\,x_1x_4 + x_2x_4)\,h_2$$

Méthode(s) de Ching Chang Chou

Première approche :

Construction d'ensembles triangulaires irréductibles tels que tout polynôme nul sur la composante non-dégénérée correspondante donne 0 par pseudo-réduction.
Voir méthode de Wu Wen-Tsün.

Deuxième approche : (plus géométrique, essentiellement en 2D)

– Géometrie affine Eculidienne : *parallélisme, longueur, aire, angles*, $\ldots$.

– Manipulations d'invariants *aire de A,B,C*, *carré de distances* $P(A,B,C,D)$, $\ldots$

– Pour chaque type de construction, appliquer des règles de substitutions génériques, en vérifiant les conditions de non-degénérescence.

  – Si $X = (A,B) \cap (C,D)$ alors
  $|U,V,X| = \frac{1}{S(A,B,C,D)}(|U,V,B|\,|A,C,D| - |U,V,A||B,C,D|)$.

  – Si X est la projection orthogonale de H sur (A,B) alors

$$Expr(X) = \frac{1}{\overline{AB}^2}(\langle BH,AB\rangle\, Expr(A) + \langle BH,BA\rangle\, Expr(B))$$

Modélisation 3D

- ◦ Extraction des points, droites, plans, . . . des images.
- ◦ Hypothèses sur ces géométriques.

$$\Downarrow$$

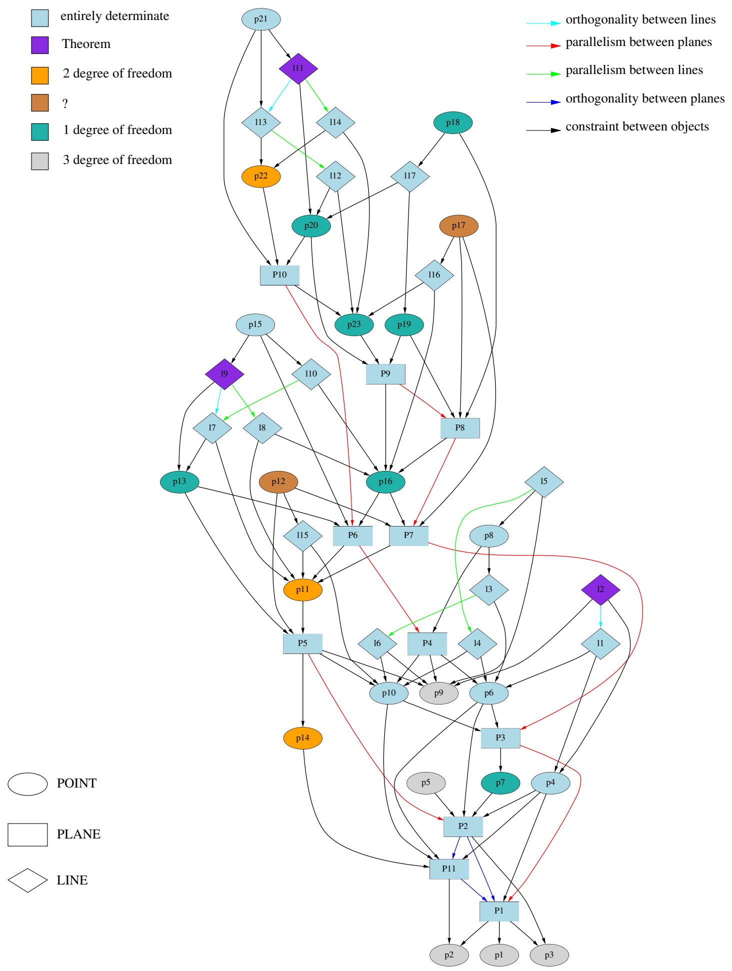
- ▷ Reconstruire le modèle 3D le plus réaliste.
- ▷ Trouver de nouvelles propriétés pour améliorer, controler le modèle 3D.

Contraintes : beaucoup d'objets géométriques à traiter.

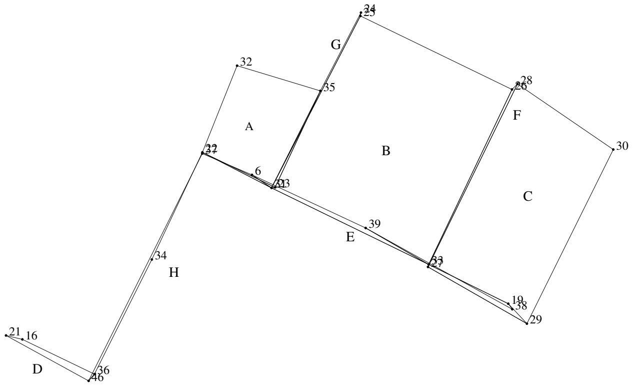
Mais : estimation numériquement grossière du modèle.

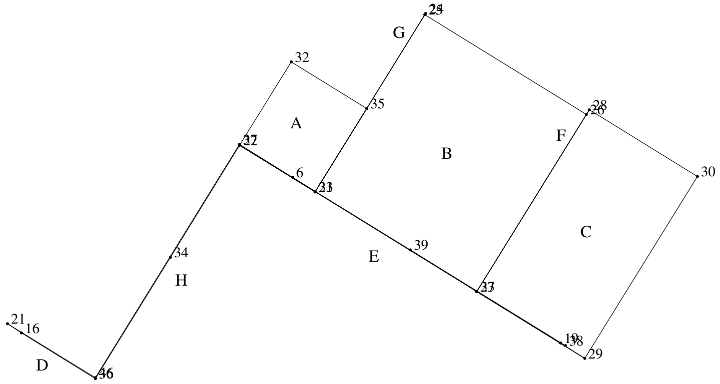
- Ordonnancement des objects et construction d'un ensemble triangulaire creux.
- Paramétrisation algébrique du modèle.
- Vérification des propriétés par réduction.
- Ajustement des paramètres en function des images pour améliorer le modèle 3D.
- Découverte automatique de théorèmes par réduction de propriétés de petits degrés.

Le graphe des contraintes géométriques :

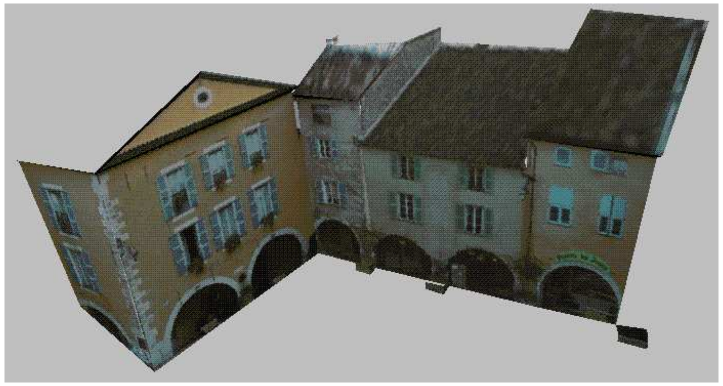


Construction et recalage du modèle :





$\Downarrow$



Pythagore : *tout est nombre (rationel).*

Hélas, tout nombre n'est pas représentable directement en machine.

Comment combiner une représentation formelle et numérique des objets géométriques (fiablité, efficacité) ?