

# Diagramme de phase d'un modèle de type CAOS en vue de l'extraction des arbres et des réseaux routiers



Aymen EL GHOUL



Dirigé par :

Ziad BELHADJ : URISA (SUP'COM)

Josiane ZERUBIA et Ian JERMYN : ARIANA (CNRS, INRIA, UNSA)

2006-2007

# Plan de la présentation

- 1 Motivations**
  - Modélisation d'une région
  - Problématique
- 2 Stabilité du modèle de gaz de cercles**
  - Etude variationnelle
  - Conditions de stabilité
- 3 Stabilité du modèle d'une barre longue**
  - Etude variationnelle
  - Conditions de stabilité
  - Résultats expérimentaux
- 4 Conclusion et perspectives**

# Plan de la présentation

1

## Motivations

- Modélisation d'une région
- Problématique

2

## Stabilité du modèle de gaz de cercles

- Etude variationnelle
- Conditions de stabilité

3

## Stabilité du modèle d'une barre longue

- Etude variationnelle
- Conditions de stabilité
- Résultats expérimentaux

4

## Conclusion et perspectives

# Approche probabiliste - approche variationnelle

## Approche probabiliste basée sur la méthodologie bayésienne

- La région  $R$  est vue comme un champ aléatoire,
- Estimateur MAP :  $\hat{R} = \arg \max_{R \in \mathcal{R}} P(R|I, K)$
- Théorème de Bayes :  $\hat{R} = \arg \max_{R \in \mathcal{R}} P(I|R, K)P(R|K)$

## Approche variationnelle basée sur la minimisation d'énergie

- La probabilité peut être réécrite comme une fonction exponentielle,  $\exp(-E)$
- Minimisation d'énergie :  

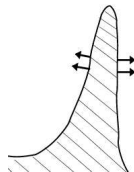
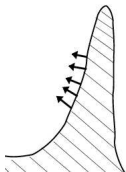
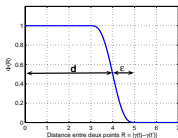
$$\hat{R} = \arg \min_{R \in \mathcal{R}} \{E(I|R, K) + E(R|K)\}$$
- Energie d'une région :  $E(R) = E_{interne}(R) + E_{image}(R)$

# Le modèle des CAOS, [Marie et al. 2005, 06]

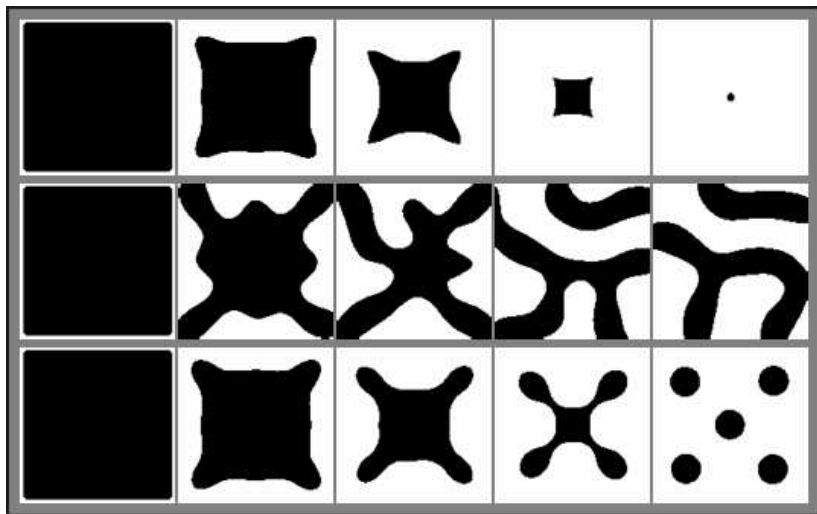
$$E_g(\gamma) = \underbrace{\lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma)}_{\text{Snakes [Kass et al. 1988]}} - \frac{\beta_C}{2} \iint dt dt' \dot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t) \Phi(|\gamma(t) - \gamma(t')|)$$

où la fonction d'interaction  $\Phi$  est donnée par :

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1 & z < d - \epsilon, \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z-d}{\epsilon} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi(z-d)}{\epsilon} \right) & d - \epsilon \leq z < d + \epsilon, \\ 0 & z \geq d + \epsilon. \end{cases}$$



# Problématique



# Invariance d'échelle de l'énergie géométrique du contour

- Le modèle des CAOS possède 5 paramètres  $\Rightarrow$  Difficile d'analyser la stabilité de l' $E_g$ ,
- Invariance d'échelle:
  - Hypothèse :  $\epsilon = d \Rightarrow$  La fonction d'interaction peut être réécrite en fonction de  $\hat{\gamma} = \frac{\gamma}{d}$ ,
  - Soient  $\hat{\alpha} = \frac{\alpha_c d}{\lambda_c}$ ,  $\hat{\beta} = \frac{\beta_c d}{\lambda_c}$  et  $\hat{\Phi}(z) = \Phi(\frac{z}{d})$ . Le modèle des CAOS devient donc ( $\lambda_c > 0$ ) :

$$\hat{E}_g(\hat{\gamma}) = L(\hat{\gamma}) + \hat{\alpha}A(\hat{\gamma}) - \frac{\hat{\beta}}{2} \iint dt dt' \hat{\gamma}(t') \cdot \hat{\gamma}(t) \hat{\Phi}(|\hat{\gamma}(t) - \hat{\gamma}(t')|),$$

- $\hat{E}_g$  dépend des deux paramètres d'échelle  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ .
- Analyse de stabilité (développement en série de Taylor):

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) = E_g(\gamma_0) + \langle \delta\gamma | \frac{\delta E_g}{\delta\gamma} \rangle_{\gamma_0} + \frac{1}{2} \langle \delta\gamma | \frac{\delta^2 E_g}{\delta\gamma^2} | \delta\gamma \rangle_{\gamma_0}$$

# Plan de la présentation

1

## Motivations

- Modélisation d'une région
- Problématique

2

## Stabilité du modèle de gaz de cercles

- Etude variationnelle
- Conditions de stabilité

3

## Stabilité du modèle d'une barre longue

- Etude variationnelle
- Conditions de stabilité
- Résultats expérimentaux

4

## Conclusion et perspectives



# Paramétrisation

## Paramétrisation d'un cercle

- $\gamma_0(t) = (r_0(t), \theta_0(t)) = (r_0, t)$  where  $t \in [-\pi, \pi[$
- $\gamma(t) = \gamma_0(t) + \delta\gamma(t) = (r(t), \theta(t)) = (r_0 + \delta r(t), \theta_0(t) + \delta\theta(t))$
- L'énergie  $E_g$  est invariante aux changements tangentiels donc  $\delta\theta(t) = 0$ .

## Définition des perturbations

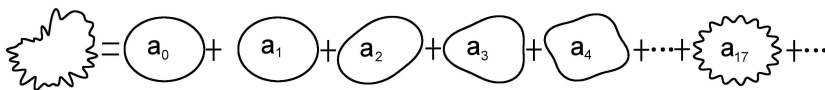
- L'énergie  $E_g$  est invariante par translation donc l'opérateur  $F = \frac{\delta^2 E_g}{\delta\gamma^2}$  est aussi invariant par translation,
- La base de la transformée de Fourier diagonalise  $F$ ,
- $\Rightarrow$  les perturbations seront définies en termes de coefficients de Fourier :  $\delta r(t) = \sum_k a_k e^{ir_0 kt}$  avec  $k = \frac{m}{r_0}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ .

# L'énergie géométrique d'un cercle, [Peter et al. 2006]

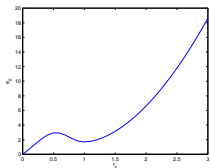
$$E_g(\gamma) = \lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma) - \frac{\beta_C}{2} \iint dt dt' \dot{\gamma}(t') \cdot \dot{\gamma}(t) \Phi(|\gamma(t) - \gamma(t')|)$$

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) = E_g(\gamma_0) + \langle \delta\gamma | \frac{\delta E_g}{\delta \gamma} \rangle_{\gamma_0} + \frac{1}{2} \langle \delta\gamma | \frac{\delta^2 E_g}{\delta \gamma^2} | \delta\gamma \rangle_{\gamma_0}$$

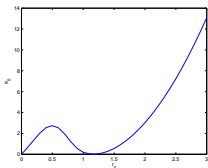
$$E_g(r) = E_g(r_0 + \delta r) = e_0(r_0) + a_0 e_1(r_0) + \frac{1}{2} \sum_k |a_k|^2 e_2(k, r_0) .$$



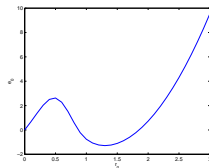
# Comportements de l'énergie d'un cercle



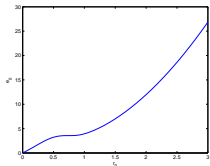
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 1.54$$



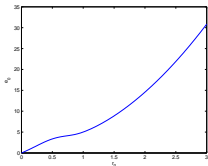
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 1.84$$



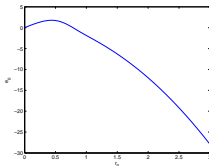
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 2.03$$



$$\alpha_C = 1, \beta_C = 1.10$$



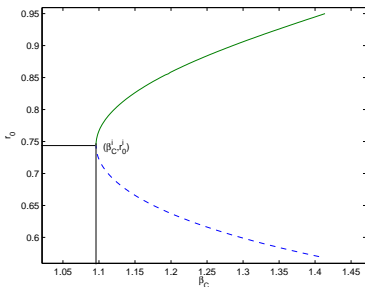
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 0.88$$



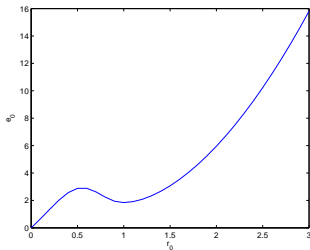
$$\alpha_C = -1, \beta_C = 1$$

# Première condition de stabilité : le terme de premier ordre, $e_1$ , est nul

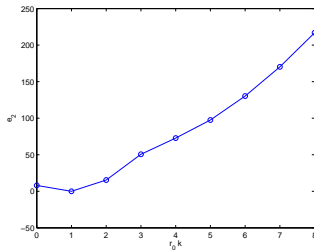
$$\beta_C(\lambda_C, \alpha_C, r_0) = \frac{\lambda_C + \alpha_C r_0}{G_{10}(r_0)} \iff \hat{\beta}(\hat{\alpha}, \hat{r}_0) = \frac{1 + \hat{\alpha} \hat{r}_0}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0)}$$



## Deuxième condition de stabilité : le terme de second ordre, $e_2$ , est strictement positif



$$\alpha_C = 1, r_0^* = 1$$



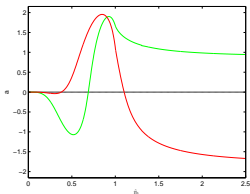
$$e_2(\alpha_C, k, r_0^*) > 0$$

## Deuxième condition de stabilité : le terme de second ordre, $e_2$ , est strictement positif

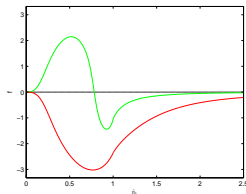
$$e_2(\alpha_C, k, r_0) > 0, \forall k \neq \frac{1}{r_0} \iff \alpha_C a(r_0, k) > f(r_0, k), \forall k \neq \frac{1}{r_0}.$$

- Si  $a(\hat{r}_0, k) > 0$  alors  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}_{min} = \max_{k \in K^+} \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}$ 
  - avec  $K^+ = \{k, a(\hat{r}_0, k) > 0 \text{ and } k \neq \frac{1}{r_0}\}$ .
- Si  $a(\hat{r}_0, k) < 0$  alors  $\hat{\alpha} < \hat{\alpha}_{max} = \min_{k \in K^-} \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}$ 
  - avec  $K^- = \{k, a(\hat{r}_0, k) < 0 \text{ and } k \neq \frac{1}{r_0}\}$ .

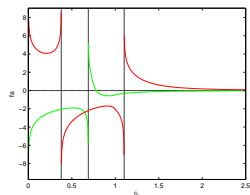
# Les limites du paramètre $\hat{\alpha}$



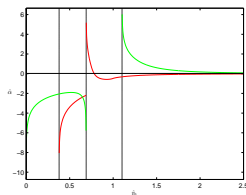
Graphe de  $a$



Graphe de  $f$

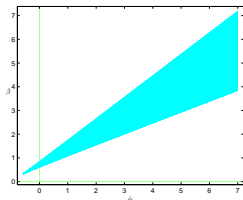


Graphe de  $f/a$

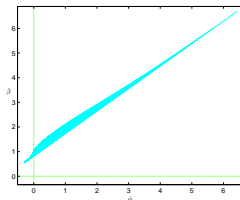


Limites de  $\hat{\alpha}$

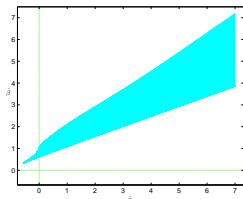
# Diagramme de phase du modèle d'un cercle



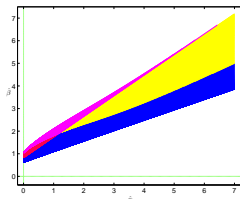
$$0.69 < \hat{r}_0 < 1.1$$



$$1.1 < \hat{r}_0 < \infty$$



$$0.69 < \hat{r}_0 < \infty$$



$$0.69 < \hat{r}_0 < \infty$$



# Plan de la présentation

1

## Motivations

- Modélisation d'une région
- Problématique

2

## Stabilité du modèle de gaz de cercles

- Etude variationnelle
- Conditions de stabilité

3

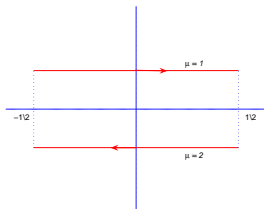
## Stabilité du modèle d'une barre longue

- Etude variationnelle
- Conditions de stabilité
- Résultats expérimentaux

4

## Conclusion et perspectives

# Paramétrisation d'une barre longue



$$\gamma_{0,\mu}(t_\mu) = \begin{cases} x_{0,\mu}(t_\mu) & = \pm_\mu / t_\mu, t_\mu \in [-0.5, 0.5] \\ y_{0,\mu}(t_\mu) & = \pm_\mu \frac{w_0}{2} \end{cases}$$

avec

$$\pm_\mu = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = 1 \\ -1 & \text{si } \mu = 2 \end{cases}$$

# Définition des perturbations

- $\delta\gamma_\mu(t_\mu) = (\delta x_\mu(t_\mu), \delta y_\mu(t_\mu))$ . On s'intéresse aux perturbations verticales  $\Rightarrow \delta x_\mu(t_\mu) = 0$ ,
- Les perturbations sont exprimées en termes des coefficients de Fourier (invariance par translation) :  
 $\delta y_\mu(t_\mu) = \sum_{k_\mu} a_{\mu, k_\mu} e^{ik_\mu t_\mu}$  avec  $k_\mu = \frac{2\pi m_\mu}{l}$ ,  $m_\mu \in \mathbb{Z}$ ,
- Expression du contour :

$$\begin{aligned} \gamma_\mu(t_\mu) &= \gamma_{0, \mu}(t_\mu) + \delta\gamma_\mu(t_\mu) \\ &= \begin{cases} x_\mu(t_\mu) &= \pm_\mu l t_\mu \\ y_\mu(t_\mu) &= \pm_\mu \frac{w_0}{2} + \sum_{k_\mu} a_{\mu, k_\mu} e^{ik_\mu t_\mu} . \end{cases} \end{aligned}$$

# L'énergie par unité de longueur de la barre

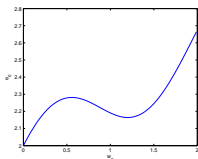
$$E_g(\gamma) = \lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma) - \frac{\beta_C}{2} \sum_{\mu, \nu} \iint_{(\square\gamma_\mu, \square\gamma_\nu)} dt_\mu dt'_\nu G(t_\mu, t'_\nu)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_g(\gamma)}{l} &= e_0(w_0) + [a_{1,0} - a_{2,0}] e_1(w_0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \left[ |a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2 \right] e_{20} + (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) e_{21} \\ &= e_0 + e_1 (a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{2} \sum_k a_k^* e_2 a_k^t. \end{aligned}$$

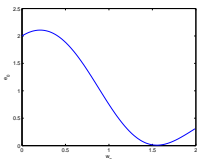
$$a_k = \begin{pmatrix} a_{1,k}^* & a_{2,k} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{20} & e_{21} \\ e_{21} & e_{20} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Complex wave} = \text{flat line } a_0 + \text{smooth wave } a_1 + \text{complex wave } a_2 + \dots + \text{highly oscillatory wave } a_{17} + \dots$$

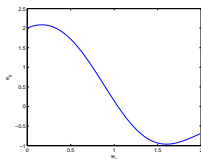
# Comportements de l'énergie d'une portion d'une barre longue



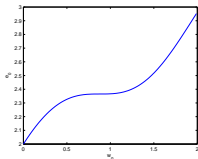
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 0.66$$



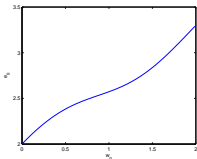
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 1.84$$



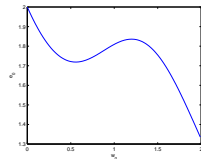
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 2.47$$



$$\alpha_C = 1, \beta_C = 0.52$$



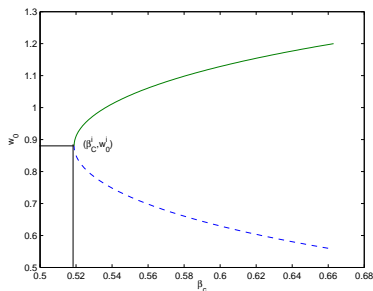
$$\alpha_C = 1, \beta_C = 0.35$$



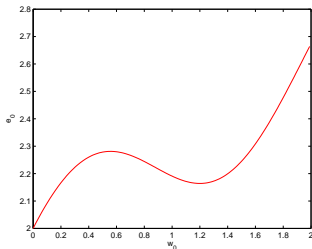
$$\alpha_C = -1, \beta_C = -0.66$$

# Première condition de stabilité : le terme de premier ordre, $e_1$ , est nul

$$\beta_C(\lambda_C, \alpha_C, w_0) = \frac{\alpha_C}{G_{10}(w_0)} \iff \hat{\beta}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}$$

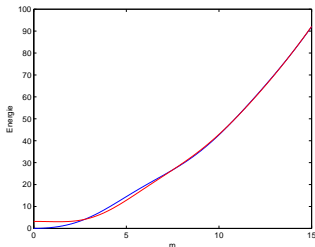


## Deuxième condition de stabilité : la matrice Hessienne, $e_2$ , est définie positive



$$\alpha_C = 1, \beta_C = 0.66,$$

$$w_0^* = 1.2$$



$$\lambda_1(\alpha_C, k, w_0^*) > 0,$$

$$\lambda_2(\alpha_C, k, w_0^*) > 0$$

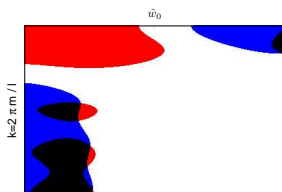
## Deuxième condition de stabilité : la matrice Hessienne, $e_2$ , est définie positive

- $e_2$  est définie positive ssi les valeurs propres de  $e_2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sont strictement positives.
- $\lambda_1 = e_{20} + e_{21}$  et  $\lambda_2 = e_{20} - e_{21}$ ,
- $\lambda_{\pm}(\lambda_C, \alpha_C, \beta_C, d, \epsilon, w_0, k) = \lambda_C k^2 + \beta_C(\alpha_C, w_0) G_{\pm}(d, \epsilon, w_0, k)$ ,
- Propriété d'invariance d'échelle  
 $\Rightarrow \hat{\lambda}_{\pm}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0, k) = k^2 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)} \hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k)$
- Condition de stabilité de second ordre :

$$\hat{\lambda}_{\pm}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0, k) > 0, \forall k \Leftrightarrow \hat{\alpha} \hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k) > -k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0), \forall k .$$

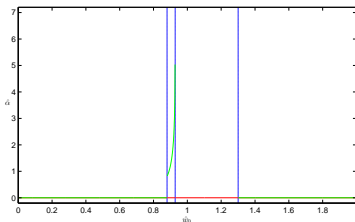


## Deuxième condition de stabilité : la matrice Hessienne, $e_2$ , est définie positive

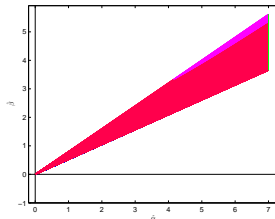


**Figure:** Les régions colorées en blanc, rouge, bleu et noir correspondent respectivement à  $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) > 0$  et  $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) > 0$ ,  $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) > 0$  et  $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) < 0$ ,  $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) < 0$  et  $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) > 0$ , et  $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) < 0$  et  $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) < 0$ .

# Diagramme de phase du modèle d'une barre longue



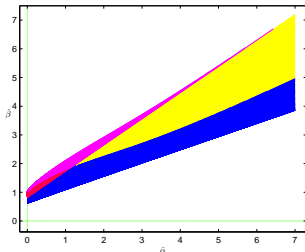
Les limites du paramètre  $\hat{\alpha}$



$0.88 < \hat{w}_0 < 1.3$

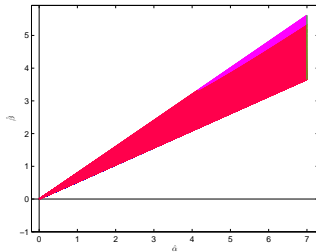
# Diagramme de phase du modèle des CAOS

Modèle de cercle



$$0.69 < \hat{r}_0 < \infty$$

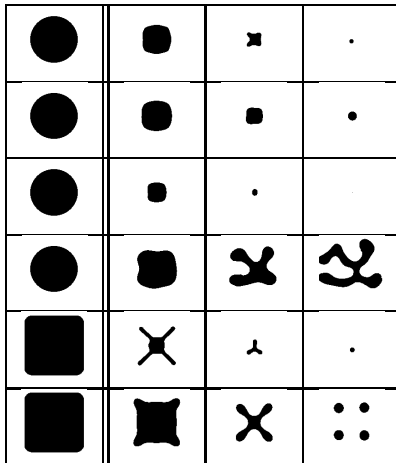
Modèle de la barre



$$0.88 < \hat{w}_0 < 1.3$$

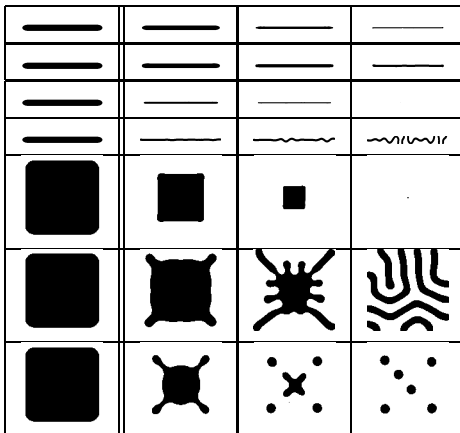
## Résultats expérimentaux

# Evolution du contour par descente de gradient en utilisant le terme géométrique



## Résultats expérimentaux

# Evolution du contour par descente de gradient en utilisant le terme géométrique



# Plan de la présentation

- 1 **Motivations**
  - Modélisation d'une région
  - Problématique
- 2 **Stabilité du modèle de gaz de cercles**
  - Etude variationnelle
  - Conditions de stabilité
- 3 **Stabilité du modèle d'une barre longue**
  - Etude variationnelle
  - Conditions de stabilité
  - Résultats expérimentaux
- 4 **Conclusion et perspectives**

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

- Diagramme de phase du modèle d'un cercle en vue de l'extraction des arbres,
- Diagramme de phase du modèle d'une barre longue en vue de l'extraction des réseaux routiers.

## Perspectives

- Analyse de la région critique du diagramme de phase du modèle des CAOS permettant d'avoir un cercle stable et une portion stable d'une barre,
- Analyse de la stabilité d'une barre en tenant compte de l'effet des bords.

**Merci pour votre attention!**

**Questions?**