

**Ana Karolinnna Maia de Oliveira**

***Estudo de Casos de Complexidade de Coloração  
Gulosa de Vértices e de Arestas.***

Fortaleza – CE

Abril/2011

Ana Karolinnna Maia de Oliveira

*Estudo de Casos de Complexidade de Coloração  
Gulosa de Vértices e de Arestas.*

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Ceará.

Orientador:

Cláudia Linhares Sales

Co-orientador:

Rudini Menezes Sampaio

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO  
PARGO - PARALELISMO, GRAFOS E OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Fortaleza – CE

Abril/2011

# Resumo

Os problemas de coloração de vértices e de arestas, que consistem em determinar o menor número de cores necessárias para colorir os vértices e as arestas de um grafo, respectivamente, de forma que vértices adjacentes e arestas adjacentes, respectivamente, possuam cores distintas, são problemas computacionalmente difíceis e são objeto de pesquisa recorrente em teoria dos grafos, em virtude dos inúmeros problemas práticos que eles modelam.

No presente trabalho, estudamos o pior desempenho dos algoritmos gulosos de coloração de vértices e de arestas. O algoritmo guloso tem o seguinte princípio geral: receber, um a um, os vértices (respect. as arestas) do grafo a ser colorido, atribuindo sempre a menor cor possível ao vértice (respect. aresta) a ser colorido. Observamos que colorir de forma gulosa as arestas de um grafo equivale a colorir de forma gulosa o seu grafo linha, tendo sido este o maior interesse na pesquisa em coloração gulosa de arestas.

O pior desempenho dos algoritmos é medido pelo maior número de cores que eles podem utilizar. No caso da coloração gulosa de vértices, esse é o número de Grundy ou número cromático guloso do grafo. No caso da coloração de arestas, esse é o índice de Grundy ou índice cromático guloso do grafo. Determinar o número de Grundy de um grafo qualquer é NP-difícil. A complexidade de determinar o índice de Grundy de um grafo qualquer era, entretanto, um problema em aberto.

Na presente dissertação, provamos dois resultados de complexidade. Provamos que o número de Grundy de um  $(q, q - 4)$ -grafo pode ser determinado em tempo polinomial. Essa classe contém estritamente a classe dos cografos e  $P_4$ -esparsos para os quais o mesmo resultado havia sido estabelecido. Esse resultado generaliza, portanto, aqueles resultados. O algoritmo apresentado usa a decomposição primeval desses grafos, determinando o parâmetro em tempo polinomial.

No que se refere à coloração de arestas, provamos que o problema de determinar o índice de Grundy é NP-completo para grafos em geral e polinomial para grafos caterpillar, implicando que o número de Grundy é polinomial para os grafos linha desses. Mais especificamente provamos que o índice de Grundy dos caterpillar é  $\Delta$  ou  $\Delta + 1$  e apresentamos um algoritmo polinomial para determiná-lo exatamente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Coloração Gulosa,  $(q, q - 4)$ -grafos,  $P_4$ -conectividade, Decomposição Primeval, Grafos Linha, Caterpillars.

# *Abstract*

The vertices and edges colourings problems, which consists in determine the smallest number of colours needed to colour the vertices and edges of a graph, respectively, so that adjacent vertices and adjacent edges, respectively, have distinct colours, are computationally hard problems and recurring subject of research in graph theory due to numerous practical problems they model.

In this work, we study the worst performance of greedy algorithms for colouring vertices and edges. The greedy algorithm has the following general principle: to receive, one by one, the vertices (respect. edges) of the graph to be coloured by assigning always the smallest possible colour to the vertex (respect. edge) to be coloured. We note that so greedy colouring the edges of a graph is equivalent to greedily colouring its line graph, this being the greatest interest in research on greedy edges colouring.

The worst performance of the Algorithms is measured by the greatest number of colours they can use. In the case of greedy vertex colouring, this is the Grundy number or greedy chromatic number of the graph. For the edge colouring, this is the Grundy index or greedy chromatic index of the graph. It is known that determining the Grundy number of any graph is NP-hard. The complexity of determining the Grundy index of any graph was however an open problem.

In this dissertation, we prove two complexity results. We prove that the Grundy number of a  $(q, q - 4)$ -graph can be determined in polynomial time. This class contains strictly the class of cographs and  $P_4$ -sparse graphs for which the same result had been established. This result generalizes so those results. The presented algorithm uses the primeval decomposition of graphs, determining the parameter in polynomial time.

About greedy edge colouring, we prove that the problem of determining the Grundy index is NP-complete for general graphs and polynomial for caterpillar graphs, implying that the Grundy number is polynomial for line graphs of caterpillars. More specifically, we prove that the Grundy index of a caterpillar is  $\Delta$  or  $\Delta + 1$  and present a polynomial algorithm to determine it exactly.

**KEYWORDS:** Greedy Colouring,  $(q, q - 4)$ -graphs,  $P_4$ -conectivity, Primeval Decomposition, Line Graphs, Caterpillars.

# *Agradecimentos*

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por tudo.

Várias pessoas contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Sou profundamente grata a todas, e dedico agradecimento especial a algumas delas:

À minha orientadora, Cláudia Linhares, por todo o tempo dedicado, a paciência, a credibilidade depositada e a amizade. Ela realmente me guiou em todos os momentos desta caminhada e esteve presente sempre que precisei. Certamente seu exemplo e seus sábios conselhos ficarão para além desta etapa de mestrado.

À minha família, em especial aos meus pais, Graça e Oliveira, por sempre terem colocado a minha educação em primeiro lugar. Obrigada por todo o amor e dedicação, e pelos esforços de ambos em tornar o ambiente o mais favorável possível aos meus estudos. Espero estar retribuindo um pouco do que fizeram por mim. Agradeço também à minha irmã, Daniele, que sempre me incentivou.

Ao meu amor e verdadeiro companheiro, agora meu marido, Júlio. Mesmo à distância em uma parte do tempo deste mestrado, ele se fez presente e esteve ao meu lado, me dando forças, ajudando e apoiando nos momentos de dificuldade. Ele também fez tudo o possível para tornar o ambiente à minha volta favorável ao meu trabalho. Obrigada amor, por tornar não só esse momento, mas todos da minha vida mais agradáveis e felizes.

Ao meu co-orientador, Rudini Sampaio, meu orientador durante o estágio, Frédéric Havet, e ao colega Victor Campos, pelo grande auxílio nesta dissertação e o trabalho conjunto.

Às minha queridíssimas amigas e companheiras de todas as horas, Camila e Cibele, que acompanharam de perto cada momento desse período de mestrado. Obrigada amigas, por todo o carinho, o colo e o suporte que me deram. Teria sido bem mais difícil sem vocês.

Aos meus amigos Arthur, Marcio, Phablo e Vinícius, pela companhia nas muitas horas de laboratório, pelos estudos em grupo e por serem tão solícitos, ajudando e tirando dúvidas em vários momentos.

Ao professor e amigo Carlos, por ter acreditado em mim desde o início, e também por toda

assistência prestada durante a graduação e o mestrado.

Finalmente, ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização da presente dissertação, e ao projeto EWIN, pelo financiamento do estágio de mestrado de três meses no INRIA, França.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 8
<b>2</b>	<b>Notação e Conceitos Preliminares</b>	p. 12
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	p. 12
2.2	Algumas Classes de Grafos . . . . .	p. 14
2.3	Coloração de Vértices . . . . .	p. 18
2.4	Coloração de Arestas . . . . .	p. 19
<b>3</b>	<b><math>P_4</math>-estrutura de um Grafo</b>	p. 21
3.1	$P_4$ -conectividade . . . . .	p. 21
3.2	$P_4$ -componentes . . . . .	p. 23
<b>4</b>	<b>Decomposição de Grafos</b>	p. 26
4.1	Decomposição Modular . . . . .	p. 26
4.2	Decomposição Primeval . . . . .	p. 29
4.3	Decomposição Primeval de $(q, q - 4)$ -grafos . . . . .	p. 31
<b>5</b>	<b>Casos de Complexidade de Coloração Gulosa</b>	p. 33
5.1	Coloração Gulosa de Vértices . . . . .	p. 33
5.2	Coloração Gulosa de $(q, q - 4)$ -grafos . . . . .	p. 35
5.3	Coloração Gulosa de Arestas . . . . .	p. 40
5.3.1	co- <i>NP</i> -completude de Coloração Gulosa de Arestas . . . . .	p. 42
5.3.2	Índice de Grundy dos Caterpillars . . . . .	p. 46

<b>6 Conclusões</b>	p. 51
<b>Lista de Figuras</b>	p. 53
<b>Índice Remissivo</b>	p. 54
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 56

# 1 Introdução

Seja  $k$  um inteiro positivo. Uma  $k$ -coloração própria de um grafo  $G = (V, E)$  é uma atribuição das cores  $\{1, \dots, k\}$  aos seus vértices, de forma que uma mesma cor não é atribuída a dois vértices vizinhos. O problema clássico de coloração consiste em, dado um grafo  $G$ , encontrar o menor inteiro  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração própria. Esse valor é chamado de *número cromático* de  $G$  e é denotado por  $\chi(G)$ . A  $k$ -coloração própria de arestas é definida de forma similar, mas nesse caso as  $k$  cores são atribuídas às arestas do grafo. O menor inteiro  $k$  para o qual um grafo  $G$  admite uma  $k$ -coloração própria de arestas é o *índice cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ .

Várias aplicações práticas podem ser modeladas com coloração de grafos. Mais especificamente, esse problema é utilizado para modelar situações em que é necessário particionar um conjunto de objetos de acordo com algum critério minimizando o número de partes em que esses objetos são distribuídos, como no caso da alocação de produtos químicos em armazéns, onde os produtos que reagem causando explosões devem ficar em compartimentos diferentes, e deseje-se utilizar o menor número de compartimentos possível. Entre outros exemplos de situações práticas estão a atribuição de frequências a antenas de rádio e o agendamento de palestras em uma conferência [10, 12]. O vasto número de aplicações é um dos motivos da coloração de grafos ser um problema exaustivamente estudado em teoria dos grafos.

Calcular o número cromático de um grafo arbitrário  $G$  é um problema NP-difícil [31]. De fato, mesmo a tarefa de encontrar uma boa aproximação para  $\chi(G)$  é muito difícil. Especificamente, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que o problema de coloração não pode ser aproximado por um fator menor que  $n^\varepsilon$ , a menos que  $P = NP$  [34]. Também é NP-difícil determinar o índice cromático de um grafo [25].

Nesse contexto, é natural que se busque alternativas que funcionem bem na prática, ou que resolvam o problema de maneira ótima para certas classes de grafos. Uma das alternativas mais utilizadas é também uma forma bastante intuitiva de colorir um grafo: cada vértice recebe a menor cor possível, isto é, a menor cor que não foi atribuída a nenhum de seus vizinhos. Essa

estratégia também pode ser utilizada para colorir as arestas do grafo.

Precisamente, o *algoritmo guloso de coloração (de arestas)* é executado sobre um grafo  $G = (V, E)$  e uma ordem de  $V(G)$  ( $E(G)$ ), atribuindo a cor  $i$  a um vértice (aresta), se  $i$  é a menor cor tal que não existe nenhum vizinho desse vértice (aresta) previamente colorido com a cor  $i$ . O *número de Grundy* de um grafo  $G = (V, E)$ , denotado por  $\Gamma(G)$ , é o maior inteiro  $k$  tal que existe uma ordem de  $V(G)$  que, se utilizada pelo algoritmo guloso, leva o algoritmo a retornar uma coloração com  $k$  cores. Determinar  $\Gamma(G)$  para um grafo qualquer  $G$  é um problema NP-difícil [41]. O *índice de Grundy*, parâmetro correspondente ao número de Grundy para coloração gulosa de arestas, é denotado por  $\Gamma'(G)$ . Estabelecer  $\Gamma'(G)$  é um problema equivalente à estabelecer  $\Gamma(L(G))$ , onde  $L(G)$  é o grafo que tem como conjunto de vértices o conjunto de arestas de  $G$  e dois vértices são adjacentes em  $L(G)$  se as arestas correspondentes em  $G$  são adjacentes.  $L(G)$  é chamado *grafo linha de  $G$* .

Neste trabalho, analisamos o problema de coloração gulosa para a classe dos  $(q, q - 4)$ -grafos e o problema geral de coloração gulosa de arestas.

Seja um  $P_4$  um caminho induzido com quatro vértices. Dizemos que  $G$  é um  $(q, q - 4)$ -grafo se nenhum subconjunto de no máximo  $q$  vértices de  $V(G)$  induz mais que  $(q - 4)$   $P_4$ 's distintos [7]. Tal classe generaliza outras classes de grafos como os *cografos*, que são os grafos livres de  $P_4$  e os  $P_4$ -esparsos, que são exatamente os  $(5, 1)$ -grafos.

Existe ainda uma série de outras classes de grafos que são definidas com relação à quantidade de  $P_4$ 's induzidos que possuem, das quais um estudo detalhado é apresentado em [37].

A pesquisa sobre o conjunto de  $P_4$ 's de um grafo  $G$ , também chamado de  $P_4$ -estrutura de  $G$ , tem sido bastante explorada nos últimos anos, motivado principalmente pelo fato de que o complemento de um  $P_4$  também é um  $P_4$ , o que torna as propriedades expressas em termos de  $P_4$ 's válidas no complemento. Note, por exemplo, que o complemento de um cografo é também um cografo.

Alguns problemas foram propostos utilizando a análise da  $P_4$ -estrutura de um grafo. Dois grafos são  $P_4$ -isomorfos se existe uma bijeção entre seus vértices de forma que um conjunto de quatro vértices induz um  $P_4$  no primeiro grafo se e somente se sua imagem induz um  $P_4$  no segundo grafo. A conjectura proposta em [14] e provada posteriormente em [38], afirma que um grafo  $P_4$ -isomorfo a um grafo perfeito também é perfeito.

O abrangente estudo da  $P_4$ -estrutura de grafos motivou a introdução da noção de  $P_4$ -conectividade [30]. Um grafo  $G$  é chamado de  $P_4$ -conexo se para toda partição de seus vértices em dois conjuntos não vazios e disjuntos, algum  $P_4$  induzido de  $G$  contém vértices de ambas as partes. A

figura 1.1 apresenta todas as partições em dois conjuntos de vértices de um  $P_4$ , que é trivialmente um grafo  $P_4$ -conexo. As  $P_4$ -componentes de um  $G$  são seus subgrafos induzidos maximais que são  $P_4$ -conexos.

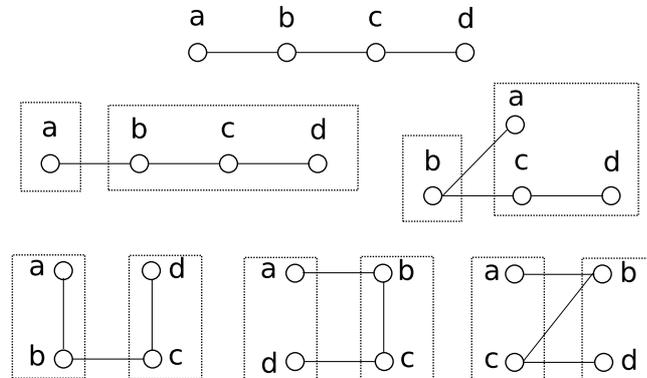


Figura 1.1:  $P_4$  e suas partições.

O conceito de  $P_4$ -conectividade leva a um teorema estrutural aplicável a um grafo  $G$  qualquer (Teorema 3.1). Tal teorema sugere a associação de uma árvore  $T(G)$  a  $G$ , que representa uma decomposição do grafo, chamada de *decomposição primeval*, a ser definida posteriormente.

Decompor um grafo é uma estratégia de divisão e conquista, que facilita a resolução de problemas. A árvore de decomposição primeval pode ser encontrada em tempo linear e é única, a menos de isomorfismos [8]. Para algumas classes de grafos, podemos aplicar essa decomposição e, através de programação dinâmica, resolver problemas que são difíceis no caso geral.

A decomposição primeval possui uma relação especial com a classe dos  $(q, q - 4)$ -grafos. As  $P_4$ -componentes dos  $(q, q - 4)$ -grafos, que são folhas na árvore de decomposição primeval, são grafos simples e bem definidos.

Diversos problemas difíceis no caso geral foram resolvidos em tempo linear para os  $(q, q - 4)$ -grafos utilizando decomposição primeval [5]. Dentre eles, citamos a coloração de grafos [3]. O resultado principal deste trabalho é um algoritmo polinomial que utiliza a mesma decomposição para resolver a coloração gulosa para os  $(q, q - 4)$ -grafos.

Como mencionado anteriormente, também analisamos o problema geral coloração gulosa de arestas. Colorir as arestas de um grafo de forma gulosa equivale a colorir de forma gulosa o seu grafo linha, tendo sido este o maior interesse na pesquisa em coloração gulosa de arestas. Para o problema de coloração gulosa de arestas, apresentamos uma prova de NP-completude e damos um algoritmo polinomial para resolvê-lo na classe dos *caterpillars*, árvores tais que

se todas as folhas e arestas incidentes às mesmas forem removidas, o que resta do grafo é um caminho induzido.

O texto está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, estabelecemos a terminologia utilizada e outros conceitos necessários ao entendimento do trabalho. Nos Capítulos 3 e 4, apresentamos teoremas estruturais e decomposições de grafos que serão úteis ao longo da dissertação. No Capítulo 3, introduziremos o conceito de  $P_4$ -conectividade e veremos um teorema estrutural de grafos que utiliza esse conceito. No Capítulo 4, apresentaremos as decomposições modular e primeval de um grafo. No Capítulo 5, investigamos a coloração gulosa nos  $(q, q - 4)$ -grafos, bem como a coloração gulosa de arestas. Finalmente, concluímos o texto no Capítulo 6 fazendo algumas reflexões sobre futuros trabalhos.

## 2 *Notação e Conceitos Preliminares*

Neste capítulo, são apresentadas as definições básicas de teoria dos grafos necessárias ao entendimento do trabalho, bem como a notação utilizada. Conceitos mais específicos são dados ao longo do texto. A maior parte das definições foi retirada dos livros [11] e [12], que podem ser consultados para informações adicionais.

### 2.1 **Conceitos Básicos**

Um *grafo*  $G$  é uma tripla ordenada  $(V(G), E(G), \psi_G)$  consistindo de um conjunto não-vazio  $V(G)$  de *vértices*, um conjunto  $E(G)$ , disjunto de  $V(G)$ , de *arestas*, e uma função  $\psi_G$  que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices de  $G$ . Comumente, usamos  $G = (V, E)$  como notação de um grafo com conjunto de vértices  $V$  e conjunto de arestas  $E$ . Todo grafo admite uma representação gráfica onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é representada por uma linha unindo os pontos correspondentes aos vértices associados a tal aresta. Por simplicidade, escrevemos  $e = uv$  ao invés de  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , e, quando conveniente, utilizamos  $uv$  para nos referirmos à aresta  $e$ .

Se  $e$  é uma aresta e  $u$  e  $v$  são vértices tais que  $e = uv$ , dizemos que  $e$  *incide* em  $u$  e em  $v$  e que  $u$  e  $v$  *incidem* em  $e$ . Dizemos ainda que tais vértices são as *extremidades* de  $e$ , e que a aresta  $e$  *une*  $u$  e  $v$ .

Uma aresta  $e$  é um *laço* se as suas duas extremidades são iguais. Duas arestas são *múltiplas* se elas coincidem em ambas as extremidades. Um grafo  $G$  é *simples* se ele não possui arestas múltiplas nem laços, e o seu conjunto de vértices é finito. Neste trabalho, tratamos apenas de grafos simples, e as definições e resultados que seguem dizem respeito aos mesmos.

Duas arestas são *adjacentes* se elas possuem uma extremidade em comum (são incidentes a um mesmo vértice) e dois vértices são adjacentes se eles são incidentes a uma mesma aresta. A *vizinhança*  $N_G(v)$  de um vértice  $v$  em um grafo  $G$  é o conjunto de todos os vértices adjacentes a  $v$ . Definimos também a vizinhança de um conjunto de vértices  $S$ ,  $N_G(S)$ , como a união das

vizinhanças de cada vértice em  $S$  menos os vértices do próprio  $S$ . O grau de um vértice  $v$ ,  $d_G(v)$ , é o número de arestas incidentes a  $v$  em  $G$ , isto é, o número de vértices adjacentes a  $v$ . Denotamos por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  o menor e o maior valor de entre os graus dos vértices de  $G$ , respectivamente. A vizinhança de arestas é definida de forma similar.

Chamamos *trivial* o grafo com apenas um vértice.  $G$  é *completo* se existe uma aresta entre cada par de vértices distintos. Denotamos por  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices.  $G$  é *vazio* se não possui arestas. O *complemento*  $\bar{G}$  de  $G$  é o grafo simples cujo conjunto de vértices é  $V(G)$  e cujas arestas são exatamente os pares de vértices não adjacentes de  $G$ .

Dois grafos  $G_1 = (V, E)$  e  $G_2 = (V, E)$  são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção  $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  tais que  $\{u, v\} \in E(G_1)$  se, e somente se,  $\{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$ .

Dizemos que o grafo  $H$  é um *subgrafo* de  $G$  ( $H \subseteq G$ ) se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e  $\psi_H$  coincide com  $\psi_G$ . Seja  $S$  um subconjunto não-vazio de  $V$ . O subgrafo de  $G$  cujo conjunto de vértices é  $S$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de  $G$  que tem as duas extremidades em  $S$  é o subgrafo de  $G$  induzido por  $S$  e é denotado por  $G[S]$ . Dizemos que  $G[S]$  é um *subgrafo induzido* de  $G$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é *livre de  $H$*  se nenhum subconjunto de  $V$  induz um grafo isomorfo a  $H$ .

Um *emparelhamento* em um grafo  $G$  é um subconjunto de arestas não-adjacentes entre si. Um subconjunto  $S$  de  $V(G)$  é um *conjunto independente* ou *conjunto estável* de  $G$  se nenhum par de vértices de  $S$  é adjacente em  $G$ . Uma *clique* é um subconjunto  $K$  de  $V(G)$  tal que  $G[K]$  é completo. A cardinalidade do maior conjunto estável e da maior clique de um grafo  $G$  são denotadas, respectivamente, por  $\alpha(G)$  e  $\omega(G)$ .

Um *passeio* em  $G$  é uma sequência finita e não nula  $W = v_0v_1 \dots v_k$ , tal que, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  definem uma aresta. Dizemos que  $W$  é um passeio de  $v_0$  para  $v_k$ . O inteiro  $k$ , que é a quantidade de arestas, é o *tamanho* de  $W$ . Se os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  de  $W$  são todos distintos entre si, dizemos que esse passeio é um *caminho*, e se  $v_0, v_1, \dots, v_k$  são todos distintos entre si, exceto por  $v_0 = v_k$ , dizemos que é um *ciclo*. As arestas de  $G$  que unem dois vértices não sucessivos em um caminho são chamadas de *cordas*. Um *caminho induzido* com  $k$  vértices é denotado por  $P_k$  e um ciclo induzido com  $k$  vértices é denotado por  $C_k$ .

Uma *partição* de um conjunto  $S$  é uma família de subconjuntos, também chamados partes ou classes,  $\mathcal{P} = \{S_i \mid i \in I\}$ , tais que  $\bigcup_{i \in I} S_i = S$  e  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , para todo  $i, j \in I$  onde  $i \neq j$ .

Dois vértices  $u$  e  $v$  estão *conectados* se existe um caminho entre  $u$  e  $v$  em  $G$ . Todo grafo  $G$  admite uma partição de  $V(G)$  em subconjuntos não-vazios  $V_1, V_2, \dots, V_l$  tal que dois vértices

$u$  e  $v$  estão conectados se e somente se ambos  $u$  e  $v$  pertencem ao mesmo subconjunto  $V_i$ . Os subgrafos  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_i]$  são chamados de *componentes* de  $G$ . Se  $G$  tem exatamente uma componente, então  $G$  é dito *conexo*. Equivalentemente, dizemos que um grafo é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados. Caso contrário, o grafo é chamado de *desconexo*.

Dois grafos são *disjuntos* se eles não tem vértices em comum. A *união* de dois grafos simples  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo  $G_1 \cup G_2$  com conjunto de vértices  $V(G_1) \cup V(G_2)$  e conjunto de arestas  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . Se  $G_1$  e  $G_2$  são disjuntos, nos referimos a união deles como *união disjunta*, também denotada neste texto por operação  $\oplus$ . Essa operação é associativa e comutativa, e pode ser estendida para um número qualquer de grafos.

A *junção* de dois grafos disjuntos  $G_1$  e  $G_2$ , chamada de operação  $\odot$ , é o grafo  $G_1 \odot G_2$  resultante da aplicação de  $\odot$  acrescido do conjunto de arestas  $\{\{v, w\} : v \in V(G_1), w \in V(G_2)\}$ , que são todas as arestas entre  $V(G_1)$  e  $V(G_2)$ .

Dados grafos  $G$  e  $H$ , chamamos de *produto lexicográfico* de  $G$  por  $H$  o grafo cujo conjunto de vértices é formado pelos elementos de  $V(G) \times V(H)$  e cujo conjunto de arestas é  $E(G[H]) = \{\{(a, x), (b, y)\} \mid ab \in E(G), \text{ ou } a = b \text{ e } xy \in E(H)\}$ . O produto lexicográfico de  $G$  por  $H$  pode ser visto como se cada vértice de  $G$  fosse substituído por uma cópia de  $H$ .

Nos capítulos seguintes, quando estiver claro a que grafo estamos nos referindo, podemos omitir, nas notações dadas acima, o símbolo que indica um grafo específico. Por exemplo, em vez de  $V(G)$  e  $N_G(v)$  escrevemos apenas  $V$  e  $N(v)$ .

## 2.2 Algumas Classes de Grafos

Um grafo  $G$  é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos  $X$  e  $Y$  tais que toda aresta tem uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ . Se todo vértice de  $X$  é adjacente a todo vértice de  $Y$ , então  $G$  é um *grafo bipartido completo* denotado por  $K_{r,s}$ , onde  $r = |X|$  e  $s = |Y|$ . Os  $K_{1,s}$  são chamados *estrelas*.

Chamamos de *acíclico* o grafo que não contém ciclos. Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Os vértices de uma árvore são chamados de *nós*. As *folhas* são os nós da árvore que possuem grau 1. Os nós que não são folhas são chamados de *internos*. Em algumas aplicações, destaca-se um vértice  $r$  como *raiz* e a árvore passa a ser enraizada em  $r$ . Dada uma árvore  $T = (V, E)$  enraizada em  $r$ , os *descendentes* de um nó  $v \in V$  da árvore são todos os vértices  $u$  tais que  $v$  é um nó interno do caminho de  $u$  até  $r$  na árvore. Diz-se que  $v$  é um *ancestral* de  $u$  se

$u$  é um descendente de  $v$ . Os *filhos* de um vértice  $v$  são todos os nós que dele descendem e que são adjacentes a ele. Se  $u$  é filho de  $v$ , então  $v$  é *pai* de  $u$ .

Um grafo  $G$  é  $k$ -regular se  $d(v) = k$  para todo  $v \in V$ . Dizemos que  $G$  é *regular* se  $G$  é  $k$ -regular para algum inteiro  $k$ . Os grafos 3-regulares também são referidos como *grafos cúbicos*.

O *grafo linha*  $L(G)$  de um grafo  $G$  tem as arestas de  $G$  como seus vértices. Dois vértices de  $L(G)$  são adjacentes se as arestas correspondentes em  $G$  possuem uma extremidade em comum. Na Figura 2.1 podemos ver um exemplo de um grafo com o grafo linha correspondente.



Figura 2.1: Um grafo e seu grafo linha.

Um grafo  $H$  é dito ser um grafo linha se existe algum grafo  $G$  tal que  $H$  é isomorfo a  $L(G)$ . A classe dos grafos linha pode ser caracterizada por uma lista de subgrafos (induzidos) proibidos, conforme foi mostrado em [9]. A lista dos 9 subgrafos proibidos é apresentada na Figura 2.2.

Um grafo  $G = (V, E)$  é *split* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos  $S$  e  $K$  tal que  $S$  é um conjunto estável e  $K$  é uma clique.

Recordamos que um  $P_4$  é um caminho induzido com 4 vértices.

A classe dos *cografos* [33], também conhecidos como grafos livres de  $P_4$ , pode ser definida recursivamente como segue:

- O grafo trivial é um cografo;
- Se  $G$  é um cografo, então  $\bar{G}$  também o é;
- Se  $G_1, \dots, G_n$  são cografos disjuntos, então o grafo  $G = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} G_i$  é um cografo.

Esses grafos possuem uma decomposição muito simples, que facilita a resolução de problemas, pois todo cografo não trivial é a união disjunta ou a junção de dois cografos menores [15].

Um grafo  $G$  é  $P_4$ -reduzível se, e somente se, cada vértice de  $G$  pertence a no máximo um  $P_4$

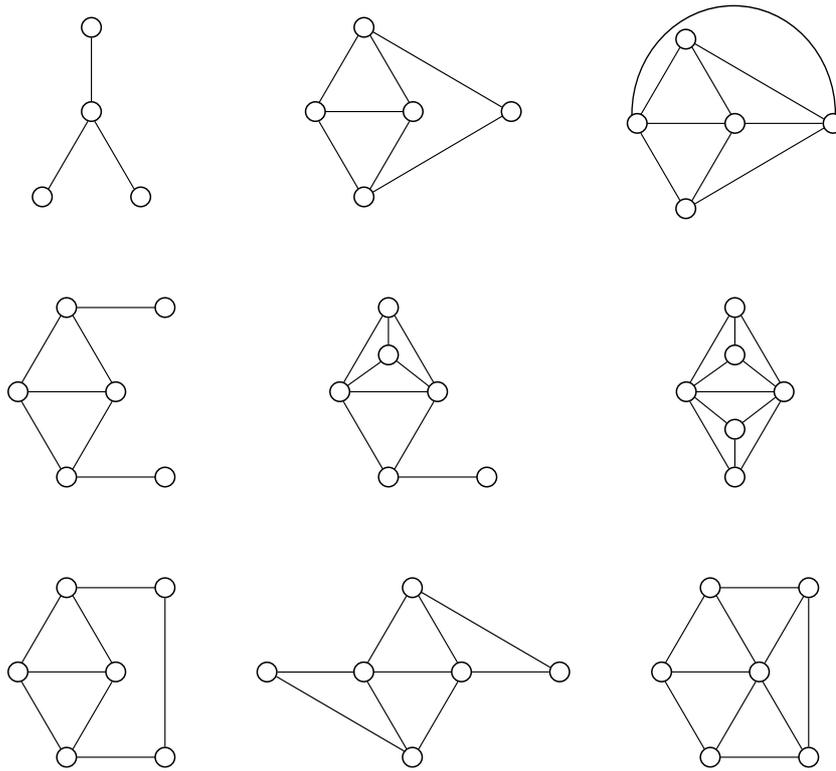


Figura 2.2: Os nove subgrafos proibidos de um grafo linha.

induzido em  $G$  [27]. Note que essa classe é uma generalização dos cografos, uma vez que os mesmos não possuem  $P_4$ 's.

Dizemos que um grafo  $G$  é uma *aranha* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em 3 conjuntos disjuntos  $R$ ,  $S$  e  $K$  tal que:

- $K$  é uma clique,  $S$  é um conjunto estável e  $|K| = |S| \geq 2$ ;
- Todo vértice de  $R$  se liga a todo vértice de  $K$  e a nenhum vértice de  $S$ ;
- Existe uma bijeção  $f : S \rightarrow K$  tal que:
  1.  $\forall s \in S, N(s) = f(s)$  (aranha magra);
  2. ou  $\forall s \in S, N(s) = K \setminus \{f(s)\}$  (aranha gorda).

Frequentemente, nos referimos ao conjunto  $R$  como *cabeça*, ao conjunto  $K$  como *corpo* e ao conjunto  $S$  como *pernas* da aranha. Exemplos de aranhas magra e gorda são mostrados na Figura 2.3.

Dizemos que um grafo é  $P_4$ -esparso se cada subconjunto de 5 vértices seus induz no máximo um  $P_4$  [24]. Uma das caracterizações dessa classe afirma que  $G$  é  $P_4$ -esparso se, e

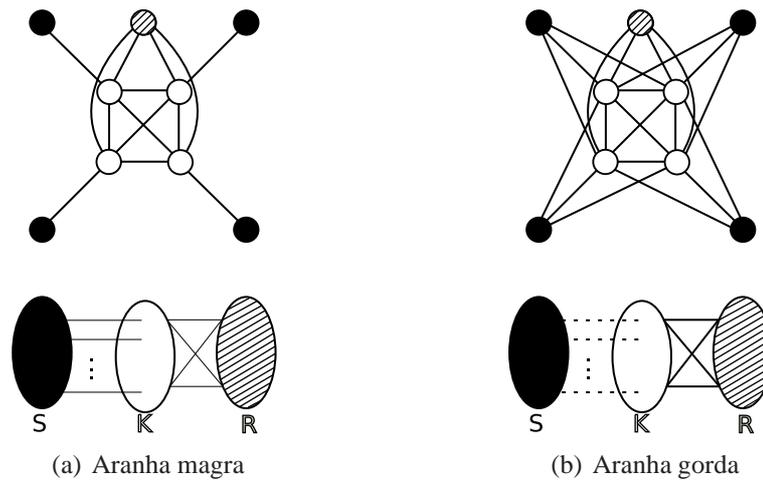
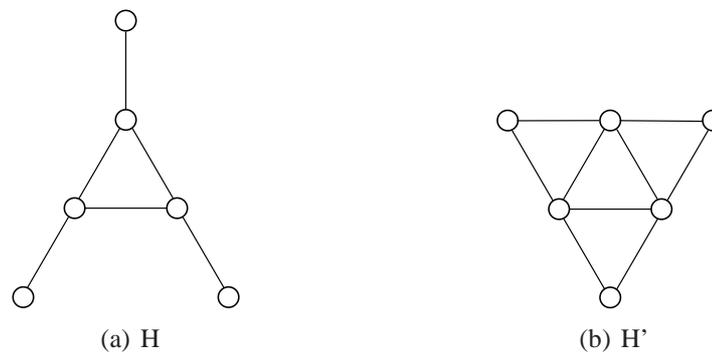


Figura 2.3: Aranhas.

somente se, todo subgrafo  $H$  induzido em  $G$  ou é desconexo, ou possui complemento desconexo, ou é uma aranha [29].

Os  $P_4$ -leve [26] são os grafos cujos subgrafos induzidos de até seis vértices possuem no máximo dois  $P_4$  induzidos ou são isomorfos ao grafo  $H$  ou ao grafo  $H'$  da Figura 2.4.

Figura 2.4: Grafos  $P_4$ -leve.

A classe  $P_4$ -extensível contém os grafos  $G$  tais que, para todo  $P_4$  induzido  $P$  de  $G$ , existe um outro  $P_4$  induzido  $P'$  de  $G$ , diferente de  $P$ , que intercepta  $P$  [28].

Os grafos  $P_4$ -arrumados são aqueles em que para todo  $P_4$  induzido  $P$ , existe no máximo um vértice  $v$  tal que  $v \cup V(P)$  induz mais de um  $P_4$  [18].

Em [37] pode ser encontrado um estudo detalhado das  $P_4$ -classes citadas acima.

Para finalizar este tópico, temos a definição da classe que faz parte do estudo central deste trabalho. Os  $(q, t)$ -grafos foram introduzidos em [7] e sua definição foi motivada pelo estudo das várias classes que contém um número restrito de  $P_4$ , como  $P_4$ -reduzível,  $P_4$ -esparso e  $P_4$ -leve. Tal estudo teve início com os cografos. A investigação dos grafos com poucos  $P_4$ 's foi

incetivada especialmente pelos bons resultados alcançados nos cografos, onde alguns problemas que são difíceis no caso geral podem ser resolvidos eficientemente, a exemplo do problema de coloração, que é muito simples para esses grafos: o número cromático da união disjunta de dois cografos é igual ao maior entre os números cromáticos de cada um deles, enquanto o número cromático da junção é a soma dos números cromáticos de cada.

Um grafo  $G = (V, E)$  pertence à classe dos  $(q, t)$ -grafos se nenhum conjunto de  $V$  com no máximo  $q$  vértices induz mais do que  $t$   $P_4$ 's distintos em  $G$ . Neste trabalho tratamos dos  $(q, q - 4)$ -grafos. Na Figura 2.5 vemos o exemplo de um grafo que pertence e outro que não pertence a essa classe para  $q = 5$ . Observe, entretanto, que todo grafo está na classe  $(q, q - 4)$  para algum  $q$ . Podemos ver que esse fato é verdadeiro tomando  $q = \binom{n}{4} + 4$ , onde  $n = |V|$ , pois certamente um grafo com  $n$  vértices não terá mais que  $\binom{n}{4}$   $P_4$ 's. Note que a definição da classe  $(q, q - 4)$  permite que ela contenha grafos com menos de  $q$  vértices, e que todo subgrafo induzido de um  $(q, q - 4)$ -grafo pertence à mesma classe, para o mesmo  $q$ .

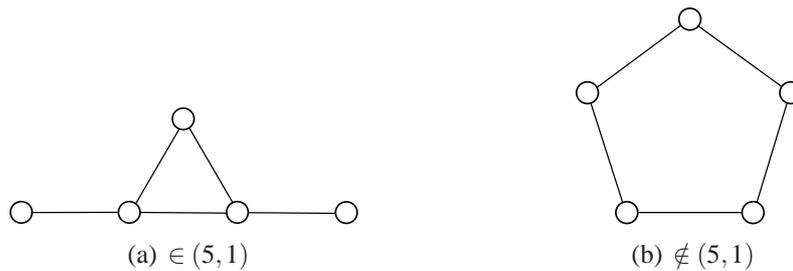


Figura 2.5: Exemplo de grafos que pertencem e não pertencem aos  $(5, 1)$ -grafos.

Além de generalizar várias classes, como a classe dos cografos, que são os  $(4, 0)$ -grafos, e a classe dos  $P_4$ -esparcos, que são os  $(5, 1)$ -grafos, os  $(q, q - 4)$ -grafos possuem uma decomposição com um estrutura simples, como veremos mais adiante.

## 2.3 Coloração de Vértices

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma coloração de vértices de  $G$ , ou simplesmente uma *coloração* de  $G$ , é uma função  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  que associa a cada vértice do grafo um número inteiro, denominado *cor*. Denotamos por  $c(H)$  o conjunto de cores de uma coloração  $c$  de um grafo  $G$  utilizadas em um subgrafo  $H$  de  $G$ . Se uma coloração de um grafo  $G$  possui  $k$  cores, também podemos chamá-la de *k-coloração* de  $G$ . Habitualmente, escolhemos  $\{1, 2, \dots, k\}$  para ser o conjunto de inteiros representativo das  $k$  cores de uma  $k$ -coloração.

Alternativamente, uma  $k$ -coloração de um grafo  $G$  pode ser vista como uma partição  $\mathcal{P} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$  do conjunto de vértices de  $G$  em  $k$  conjuntos disjuntos onde cada conjunto  $S_i$

contém os vértices coloridos com a cor  $i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Os conjuntos  $S_i$  são as *classes de cores* da coloração.

Dizemos que uma coloração  $c$  é *própria* se uma mesma cor não é atribuída a dois vértices vizinhos. Em uma  $k$ -coloração própria, cada classe de cor é um conjunto estável. Como tratamos apenas de colorações próprias nesse texto, nos referimos às mesmas apenas como colorações ou  $k$ -colorações.

Um grafo é  $k$ -colorível se admite um  $k$ -coloração. O menor inteiro  $k$  para o qual um grafo  $G$  é  $k$ -colorível é o *número cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ .

Em um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $|V| = n$ , cada classe de cor possui no máximo  $\alpha(G)$  cores, uma vez que são conjuntos estáveis. Dessa forma, temos o seguinte limite inferior para o número cromático:  $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$ . Um outro limite inferior para  $\chi(G)$  é o tamanho da maior clique, já que em um grafo completo todos os vértices devem receber cores distintas. O Teorema 2.1 mostra um limite superior para  $\chi(G)$ .

**Teorema 2.1** [13] *Seja  $G$  um grafo conexo. Então,  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ , a menos que  $G$  seja um ciclo ímpar ou um grafo completo, situações em que  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ .*

É possível decidir em tempo polinomial se  $\chi(G) = 1$  ou  $2$ . Entretanto, determinar se um grafo qualquer é  $k$ -colorível é um problema  $NP$ -completo para todo  $k \geq 3$  [31]. Consequentemente, determinar  $\chi(G)$ , dado um grafo  $G$ , é um problema  $NP$ -difícil. Além disso, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que o problema de coloração não pode ser aproximado por um fator menor que  $n^\varepsilon$ , a menos que  $P = NP$  [34]. Em algumas classes específicas, porém, esse parâmetro pode ser obtido em tempo polinomial, como é o caso dos  $(q, q-4)$ -grafos [3].

## 2.4 Coloração de Arestas

A coloração de arestas é definida de forma similar à coloração de vértices. Dessa forma, uma  $k$ -coloração própria de arestas de um grafo  $G = (V, E)$ , que chamamos aqui simplesmente de  $k$ -coloração de arestas, é uma atribuição de  $k$  cores às suas arestas, de tal forma que uma mesma cor não é atribuída a duas arestas adjacentes.

Uma  $k$ -coloração de arestas de um grafo  $G$  também pode ser vista como uma partição  $\mathcal{P} = (M_1, M_2, \dots, M_k)$  do conjunto de arestas do grafo em  $k$  conjuntos disjuntos onde cada conjunto  $M_i$  contém as arestas coloridas com a cor  $i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Cada  $M_i$  é um emparelhamento de  $G$ .

Observe que uma  $k$ -coloração de arestas de um grafo  $G$  qualquer é uma  $k$ -coloração de vértices do grafo linha  $L(G)$  de  $G$ .

Um grafo é  $k$ -colorível em arestas se admite um  $k$ -coloração de arestas. O menor inteiro  $k$  para o qual um grafo  $G$  é  $k$ -colorível em arestas é o *índice cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ . Claramente,  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ .

É fácil ver que  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ , pois todas as arestas incidentes ao vértice de maior grau em um grafo  $G$  são adjacentes entre si e portanto devem receber cores diferentes em uma coloração de arestas. O limite superior para o índice cromático é dado pelo conhecido Teorema de Vizing, onde afirma-se que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , para um grafo  $G$  qualquer [12,40]. Assim, dado um grafo  $G$ , temos que  $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$ . Se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , dizemos que  $G$  pertence à *classe 1*. Caso contrário,  $G$  pertence à *classe 2*. Grafos bipartidos pertencem à classe 1 [12,32], mas determinar o índice cromático de um grafo arbitrário é *NP-completo*, como foi mostrado em [25]. De fato, nesse artigo é mostrado o seguinte teorema:

**Teorema 2.2** [25] *Determinar se o índice cromático de um grafo cúbico é 3 ou 4 é NP-completo.*

## 3 $P_4$ -estrutura de um Grafo

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de  $P_4$ -conectividade e  $P_4$ -componentes de um grafo. Esses conceitos foram usados para produzir um teorema estrutural de grafos que será utilizado nesta dissertação.

### 3.1 $P_4$ -conectividade

O conceito de  $P_4$ -conectividade foi introduzido em [30] e se relaciona a outro conceito muito estudado em computação, que é a conectividade de um grafo. Sua definição também foi motivada pelas relações existentes entre  $P_4$ 's em classes de grafos como  $P_4$ -reduzível, onde cada vértice pertence a no máximo um  $P_4$ , entre outras classes discutidas amplamente em [37], e ainda pela observação de que o complemento de um  $P_4$  é um  $P_4$ .

Dizemos que um grafo  $G = (V, E)$  é  $P_4$ -conexo se para toda partição de  $V$  em dois conjuntos disjuntos e não vazios  $V_1$  e  $V_2$ , existe um  $P_4$  induzido cruzando a partição, isto é, um  $P_4$  contendo vértices de  $V_1$  e  $V_2$ . Obviamente, um  $P_4$  é um grafo  $P_4$ -conexo. Como ilustração, as partições de um  $P_4$  são apresentadas na Figura 3.1.

Aranhas com  $R = \emptyset$  também são  $P_4$ -conexas, pois observe que sempre existem  $P_4$ 's sem cordas entre os vértices de  $S$  e  $K$ . No primeiro caso da aranha (aranha magra), em que todo vértice de  $S$  tem um e somente um vizinho em  $K$ , todos diferentes (pela bijeção), temos  $P_4$ 's formados por dois vértices quaisquer de  $S$  e seus respectivos vizinhos em  $K$ , já que os vértices de  $S$  não são adjacentes por fazerem parte de um conjunto independente e os de  $K$  são todos vizinhos entre si, por fazerem parte de uma clique. No segundo caso (aranha gorda), em que cada vértice de  $S$  tem um único não vizinho, e nenhum tem o mesmo não vizinho, também temos  $P_4$ 's formados por dois vértices quaisquer de  $S$ , onde para um vértice de  $S$ ,  $s_1$ , escolhemos um vizinho qualquer dele na clique,  $k_i$ , e então pegamos o vértice não vizinho de  $k_i$  em  $S$ ,  $s_i$ , e o não vizinho de  $s_1$  em  $K$ ,  $k_1$ . Então, em qualquer partição dos vértices de uma aranha, se tivermos somente vértices de  $S$  em uma das partições, escolhemos qualquer vértice e teremos

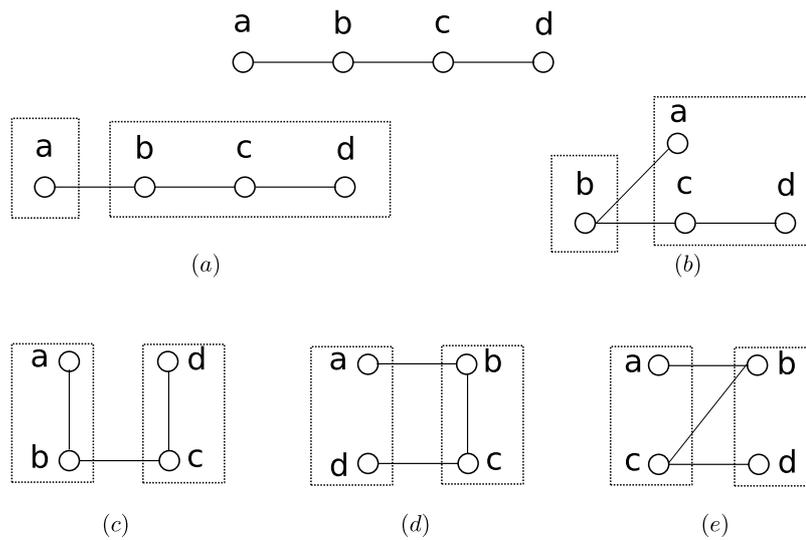


Figura 3.1:  $P_4$  e suas partições.

um  $P_4$  partindo dele e passando por um vértice de  $K$  que está na outra componente. Para uma partição somente com vértice de  $K$ , procedemos da mesma maneira, e para partições contendo ambos vértices de  $K$  e  $S$ , pegamos um vértice de  $S$  em cada uma das partições e construímos o  $P_4$  da maneira citada acima.

Grafos  $P_4$ -conexos tem que ser conexos, mas não podem ter uma grande quantidade de arestas, pois nesse caso vão haver partições em que não temos nenhum  $P_4$  sem cordas cruzando as partes. Note, por exemplo, que um grafo completo não satisfaz essa definição.

Os cografos, que são grafos livres de  $P_4$ , não são grafos  $P_4$ -conexos. Um outro exemplo de grafo não  $P_4$ -conexo pode ser visto na Figura 3.2.

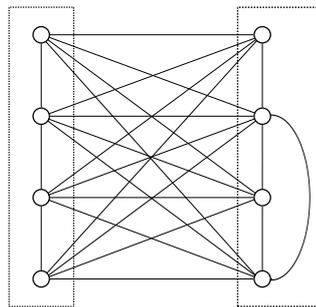


Figura 3.2: Grafo não  $P_4$ -conexo.

Uma outra caracterização para os grafos  $P_4$ -conexos é baseada na definição de  $P_4$ -cadeias [6]. Seja um grafo  $G = (V, E)$  e sejam  $x$  e  $y$  dois vértices de  $G$ . Uma  $P_4$ -cadeia de tamanho  $t$  conectando  $x$  e  $y$  é uma sequência de vértices distintos  $(v_0, v_1, \dots, v_{t-1}, v_t)$  tal que

- $x = v_0, y = v_t$ , e

- para todo  $i$ , ( $0 \leq i \leq t - 3$ ), o conjunto  $Q_i := \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$  induz um  $P_4$ .

Um grafo é  $P_4$ -conexo se e somente se existe uma  $P_4$ -cadeia conectando todo par de vértices do grafo [6]. É mostrado também em [6] que pode-se testar em tempo linear se um grafo é  $P_4$ -conexo. No mesmo trabalho, é apresentado um algoritmo linear para construir uma  $P_4$ -cadeia entre quaisquer dois vértices em um grafo  $P_4$ -conexo.

Essa última caracterização se assemelha com a definição mais conhecida da conectividade habitual, em que um grafo é conexo se e somente se cada par de vértices é conectado por um caminho.

## 3.2 $P_4$ -componentes

As  $P_4$ -componentes de um grafo  $G$  são os subgrafos induzidos de  $G$  que são  $P_4$ -conexos, e além disso são maximais com relação a essa propriedade.

Observe que toda  $P_4$ -componente ou é um único vértice, que satisfaz a  $P_4$ -conectividade por vacuidade, ou deve ter pelo menos quatro vértices. Os vértices de um grafo  $G = (V, E)$  que não estão contidos em nenhuma  $P_4$ -componente com pelo menos quatro vértices de  $G$  são chamados de *vértices fracos*.

A Figura 3.3 mostra um exemplo de um grafo particionado em suas  $P_4$ -componentes. Note que tal grafo não é  $P_4$ -conexo. Basta observar que não há  $P_4$  cruzando as partições  $V_1 = V(P_1)$  e  $V_2 = V(P_2 \cup P_3)$ .

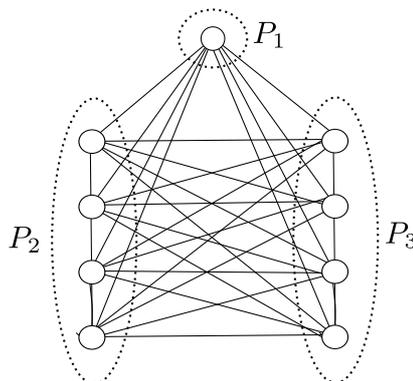


Figura 3.3: Grafo particionado em suas  $P_4$ -componentes.

Dado o conceito de  $P_4$ -componentes, temos que as seguintes observações são válidas para um grafo  $G$  qualquer:

1.  $G$  admite uma única partição em  $P_4$ -componentes e vértices fracos;

2. Uma  $P_4$ -componente de  $G$  também induz uma  $P_4$ -componente em  $\tilde{G}$ ;
3. Toda  $P_4$ -componente é um subgrafo conexo de  $G$  e  $\tilde{G}$ .

A primeira observação vale pelo fato de que as  $P_4$ -componentes são maximais. Do contrário, imagine que existe mais de uma partição. Seja a primeira partição  $\mathcal{A}$  e a segunda  $\mathcal{B}$ . Certamente uma das partes de  $\mathcal{A}$  tem interseção com uma das partes de  $\mathcal{B}$ . Sejam  $A_i$  e  $B_j$  essas partes, respectivamente. Cada uma dessas partes tem a propriedade de  $P_4$ -conectividade, onde para toda partição que fizermos para cada uma delas teremos um  $P_4$  cruzando. Chamemos de  $S$  a união de  $A_i$  e  $B_j$ . Qualquer partição de  $S$  em dois conjuntos de vértices vai ter vértices de  $A_i$  nas duas partes ou vértices de  $B_j$  nas duas partes. Isso garante que tem  $P_4$  cruzando toda partição de  $S$  em dois conjuntos, e nesse caso  $A_i$  e  $B_j$  não são maximais.

A observação 2 segue do fato de um  $P_4$  ser fechado sob complemento e a terceira observação segue da definição de  $P_4$ -componentes juntamente com a segunda observação.

Uma outra importante definição é a de  $P_4$ -componente separável. Uma  $P_4$ -componente é *separável* se existe uma partição do seu conjunto de vértices em subconjuntos não-vazios  $H_1$  e  $H_2$ , tal que todo  $P_4$  que possui vértices em ambos  $H_1$  e  $H_2$  tem seus vértices internos em  $H_1$  e as extremidades em  $H_2$ .

Um  $P_4$  é trivialmente separável (Figura 3.1 (d)). Também é fácil ver que uma aranha com  $R = \emptyset$  é separável, basta olhar para a partição do seu conjunto de vértices em que  $H_1 = K$  e  $H_2 = S$ , o conjunto estável e a clique. Na Figura 3.4 podemos ver o exemplo de um grafo que não é  $P_4$ -conexo, mas possui uma  $P_4$ -componente separável.

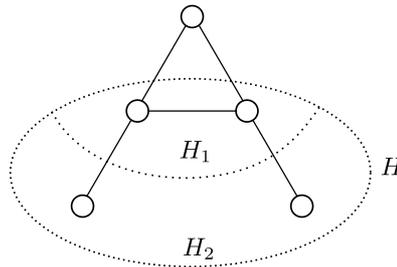


Figura 3.4: Grafo com  $P_4$ -componente separável  $H$ .

As definições acima levam ao seguinte teorema, denominado Teorema da Estrutura, para um grafo qualquer:

**Teorema 3.1** [30] *Seja  $G = (V, E)$  um grafo qualquer. Exatamente uma das seguintes afirmações é válida:*

1.  $G$  é desconexo;
2.  $\bar{G}$  é desconexo;
3.  $G$  é  $P_4$ -conexo;
4. Existe uma única  $P_4$ -componente própria separável  $H$  de  $G$  com partição  $(H_1, H_2)$  tal que todo vértice fora de  $H$  é adjacente a todos os vértices de  $H_1$  e a nenhum vértice de  $H_2$ .

A prova do Teorema 3.1 é feita supondo que o grafo é conexo com o complemento conexo, mas não é  $P_4$ -conexo e então conclui-se que o item 4 do teorema é verdadeiro. Isso é feito a partir da idéia de que, se  $G$  e  $\bar{G}$  são conexos, então  $G$  contém um  $P_4$  [39].

## 4 Decomposição de Grafos

Já comentamos a importância das decomposições de grafos como ferramenta de auxílio na resolução de problemas. Neste capítulo apresentamos duas decomposições: a modular, uma das mais conhecidas e estudadas [37], e a primeval, definida com base no Teorema 3.1 (Teorema da Estrutura). Utilizamos a última para resolver problemas na classe dos  $(q, q - 4)$ -grafos.

### 4.1 Decomposição Modular

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , dizemos que  $M \subseteq V$  é um *módulo* de  $G$  se, para todo  $v \in V \setminus M$ ,  $v$  é adjacente a todo ou a nenhum vértice de  $M$ . De outra forma, um módulo de um grafo é um subconjunto do seu conjunto de vértices tal que os vértices que não pertencem a esse subconjunto não distinguem os que pertencem com relação à adjacência. A introdução desse conceito é atribuída a Gallai [16, 17].

A definição de módulo sugere naturalmente um particionamento do grafo nos conjuntos  $M$ ,  $N(M)$  e  $\bar{N}(M)$ , onde existem todas as arestas possíveis entre  $M$  e  $N(M)$ , nenhuma aresta entre  $M$  e  $\bar{N}(M)$ , e uma atribuição qualquer de arestas entre  $N(M)$  e  $\bar{N}(M)$ . Essa característica ajuda a derivar algumas propriedades, como veremos adiante.

Uma observação pertinente é que  $M$  é um módulo de  $G$  se, e somente se,  $M$  é um módulo de  $\bar{G}$ . Note ainda que cada componente de um grafo  $G$  desconexo é um módulo desse grafo e cada componente de um grafo  $\bar{G}$  desconexo é um módulo de  $G$ . Também é fácil ver que entre dois módulos disjuntos de um grafo ou existem todas as arestas possíveis ou não há nenhuma. No caso de haver todas as arestas entre dois módulos de um grafo  $G$ , dizemos que esses módulos são *adjacentes*. Caso contrário, os dois módulos são *não-adjacentes*.

Os conjuntos com apenas um vértice, o conjunto vazio e  $V(G)$  são os *módulos triviais* de  $G$ . Os demais módulos também são chamados de *conjuntos homogêneos*. Um grafo é *primo* se todos os seus módulos são triviais.

Um módulo  $M$  de um grafo  $G$  é *forte* se para todo módulo  $M'$  de  $G$  temos que  $M \cap M' \in$

$\{\emptyset, M, M'\}$ , ou seja, se  $M$  tem interseção com algum outro módulo de  $G$ , ou ele está contido ou contém esse outro módulo. Dizemos ainda que um  $M$  é um *módulo maximal forte* se  $M$  é maximal entre os módulos fortes do grafo, excluindo o próprio conjunto de vértices do grafo.

Uma *partição de congruência*  $\mathcal{P}$  em um grafo  $G$  é uma partição dos vértices de  $G$  de forma que cada parte é um módulo de  $G$ . Como todas as partes de uma partição  $\mathcal{P}$  são módulos dois a dois disjuntos, esses módulos são dois a dois adjacentes ou não-adjacentes.

Representa-se a relação de adjacência entre as partes de  $\mathcal{P}$  por um grafo denominado grafo quociente. Dado um grafo  $G$  e uma partição de congruência  $\mathcal{P} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ , o *grafo quociente* de  $G$  em relação a  $\mathcal{P}$  é o grafo  $G_{\mathcal{P}}$  dado por  $V(G_{\mathcal{P}}) = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$  e  $E(G_{\mathcal{P}}) = \{\{m_i, m_j\} : M_i, M_j \in \mathcal{P} \text{ e } M_i, M_j \text{ são adjacentes em } G\}$ . Denominam-se *fatores* os subgrafos induzidos por cada membro de  $\mathcal{P}$  em  $G$ .

Em outras palavras,  $G_{\mathcal{P}}$  é o grafo onde cada vértice  $m_i$  representa um módulo de  $\mathcal{P}$  e dois vértices são adjacentes em  $G_{\mathcal{P}}$  se e somente se os módulos correspondentes em  $G$  forem adjacentes.

Não é difícil ver que podemos ter uma partição de congruência formada pelos módulos maximais fortes de um grafo. Basta observar que, para os módulos fortes que estão contidos uns nos outros, podemos pegar o mais externo. Como dois módulos fortes  $M$  e  $M'$  não contém interseção diferente de  $\emptyset$ ,  $M$  ou  $M'$ , podemos notar que existem blocos de módulos fortes. Pegamos então o mais externo de cada bloco de módulos fortes para fazer a partição de congruência. O seguinte teorema garante a existência de tal partição e, mais ainda, garante que ela é única.

**Teorema 4.1** [36] *Dado um grafo não trivial  $G$ , existe uma única partição de congruência de  $G$  onde cada módulo é maximal forte.*

A *decomposição modular* se propõe a decompor um grafo recursivamente em seus módulos maximais fortes. Como vimos anteriormente, se o grafo é desconexo, suas componentes são módulos, e podemos ver facilmente que são módulos maximais fortes. Suponha que  $G$  possui três componentes  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ . Podemos ver que  $G_1$  juntamente com  $G_2$  forma um módulo, mas não é forte porque  $G_2$  com  $G_3$  também é um módulo, e haveria uma interseção de  $G_2$ . Podemos fazer um raciocínio semelhante para verificar que os módulos maximais fortes de um grafo com complemento desconexo são as componentes do complemento, uma vez que  $M$  é um módulo de  $G$  se, e somente se,  $M$  é um módulo de  $\bar{G}$ . No caso do grafo ser conexo com complemento conexo, não é tão simples ver quais são seus módulos maximais fortes.

A árvore que representa esta decomposição, chamada *árvore de decomposição modular* e

denotada por  $T(G)$ , é exemplificada na Figura 4.1. A raiz dessa árvore é o grafo  $G$ , as folhas são os vértices de  $G$  e as folhas da sub-árvore enraizada em cada nó interno formam um módulo forte. Os nós internos são rotulados  $S$  (nó série), se o grafo for conexo com complemento desconexo;  $P$  (nó paralelo), se o grafo for desconexo e  $N$  (nó vizinhança), se o grafo for conexo com complemento conexo.

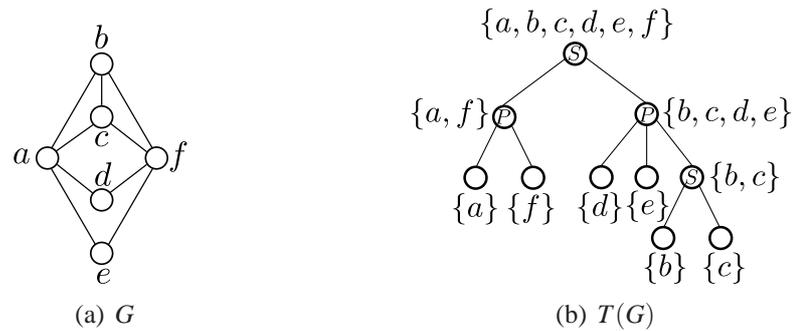


Figura 4.1: Grafo  $G$  e sua árvore de decomposição modular.

Uma descrição geral de como encontrar a árvore de decomposição modular é mostrada no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Decomposição Modular

---

**Entrada:** grafo  $G = (V, E)$

**Saída:** árvore de decomposição modular  $T(G)$  correspondente a  $G$

1 se  $|V| = 1$  então

2     retorne  $G$ ;

3 se  $G$  é desconexo então

4     rotule o nó como  $P$ ;

5     crie um nó para cada componente conexa  $G_i$  de  $G$  e execute o algoritmo para cada  $G_i$ ;

6 se  $\bar{G}$  é desconexo então

7     rotule o nó como  $S$ ;

8     crie um nó para cada componente  $G[V(\bar{G}_i)]$  onde  $\bar{G}_i$  é uma componente de  $\bar{G}$  e execute o algoritmo para cada  $\bar{G}_i$ ;

9 se  $G$  e  $\bar{G}$  são conexos então

10     rotule o nó como  $N$ ;

11     seja  $Q = q_1, q_2, \dots, q_k$  uma partição de congruência de  $G$ ; crie um nó para cada  $G[q_i]$  e execute o algoritmos para cada  $G[q_i]$ .

---

A dificuldade da decomposição modular está em encontrar a partição relativa aos módulos

maximais fortes dos nós de vizinhança. Existem diversos algoritmos na literatura que constroem a árvore de decomposição modular, alguns deles, inclusive, em tempo linear [21].

A decomposição modular de um grafo torna-se ainda mais útil para algoritmos em grafos quando os nós de vizinhança do grafo a ser decomposto possuem uma estrutura conhecida. Em [1], esse fato é utilizado para calcular o número de Grundy de algumas  $P_4$ -classes.

Para maiores detalhes sobre o assunto é indicada a leitura de [37] e [35].

## 4.2 Decomposição Primeval

Em [30], foi apresentado um esquema de decomposição de grafos denominado decomposição homogênea, juntamente com a teoria da  $P_4$ -conectividade. Tal esquema utiliza uma decomposição primitiva (primeval em inglês), introduzida no mesmo trabalho.

A decomposição primeval é derivada naturalmente pelo Teorema 3.1 (Teorema da Estrutura), que é uma consequência dos conceitos de  $P_4$ -conectividade e  $P_4$ -componente separável. Na árvore de decomposição do esquema em questão, as folhas são as  $P_4$ -componentes do grafo (terceiro caso do teorema) e seus vértices fracos; Os nós internos correspondem a três tipos de operações de grafos (primeiro, segundo e quarto casos do teorema).

Já vimos anteriormente as operações de união disjunta (operação ①) e junção (operação ①). Claramente essas duas operações correspondem aos dois primeiros casos do teorema da estrutura, no sentido de que, se uma grafo é desconexo, então ele é a união disjunta das suas componentes. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para o caso da junção. Precisamos de uma nova operação, que corresponde ao último caso do teorema.

Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos disjuntos tais que  $G_1$  é uma  $P_4$ -componente separável com partição  $(H_1, H_2)$  e  $G_2$  é um grafo qualquer disjunto de  $G_1$ :

- Operação ②: Todo vértice de  $G_2$  torna-se adjacente a todo vértice de  $H_1$  e a nenhum vértice de  $H_2$ .

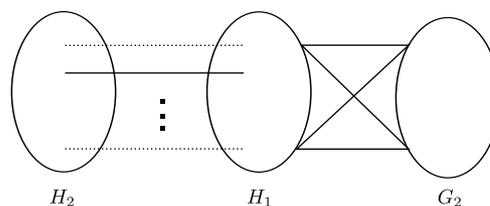


Figura 4.2: Operação ②.

A Figura 4.2 ilustra a operação ②. O Teorema da Estrutura (Teorema 3.1) e o Teorema 4.2 sugerem a associação de cada grafo  $G$  a uma árvore única  $T(G)$ , que é a árvore de decomposição primeval, cuja construção é feita através de chamadas recursivas ao Algoritmo 2.

**Teorema 4.2** [30] *Todo grafo  $G$  ou é  $P_4$ -conexo ou pode ser unicamente obtido a partir de suas  $P_4$ -componentes e seus vértices fracos através da aplicação de uma sequência finita das operações 0, 1 e 2.*

---

**Algoritmo 2:** Árvore de Decomposição Primeval

---

**Entrada:** grafo  $G = (V, E)$

**Saída:** árvore de decomposição primeval  $T(G)$  correspondente a  $G$

1 **se**  $|V| = 1$  **ou**  $G$  **é**  $P_4$ -conexo **então**

2     retorne a árvore  $T$  tendo  $G$  como seu único vértice;

3 **se**  $G$  **é** desconexo **então**

4     sejam  $G_1, G_2, \dots, G_p$  ( $2 \leq p$ ) as componentes de  $G$ ;

5     sejam  $T_1, T_2, \dots, T_p$  as árvores primevais de  $G_1, G_2, \dots, G_p$ , respectivamente, enraizadas em  $r_1, r_2, \dots, r_p$ ;

6     retorne a árvore  $T(G)$  obtida pela adição de  $r_1, r_2, \dots, r_p$  como filhos de um nó ①

7 **se**  $\bar{G}$  **é** desconexo **então**

8     sejam  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_p$  ( $2 \leq p$ ) as componentes de  $\bar{G}$ ;

9     sejam  $T_1, T_2, \dots, T_p$  as árvores primevais de  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_p$ , respectivamente, enraizadas em  $r_1, r_2, \dots, r_p$ ;

10     retorne a árvore  $T(G)$  obtida pela adição de  $r_1, r_2, \dots, r_p$  como filhos de um nó ①

11 **se**  $G$  **satisfaz a condição 4 do Teorema da Estrutura** **então**

12     faça  $G_1$  a  $p$ -componente separável e  $G_2 = G \setminus G_1$ ;

13     sejam  $T_1$  e  $T_2$  as árvores primevais de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, enraizadas em  $r_1$  e  $r_2$ ;

14     retorne a árvore  $T(G)$  obtida pela adição de  $r_1$  e  $r_2$  como filhos de um nó ②

---

A Figura 4.3 mostra o exemplo de um grafo e sua árvore de decomposição primeval. Dado um grafo  $G$  qualquer, podemos encontrar  $T(G)$  em tempo linear. Tal árvore é única, a menos de isomorfismos [8]. Observe ainda que a quantidade de nós de  $T(G)$  é da ordem de  $|V(G)|$ , uma vez que a árvore de decomposição primeval pode ser vista como uma árvore binária, com no máximo  $|V(G)|$  folhas. Como em árvores desse tipo as folhas representam metade da quantidade total de nós,  $|T(G)|$  possui ao todo  $2|V(G)|$  nós.

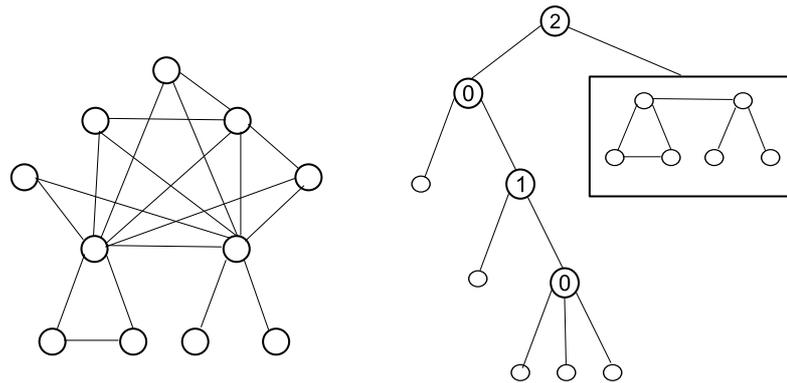


Figura 4.3: Grafo e a árvore de decomposição primeval correspondente.

Os problemas resolvidos em tempo linear para a classe  $(q, q - 4)$  citados anteriormente utilizaram a decomposição primeval.

### 4.3 Decomposição Primeval de $(q, q - 4)$ -grafos

Para resolver um problema em um grafo através de um dos esquemas de decomposição apresentados, primeiramente aplicamos tal decomposição ao grafo, gerando uma árvore. O próximo passo é resolver o problema para as folhas dessa árvore. Note que nesse ponto já existe uma diferença entre as decomposições modular e primeval: as folhas da primeira são vértices únicos, também chamados de vértices fracos, enquanto na segunda as folhas podem ser  $P_4$ -componentes separáveis. Resolver um problema para vértices fracos é trivial. No caso das folhas que são grafo  $P_4$ -conexos, é necessário um pouco mais de trabalho, mas geralmente é fácil.

Uma vez resolvido o problema para as folhas, precisamos descobrir como resolvê-lo para os nós internos da árvore, que são rotulados por operações em grafos. Isto é, precisamos calcular um certo parâmetro para um grafo resultante de uma operação aplicada a outros grafos, filhos do nó que representa esse grafo na árvore, para os quais o parâmetro já foi calculado. As decomposições citadas possuem as operações ① e ② em comum, mas diferenciam em uma terceira operação. Essa diferença é o que determina basicamente a escolha do esquema: a modular é adequada aos casos em que os nós de vizinhança do grafo a ser decomposto possuem uma estrutura conhecida, e a primeval é ideal para os casos em que as  $P_4$ -componentes separáveis obtidas na operação ② são bem caracterizadas.

A seguinte caracterização dos  $(q, q - 4)$ -grafos  $P_4$ -conexos é mostrada em [7], onde a aranha considerada possui  $R = \emptyset$ , também conhecida como *aranha sem cabeça*.

**Teorema 4.3** [7] *Seja  $G = (V, E)$  um  $(q, q - 4)$ -grafo  $P_4$ -conexo. Então, exatamente uma das sentenças abaixo é verdadeira:*

1. *Se  $G$  é um  $(5, 1)$ -grafo então  $G$  é uma aranha;*
2. *Se  $G$  é um  $(7, 3)$ -grafo então  $|V| < 7$  ou  $G$  é uma aranha;*
3. *Se  $G$  é um  $(q, q - 4)$ -grafo,  $q = 6$  ou  $q \geq 8$ , então  $|V| < q$ ,*

Ou seja, se  $G = (V, E)$  é um  $(q, q - 4)$ -grafo  $P_4$ -conexo, então  $G$  é uma aranha ou possui menos de  $q$  vértices (nesse caso dizemos que  $G$  é *pequeno*). Na árvore de decomposição primeval, todo nó representa um subgrafo induzido do grafo original. Então, se aplicarmos a decomposição primeval a um  $(q, q - 4)$ -grafo, todo nó da árvore vai continuar representando um grafo que pertence à classe  $(q, q - 4)$ . Como toda  $P_4$ -componente é  $P_4$ -conexa, pelo teorema acima, os nós que são  $P_4$ -componentes na árvore de decomposição primeval ou são aranhas ou são pequenos. Esses nós serão folhas na árvore referida. Utilizando esta informação, vários problemas foram resolvidos em tempo linear para essa classe de grafos, entre eles, o problema de encontrar o número cromático [3]. Dentre outros problemas já resolvidos em tempo linear para essa classe, estão a versão ponderada da clique e conjunto estável, número cromático e cobertura por clique [3], largura em árvore e mínimo fill-in [4] e ainda o problema da árvore de Steiner, circuito hamiltoniano, coloração por lista, extensão de pré-coloração, entre outros [5].

## 5 *Casos de Complexidade de Coloração Gulosa*

Neste capítulo, apresentamos os resultados originais obtidos neste trabalho. Para isso, definimos o problema geral de coloração gulosa e em seguida mostramos os resultados específicos.

### 5.1 Coloração Gulosa de Vértices

Como vimos anteriormente, o problema clássico de coloração, que consiste em determinar o número cromático de um grafo qualquer, é *NP*-difícil. Uma vez constatado esse fato, é natural que se busquem métodos heurísticos para colorir um grafo minimizando a quantidade de cores utilizadas. Uma maneira intuitiva de fazer isso é colorir os vértices de forma gulosa, atribuindo a cor  $i$  a um vértice  $v$  se, e somente se, todas as cores menores que  $i$  já aparecem em algum dos vizinhos de  $v$ . O Algoritmo 3 descreve esse procedimento.

---

**Algoritmo 3:** Algoritmo guloso de coloração

---

**Entrada:** Grafo  $G = (V, E)$  e ordem  $\theta = v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $V$ .

**Saída:** Coloração própria  $c$  de  $G$ .

- 1 **para todo**  $i = 1, \dots, n$  **faça**
  - 2      $c(v_i) = k$ , onde  $k \in \{1, \dots, n\}$  é a menor cor não utilizada em  $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ .
  - 3 Retorne  $c$ .
- 

Dizemos que uma coloração  $c$  é *gulosa* se ela pode ser gerada pelo Algoritmo 3. Se essa coloração possui  $k$  cores, também podemos denotá-la por *k-coloração gulosa*. Observe que o número de cores utilizadas depende da ordem escolhida para os vértices.

O Algoritmo guloso de coloração gera somente colorações próprias de um grafo. Dessa forma, o número de cores de qualquer coloração gerada por tal algoritmo em um grafo  $G$  é um limite superior para o número cromático de  $G$ . O problema de coloração gulosa consiste em determinar, dentre todas as possíveis ordenações sobre  $V(G)$ , a maior quantidade de cores

que o algoritmo acima utiliza. Chamamos essa quantidade de *número cromático guloso* ou simplesmente *número guloso* de  $G$ , denotado por  $\Gamma(G)$ . Esse valor também é conhecido como *número cromático first-fit* ou *número de Grundy*.

Naturalmente,  $\chi(G) \leq \Gamma(G)$ . Note que o número de Grundy representa o pior caso da aplicação do Algoritmo 3 em um grafo, determinando o quão ruim esse limite superior para o número cromático pode ser.

Um fato interessante provado para os cografos é que o algoritmo guloso aplicado a um grafo  $G$  desse tipo retorna  $\chi(G)$  cores, independente da ordem de  $V(G)$  considerada [20]. Existe, entretanto, uma subclasse de árvores que demonstra que a distância entre o número cromático e o número de Grundy de um grafo qualquer pode ser tão grande quanto desejarmos. A *árvore binomial*  $B_k$ , de ordem  $k$ , é definida como segue:

$$B_k = \begin{cases} \text{um vértice,} & \text{se } k = 1 \\ \text{uma árvore com raiz } r \text{ cujos filhos são } B_1, \dots, B_{k-1}, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

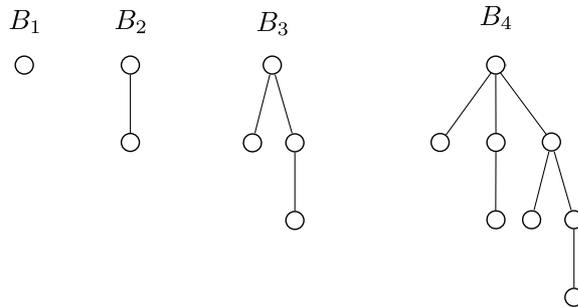


Figura 5.1: Árvores binomiais.

Considere uma árvore binomial  $B_k$  e uma ordem  $\theta$  sobre os vértices de  $B_k$  tal que os primeiros elementos da ordem são as folhas  $\{f_1, \dots, f_x\}$  de  $B_k$ , depois, nesta ordem  $\theta$ , estão as folhas de  $B_k - \{f_1, \dots, f_x\}$ , e assim sucessivamente. Veja que o algoritmo guloso aplicado à ordem  $\theta$  produzirá  $k$  cores, enquanto o número cromático de uma árvore é 2 [12].

O Teorema 5.1 prova ainda que a quantidade de cores utilizadas em colorações gulosas em um grafo  $G$  é contínua entre  $\chi(G)$  e  $\Gamma(G)$ .

**Teorema 5.1** [2] *Seja  $G$  um grafo com número cromático  $\chi(G)$  e número de Grundy  $\Gamma(G)$ . Para todo  $\chi(G) \leq k \leq \Gamma(G)$ , existe uma  $k$ -coloração gulosa de  $G$ .*

Um limite superior trivial para  $\Gamma(G)$  é  $\Delta(G) + 1$ , pois a cor  $i$  só é atribuída a um vértice  $v$  se existem vértices na vizinhança de  $v$  com todas as cores menores que  $i$ .

Zaker demonstrou em [42] que, dados um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro fixo  $k$ , existe um algoritmo de complexidade  $\mathcal{O}(n^{2^{k-1}})$  para determinar se  $\Gamma(G) \geq k$ . Para tanto, foram utilizados os  $k$ -átomos, uma família de grafos tal que  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , é definido indutivamente como segue:

- $\mathcal{A}_1 = \{K_1\}$ .
- $\mathcal{A}_2 = \{K_2\}$ .
- $G \in \mathcal{A}_k$  é construído a partir de  $H \in \mathcal{A}_{k-1}$  com  $|V(H)| = n$  da seguinte forma: Para algum  $1 \leq m \leq n$ , considere  $S_m \cup H$ , onde  $S_m$  é o conjunto estável com  $m$  vértices, e um subconjunto  $W \subseteq V(H)$  com  $|V(W)| = m$ . Construa um emparelhamento perfeito entre  $W$  e  $V(S_m)$  e conecte cada vértice de  $V(H) \setminus W$  a um (e somente um) vértice arbitrário em  $V(S_m)$ .

A Figura 5.2 ilustra a construção de um  $k$ -átomo.

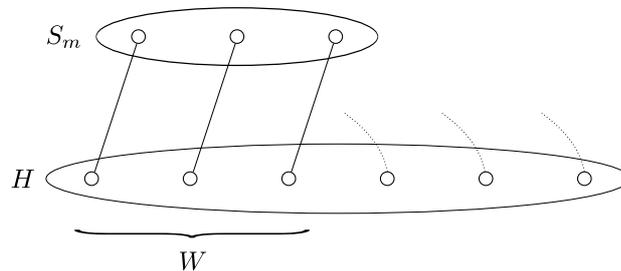


Figura 5.2: Construção de um  $k$ -átomo a partir de um  $\{k - 1\}$ -átomo  $H$  com  $m = 3$ .

Foi mostrado que  $\Gamma(G) \geq k$  se e somente se  $G$  contém um  $k$ -átomo e que é possível buscar um  $k$ -átomo em  $G$  em  $\mathcal{O}(n^{2^{k-1}})$  passos [42]. Entretanto, determinar se o número guloso de um grafo é superior ou igual a  $k$ , para um  $k \in \mathbb{N}$  qualquer, é um problema  $NP$ -completo [19] e, mesmo para um  $p$  fixo, é  $NP$ -completo decidir se  $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1 - p$  [23]. De fato, encontrar  $\Gamma(G)$  é  $NP$ -difícil mesmo para complementos de grafos bipartidos [41].

## 5.2 Coloração Gulosa de $(q, q - 4)$ -grafos

Um dos resultado originais desta dissertação consiste no desenvolvimento de um algoritmo para determinar o número de Grundy de um grafo  $G$  pertencente aos  $(q, q - 4)$ -grafos em tempo polinomial. Para tanto, utilizamos a decomposição primeval. Como explicamos anteriormente,

depois de gerar a árvore de decomposição primeval, precisamos calcular  $\Gamma$  para as folhas. No caso daquelas que são vértices fracos, o cálculo desse parâmetro é trivial.

Sabemos, pelo Teorema 4.3, que uma folha  $H$   $P_4$ -componente separável ou é uma aranha sem cabeça ou é um grafo com menos de  $q$  vértices. No primeiro caso, o Lema 5.1 enunciado a seguir garante que podemos calcular  $\Gamma(H)$  em tempo linear. Por outro lado, se a folha for um grafo  $H$  com menos de  $q$  vértices, podemos gerar todas as ordens possíveis dos vértices do grafo e passar cada uma como entrada para o algoritmo guloso ( $\leq q!$  ordens), produzindo dessa forma todas as colorações gulosas de  $H$  em tempo constante.

**Lema 5.1** [1] *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Se  $G$  é uma aranha e  $\Gamma(R)$  é dado, então  $\Gamma(G)$  pode ser determinado em tempo linear.*

Agora precisamos calcular  $\Gamma$  para os grafos representados pelos nós internos da árvore. As três operações da decomposição primeval são ① (união disjunta), ② (junção) e ③. É conhecido que se  $G$  é a união disjunta de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , então  $\Gamma(G) = \max\{\Gamma(G_1), \Gamma(G_2)\}$ , e se  $G$  é a junção de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , então  $\Gamma(G) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$  [20].

A determinação do número de Grundy para um grafo resultante da aplicação da operação ② a uma  $P_4$ -componente separável que é uma aranha e outro grafo qualquer é dada no Lema 5.1.

Neste trabalho, mostramos como calcular  $\Gamma$  para um grafo resultante da aplicação de ② a uma  $P_4$ -componente separável que é um grafo com menos de  $q$  vértices e um grafo qualquer. O Lema 5.2 é fundamental para a resolução dessa operação.

**Lema 5.2** [30] *Um grafo  $P_4$ -conexo  $G$  é separável se, e somente se, o seu grafo quociente é um grafo split.*

Se o grafo quociente de uma  $P_4$ -componente separável  $H$  é o grafo split  $(K, S)$ , então todo módulo maximal forte  $M_i^1 \subseteq H_1$  é representado por um vértice  $v_i^1$  na clique  $K$ , e todo módulo maximal forte  $M_j^2 \subseteq H_2$  é representado por um vértice  $v_j^2$  no conjunto independente  $S$ . Dizemos que  $H[M_j^i] = H_j^i$ .

Existe uma relação entre o número de Grundy de um grafo e o número de Grundy dos seus módulos, como mostra a Proposição 5.1.

**Proposição 5.1** [1] *Sejam  $G, H_1, \dots, H_n$  grafos disjuntos tais que  $|V(G)| = n$  e  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Seja  $G'$  o grafo obtido pela substituição do vértice  $v_i \in V(G)$  por  $H_i$ , de forma que existem todas as arestas entre os vértices de  $H_i$  e  $H_j$ ,  $i \neq j$ , se e somente se  $v_i v_j \in E(G)$ . Então, em toda*

coloração gulosa de  $G'$ , no máximo  $\Gamma(H_i)$  cores ocorrem em cada subgrafo induzido  $H_i \subseteq G'$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Observe que, de acordo com a Proposição 5.1, uma coloração gulosa de um grafo  $G$  restrita aos seus módulos também é gulosa para eles. O seguinte lema é uma generalização de um resultado mostrado em [2].

**Lema 5.3** *Seja  $G$  um grafo e  $M$  um módulo de  $G$  tal que  $G[M] = H$ . Seja  $G'$  o grafo obtido pela substituição de  $H$  por  $K_k$ , onde  $k$  é a quantidade de cores que aparecem em  $H$  em uma coloração gulosa de  $G$  que gera  $\Gamma(G)$ . Então  $\Gamma(G) = \Gamma(G')$ .*

**Demonstração:** Seja  $c$  a coloração que gera  $\Gamma(G)$  e  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  o conjunto de cores de  $c$  que aparece em  $H$ . Denote os vértices do grafo completo que substitui  $H$  em  $G'$  por  $w_1, \dots, w_k$  e denote por  $c'$  a coloração de  $G'$  definida por  $c'(G - K_k) = c(G - H)$  e  $c'(w_i) = \alpha_i$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . É fácil ver que  $c'$  é uma coloração gulosa de  $G'$ . Então  $\Gamma(G') \geq \Gamma(G)$ .

Note que, pela Proposição 5.1, existe uma  $k$ -coloração gulosa de  $H$  e seja  $(S_1, \dots, S_k)$  essa  $k$ -coloração gulosa. Seja  $c$  uma  $\Gamma(G')$ -coloração gulosa de  $G'$ . Denote por  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$  o conjunto de cores que aparecem em  $K_k$  com  $\beta_1 < \dots < \beta_k$ . Seja  $c'$  a coloração de  $G$  que atribui a cor  $\beta_i$  aos vértices de  $S_i$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ , e  $c'(G - H) = c(G - K_k)$ . Claramente,  $c'$  é uma coloração gulosa de  $G$ . Logo,  $\Gamma(G) \geq \Gamma(G')$ .  $\square$

Denotamos por  $\theta_H$  uma ordem que dada como entrada para o algoritmo guloso, produz uma coloração com  $\Gamma(H)$  para  $H$ . Em particular, denotamos por  $\theta_j^i$  uma ordem que produz uma coloração com  $\Gamma(H_j^i)$  cores para  $H_j^i$ .

Observe que, no grafo  $H$ ,  $H_1$  é a junção de  $H_1^1, \dots, H_l^1$ , uma vez que, entre os grafos induzidos por dois módulos de um mesmo grafo, ou existem todas as arestas ou nenhuma, e  $H_1^1, \dots, H_l^1$  são os grafos induzidos pelos módulos maximais fortes de  $H_1$  (Figura 5.3(a)). Logo,  $\Gamma(H_1)$  é o número de Grundy da junção dos grafos  $H_1^1, \dots, H_l^1$ , que é  $\sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ . Da mesma forma, o número de Grundy de um  $H_i^2$  em  $H_2$  com sua vizinhança em  $H_1$  será o número de Grundy da junção desses grafos (Figura 5.3(b)). O Teorema 5.2 é o resultado principal desta seção.

**Teorema 5.2** *Seja  $G$  um  $(q, q - 4)$ -grafo contendo um  $P_4$ -componente separável  $H = (H_1, H_2)$  com no máximo  $q$  vértices tal que todo vértice em  $R = G - H$  é adjacente a todo vértice em  $H_1$  e a nenhum vértice em  $H_2$ . Sejam  $H_1^1, \dots, H_l^1$  os módulos maximais fortes de  $H_1$  e  $H_1^2, \dots, H_m^2$  os módulos maximais fortes de  $H_2$ . Dados  $\chi(R)$  e  $\Gamma(R)$ :*

(a) *Se  $\Gamma(R) \geq \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$ , então  $\Gamma(G) = \Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ ;*

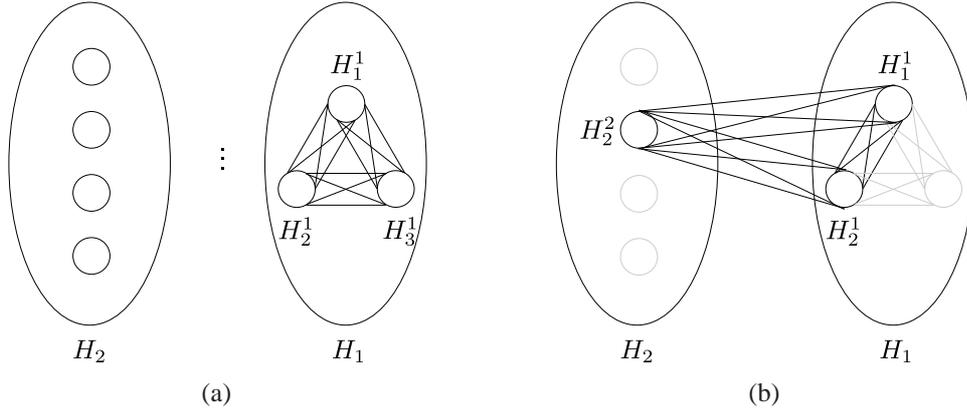


Figura 5.3: Grafo  $H$ .

(b) Se  $\Gamma(R) < \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$ ,  $\Gamma(G) = \Gamma(H \otimes K_{\Gamma(R)})$ .

**Demonstração:** (a) Uma ordem que começa por  $\theta_R, \theta_1^1, \dots, \theta_1^l$  dada como entrada para o algoritmo guloso produz uma coloração gulosa de  $G$  com pelo menos  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$  cores, uma vez que  $G[H_1 \cup V(R)]$  é a junção de  $R, H_1^1, \dots, H_1^l$ . Então, temos que provar que  $\Gamma(G) \leq \Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ . Suponha por absurdo que existe uma coloração gulosa  $c$  de  $G$  com mais que  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$  cores e seja  $c_{max}$  a maior cor em  $c$ . Considere os seguintes casos:

1. Existe um vértice  $v \in R$  colorido com  $c_{max}$ :

Seja  $c' = c(G[H_1 \cup V(R)])$ . Todas as cores em  $c$  devem aparecer em  $c'$ , uma vez que  $v$ , por ser colorido com  $c_{max}$ , é adjacente a vértices coloridos com todas as cores diferentes de  $c_{max}$  e, além disso, um vértice em  $R$  tem vizinhos somente em  $G[H_1 \cup V(R)]$ . Logo,  $c'$  tem mais de  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$  cores. Note que  $c'$  não é uma coloração gulosa para  $G[H_1 \cup V(R)]$ , porque uma coloração gulosa para  $G[H_1 \cup V(R)]$  tem no máximo  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$  cores, dado que  $G[H_1 \cup V(R)]$  é a junção de  $R, H_1^1, \dots, H_1^l$ . Portanto, existe um vértice  $u \in G[H_1 \cup V(R)]$  com a cor  $c_u$  que não tem vizinho colorido com  $c_k$  em  $G[H_1 \cup V(R)]$ , para algum  $c_k < c_u$ . Tal vértice deve estar em  $H_1$ , pois todos os vizinhos dos vértices em  $R$  estão em  $G[H_1 \cup V(R)]$ . Então,  $u \in H_i^1$  tem um vizinho  $w \in H_j^2$  com a cor  $c_w = c_k$ . Note que existem todas as arestas entre  $H_i^1$  e  $H_j^2$ . Algum vértice  $z \in G[H_1 \cup V(R)]$  também recebe a cor  $c_k$ . É fácil ver que  $z \notin R$ , caso contrário  $u$  teria um vizinho em  $G[H_1 \cup V(R)]$  com a cor  $c_k$ , uma vez que todo vértice de  $R$  é adjacente a todo vértice de  $H_1$ . Pelo Lema 5.2, existem todas as arestas possíveis entre dois módulos de  $H_1$ . Dessa forma,  $z \notin H_s^1$ , para  $s \neq i$ , porque também nesse caso  $u$  já teria um vizinho em  $G[H_1 \cup V(R)]$  colorido com  $c_k$ . Portanto,  $z \in H_i^1$  e, conseqüentemente,  $z$  é adjacente a  $w$ ,

uma vez que existem todas as arestas possíveis entre  $H_i^1$  e  $H_j^2$ . Mas ambos são coloridos com a cor  $c_k$  e essa coloração não seria própria.

2. Existe um vértice  $v \in H_2$  colorido com  $c_{max}$ :

Seja um vértice  $v \in H_s^2$ , para algum  $s \in \{1, \dots, m\}$ , e  $c' = c(G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)])$ . Todas as cores em  $c$  devem aparecer em  $c'$ , dado que  $v$  tem que ser adjacente a vértices coloridos com todas as cores diferentes de  $c_{max}$  e um vértice em  $H_s^2$  tem vizinhos somente em  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ . Então,  $c'$  tem mais de  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$  cores. Note que  $\Gamma(R) \geq \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$  implica em  $\Gamma(R) \geq \Gamma(H_s^2)$ . Portanto,  $\Gamma(H_s^2) + \sum_{i \in N(H_s^2)} \Gamma(H_i^1) \leq \Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ . Então  $c'$  não é uma coloração gulosa para  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ , pois uma coloração gulosa para  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$  tem no máximo  $\Gamma(H_s^2) + \sum_{i \in N(H_s^2)} \Gamma(H_i^1)$ , uma vez que  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$  é a junção de  $H_s^2$ ,  $H_i^1$ ,  $\forall i \in N(H_s^2)$ . Assim, existe um vértice  $u \in G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$  colorido com a cor  $c_u$  que não tem vizinho colorido com  $c_k$  em  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ , para algum  $c_k < c_u$ . Tal vértice deve pertencer a  $H_1$ , pois todos os vizinhos dos vértices de  $H_2$  estão em  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ . Então,  $u \in H_i^1$ , onde  $H_i^1 \in N(H_s^2)$ , tem um vizinho  $w \in R$  colorido com  $c_w = c_k$ . Observe que algum vértice  $z \in (V(H_s^2) \cup N(H_s^2))$  também é colorido com  $c_k$ . É fácil ver que  $z \notin H_s^2$ . Caso contrário,  $u$  já teria um vizinho em  $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$  colorido  $c_k$  uma vez que todo vértice de  $H_s^2$  é adjacente a todo vértice de  $N(H_s^2)$ . Pela mesma razão,  $z \notin H_j^1$ , para  $j \neq i$  e  $j \in N(H_s^2)$ . Portanto  $z \in H_i^1$ , mas existem todas as arestas possíveis entre  $H_i^1$  e  $R$ , o que faz com que  $w$  e  $z$  sejam vizinhos. Porém ambos  $w$  e  $z$  são coloridos com  $c_k$ , e essa coloração seria imprópria.

3. Existe um vértice  $v \in H_1$  colorido com  $c_{max}$ :

Para receber uma cor maior que  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ ,  $v$  deve ter pelo menos  $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$  vizinhos com cores diferentes. Da sua vizinhança em  $R$ ,  $v$  tem no máximo  $\Gamma(R)$  vizinhos com cores diferentes, por 5.1. Da vizinhança de  $v$  em  $H_i^1$ , para  $i \in \{1, \dots, l\}$ ,  $v$  tem no máximo  $\sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1) - 1$  (sua própria cor), também por 5.1. Logo, uma nova cor  $c_n$  deve aparecer em um vértice  $w \in H_j^2$ , onde  $V(H_j^2) \in N(v)$ . Uma vez que os vértices em  $R$  não possuem nenhum vizinho em  $H_2$ ,  $c_n$  deve ser maior que todas as cores de  $R$  e  $w$  deve ser vizinho de vértices coloridos com todas as cores de  $R$ . Todas essas cores devem aparecer em  $H_j^2$ , pois os vizinhos de  $w$  fora de  $H_j^2$  são vértices de  $H_1$ , todos vizinhos de todos os vértices de  $R$  e, portanto, com as cores diferentes das dos vértices de  $R$ . Sabemos que em  $H_j^2$  aparecem no máximo  $\Gamma(H_j^2)$  cores, então  $w$  tem no máximo  $\Gamma(H_j^2) - 1$  vizinhos que recebem cores diferentes em  $H_j^2$ . Mas sabemos que  $\Gamma(H_j^2) \leq \Gamma(R)$  implica em  $\Gamma(H_j^2) - 1 < \Gamma(R)$ . Então, todas as cores de  $R$  não podem aparecer na vizinhança de

$w$ , e tal vértice não pode receber uma cor nova.

(b) Uma vez que  $\Gamma(R) < \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$ , em uma  $\Gamma(G)$ -coloração gulosa de  $G$ , por 5.1, existem  $p < q$  cores em  $R$ . Não sabemos o valor exato de  $p$ , mas sabemos que  $p$  vai de  $\chi(R)$  a  $\Gamma(R)$ . Por 5.3, podemos substituir  $R$  por um grafo completo com  $p$  vértices e podemos obter todas as ordens possíveis dos vértices de  $G$ , que são  $(q+p)!$  no total. Então, podemos calcular todas as colorações gulosas de  $G$  em  $\sum_{p=\chi(R)}^{\Gamma(R)} (p+q)! \leq q(2q)! = O(1)$  passos, onde  $q$  é fixo.  $\square$

Como já comentamos, o nosso algoritmo para determinar o número de Grundy de um  $(q, q-4)$ -grafo consiste em, primeiramente, aplicar a decomposição primeval em tal grafo e em seguida, numa abordagem *bottom-up*, calcular o parâmetro para as folhas e para os nós internos da árvore.

A complexidade da aplicação da decomposição primeval em um grafo qualquer pode ser feita em tempo linear, como vimos no Capítulo 4. Nesse mesmo capítulo, vimos que a árvore  $T(G)$  gerada pela decomposição primeval de um grafo  $G$  possui no máximo  $2n$  nós, onde  $n = |V(G)|$ . O cálculo do número de Grundy pode ser feito em tempo constante nos casos das folhas que são grafos triviais ou grafos com menos de  $q$  vértices, dos nós internos que representam grafos resultantes da aplicação das operações ①, ② a outros grafos, e dos nós internos que representam grafos resultantes da aplicação da operação ③ a outros grafos, quando o grafo  $H$  possui menos de  $q$  vértices (Teorema 5.2). Somente nos casos em que as folhas são aranhas ou os nós internos representam grafos resultantes da aplicação de ③ a grafos tais que  $H$  é uma aranha é que o parâmetro em questão pode ser calculado em tempo linear (Lema 5.1). Como a árvore de decomposição primeval possui  $O(n)$  nós e calculamos o número de Grundy em cada nó em tempo  $O(n)$ , nosso algoritmo possui complexidade  $O(n^2)$ .

### 5.3 Coloração Gulosa de Arestas

Como mencionado anteriormente, a coloração de grafos linha corresponde ao problema de coloração de arestas para grafos em geral. A coloração gulosa de grafos linha, resultado da aplicação do Algoritmo guloso de coloração (Algoritmo 3) à tal classe, também possui uma definição equivalente em coloração arestas, dada a seguir.

Seja um grafo  $G = (V, E)$  e uma ordem  $\theta = e_1, \dots, e_n$  sobre  $E$ , o *Algoritmo guloso de coloração de arestas* atribui a  $e_i$  o menor inteiro positivo que ainda não foi atribuído a nenhuma aresta adjacente a  $e_i$  no conjunto  $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$ . Uma coloração obtida pela execução desse

algoritmo em um grafo é chamada de *coloração gulosa de arestas*.

Lembramos que uma  $k$ -coloração de arestas de um grafo  $G$  também pode ser vista como uma partição  $\mathcal{P} = (M_1, M_2, \dots, M_k)$  do conjunto de arestas do grafo em  $k$  emparelhamentos disjuntos onde cada  $M_i$  contém as arestas coloridas com a cor  $i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . A coloração gulosa de arestas possui a seguinte propriedade:

**Propriedade 5.1**  $\forall i < j$ , toda aresta  $e$  em  $M_j$  é adjacente a uma aresta em  $M_i$ .

Observe que, se a Propriedade 5.1 não fosse satisfeita, o algoritmo guloso de coloração de arestas não atribuiria uma cor maior que  $i$  à aresta  $e$ . Reciprocamente, uma coloração de arestas que satisfaz 5.1 é uma coloração gulosa de arestas relativa a qualquer ordenação de arestas em que as arestas de  $M_i$  precedem as de  $M_j$ ,  $\forall i < j$ .

O maior número de cores obtidas pela aplicação do Algoritmo guloso de coloração de arestas em um grafo  $G$  é o seu *índice de Grundy* e é denotado por  $\Gamma'(G)$ . Note que  $\Gamma'(G) = \Gamma(L(G))$ . Por definição,  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Gamma'(G)$ . Além disso, como uma aresta é adjacente a no máximo  $2\Delta(G) - 2$  outras arestas ( $\Delta - 1$  em cada extremidade), a coloração gulosa das arestas de  $G$  usa no máximo  $2\Delta(G) - 1$ . Dessa forma,  $\Delta(G) \leq \Gamma'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ .

Estrelas são exemplos de grafos em que o índice de Grundy é igual ao grau máximo. Também existem grafos em que o limite superior de  $2\Delta(G) - 1$  para o índice de Grundy é alcançado, como as árvores que chamamos aqui de *binomiais em arestas*. A definição de tais árvores se assemelha à definição das árvores binomiais. A *árvore binomial em arestas*  $B_k^e$ , de ordem  $k$ , é definida como segue:

$$B_k^e = \begin{cases} P_2, & \text{se } k = 0 \\ P_3, & \text{se } k = 1 \\ \text{obtida a partir da inclusão uma aresta } e \text{ incidente às raízes de } B_{k-1}^e \text{ e } B_{k-2}^e, \\ \text{e com a mesma raiz de } B_{k-2}^e, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Considere uma árvore binomial em arestas  $B_k^e$  e uma ordem  $\theta$  sobre as arestas de  $B_k^e$  tal que os primeiros elementos da ordem são as arestas incidentes às folhas  $\{f_1, \dots, f_x\}$  de  $B_k^e$ , depois, nesta ordem  $\theta$ , estão as arestas incidentes às folhas de  $B_k - \{f_1, \dots, f_x\}$ , e assim sucessivamente. Veja que ao aplicarmos o Algoritmo guloso de coloração de arestas usando essa ordem  $\theta$ , serão utilizadas  $2\Delta(B_k^e) - 1$  cores, para  $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ .

Não foram encontrados resultados na literatura sobre coloração gulosa de arestas. Os resultados que seguem foram obtidos durante um estágio de mestrado no INRIA - Sophia Antipolis,

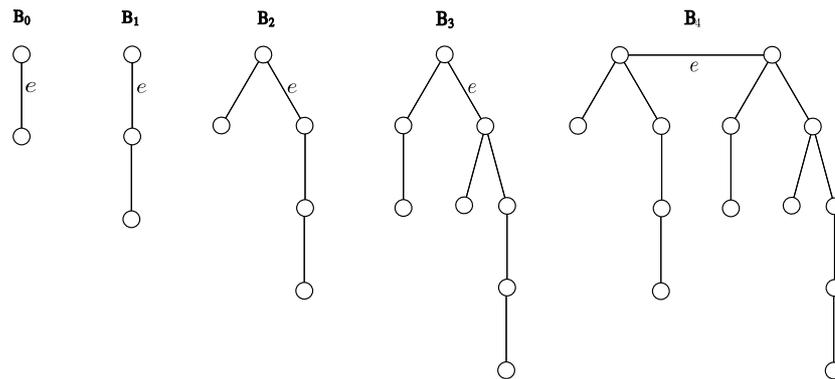


Figura 5.4: Árvores binomiais em arestas.

sob a orientação de Frédéric Havet. O estágio foi realizado graças a uma parceria do grupo ParGO com a equipe Mascotte. Nessa ocasião, estudamos a complexidade de encontrar o índice de Grundy de um grafo, mostrando que é um problema NP-difícil. Além disso, analisamos o problema para a classe dos caterpillars.

### 5.3.1 co-NP-completude de Coloração Gulosa de Arestas

Nesta seção, provamos que é NP-difícil encontrar o índice de Grundy de um grafo. Para isso, mostramos que o problema IGM, definido a seguir, é co-NP-completo.

Índice de Grundy Mínimo (IGM)

Instância: Um grafo  $G$ .

Pergunta:  $\Gamma'(G) = \Delta(G)$ ?

Nossa redução é feita a partir do problema de coloração de arestas de grafos cúbicos (ICGC), provado ser NP-completo em [25].

Índice Cromático de Grafos Cúbicos (ICGC)

Instância: Um grafo cúbico  $G$ .

Pergunta: O índice cromático de um grafo cúbico  $G$  é igual a 3?

Estendemos esse resultado para o problema mais geral FIG.

$f$ -Índice de Grundy (FIG)

Instância: Um grafo  $G$ .

Pergunta:  $\Gamma'(G) \leq f(\Delta(G))$ ?

Observe que se  $f$  é a identidade ( $f(k) = k$ , para todo  $k$ ), então  $f$ -Índice de Grundy é Índice

de Grundy Mínimo. Nós mostramos que para qualquer função  $f$  tal que  $k \leq f(k) \leq 2k - 2$  (pelos limites de  $\Delta(G)$ ), o problema  $f$ -Coloração Gulosa de Arestas é co-NP-Completo.

Nós mostramos primeiramente a co-NP-completude de Índice de Grundy Mínimo.

Seja  $H$  um grafo cúbico com  $n$  vértices  $w_1, \dots, w_n$ . Seja  $G$  o grafo definido por  $V(G) = V(H) \cup \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v, a, b, c\}$  e  $E(G) = E(H) \cup \{u_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{av, bv, cv\}$ . O grafo  $G$  é mostrado na figura Figure 5.5.

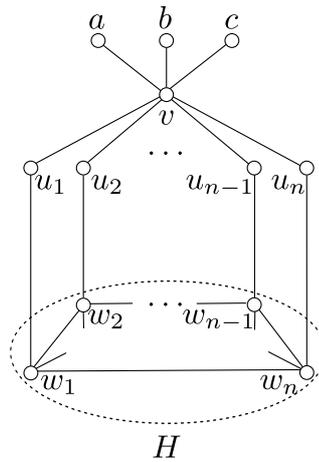


Figura 5.5: Grafo  $G$  obtido de um grafo cúbico  $H$ .

Em  $G$ ,  $d(v) = n + 3$ , enquanto o grau de todos os outros vértices é no máximo 4. Dessa forma,  $\Delta(G) = d(v) = n + 3$ , uma vez que  $n \geq 4$  por  $H$  ser cúbico. Além do mais, toda aresta de  $G$  é adjacente a no máximo  $n + 3$  arestas, então  $\Gamma'(G) \leq n + 4 = \Delta(G) + 1$ . Portanto, o índice de Grundy de  $G$  é  $\Delta(G)$  ou  $\Delta(G) + 1$ . No Teorema 5.3, mostramos a redução do problema Índice Cromático de Grafos Cúbicos para Índice de Grundy Mínimo [22].

**Teorema 5.3**  $\chi'(H) = 3$  se e somente se  $\Gamma'(G) = \Delta(G) + 1$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que existe uma 3-coloração de arestas  $c$  de  $H$ . Vamos estender  $c$  para uma coloração gulosa de arestas de  $G$  com  $\Delta(G) + 1 = n + 4$  cores. Faça  $c(av) = 1$ ,  $c(bv) = 2$ ,  $c(cv) = 3$  e, para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $c(u_i w_i) = 4$  e  $c(u_i v) = i + 4$ . Note que todo vértice  $w_i$  é incidente a uma aresta de  $H$  com cada uma das cores 1, 2 e 3, uma vez que  $H$  cúbico. É fácil ver que essa é uma  $(n + 4)$ -coloração gulosa de arestas de  $G$ , pois  $c$  cumpre a Propriedade 5.1.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que existe uma  $(n + 4)$ -coloração gulosa de arestas de  $G$ . Alguma aresta recebe a cor  $n + 4$ . Tal aresta tem que ser adjacente a pelo menos  $n + 3$  arestas e, portanto, tem que ser uma das arestas  $v u_i$ , digamos  $v u_n$ . Como  $v u_n$  é adjacente a exatamente  $n + 3$  arestas

e a coloração é gulosa, todas as arestas adjacentes a  $vu_n$  devem receber cores diferentes entre  $1, \dots, n+3$ .

Observe que a aresta vizinha de  $vu_n$  com a cor  $n+3$  deve ser uma das  $vu_i$ , para  $i \neq n$ , pois somente as mesmas possuem  $n+2$  vizinhos que podem receber as cores menores que as suas. O mesmo ocorre com as arestas vizinhas de  $vu_n$  que devem ser coloridas com as cores de 5 a  $n+2$ , e dessa forma as arestas  $vu_i$ , para  $i = 1..n$ , devem ter as cores de 5 a  $n+4$ .

As arestas  $vu_i$  são adjacentes a arestas coloridas com 1, 2, 3 e 4. As que tem a cor 4 devem ser  $u_iw_i$ , dado que as arestas  $av$ ,  $bv$  e  $cv$  são adjacentes a no máximo duas arestas coloridas com alguma das cores em  $\{1, 2, 3\}$ . Logo,  $c(u_iw_i) = 4$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ , e  $av$ ,  $bv$ ,  $cv$  são coloridas com  $\{1, 2, 3\}$ .

Agora toda aresta  $u_iw_i$  é adjacente a três arestas, uma de cada cor em  $\{1, 2, 3\}$ . Uma vez que  $c(vu_i) \geq 5$ , essas três arestas devem ser as três arestas incidentes a  $w_i$  em  $H$ . Portanto todas as arestas de  $H$  recebem uma das cores em  $\{1, 2, 3\}$ , e a restrição de  $c$  a  $H$  é uma 3-coloração de arestas.  $\square$

**Corolário 5.1** *O problema da Índice de Grundy Mínimo é co-NP-completo.*

**Demonstração:** O problema da Índice de Grundy Mínimo é claramente co-NP, pois uma coloração gulosa de arestas de um grafo  $G$  com pelo menos  $\Delta(G) + 1$  cores é um certificado que  $\Gamma'(G) > \Delta(G)$ . O resultado é complementado pela redução do Teorema 5.3.  $\square$

**Observação 5.1** *O grafo  $G$  tem índice cromático  $\Delta(G)$ . Note que as arestas incidentes a  $v$  podem ser coloridas com  $1, \dots, \Delta(G)$ , e essa coloração pode ser estendida aplicando-se o algoritmo guloso às demais arestas. Como todas elas são adjacentes a no máximo seis outras arestas, terão no máximo cor 7. Como  $\Delta(G) \geq 7$ , obtemos uma  $\Delta(G)$ -coloração de arestas. Dessa forma, a redução acima mostra que é co-NP-completo decidir se  $\Gamma'(G) = \chi'(G)$ .*

Agora mostraremos a co-NP-completude do problema  $f$ -Índice de Grundy, generalizando os resultados apresentados acima para o problema da Índice de Grundy Mínimo.

Seja  $H$  um grafo cúbico com  $n$  vértices  $w_1, \dots, w_n$  e seja  $G$  um grafo como o definido na prova do Teorema 5.3. Seja  $p = f(n+3) - (n+3)$ . Então  $0 \leq p \leq n+1$ . Para  $1 \leq i \leq p$ , definimos  $T_i$  como a árvore com conjunto de vértices  $\{a_i, b_i, c_i, t_i\} \cup \{a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, s_{i,j}, t_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n-1\}$  e conjunto de arestas  $\{a_it_i, b_it_i, c_it_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} \{a_{i,j}t_{i,j}, b_{i,j}t_{i,j}, c_{i,j}t_{i,j}, t_{i,j}s_{i,j}, s_{i,j}t_{i,j}\}$ . Seja  $G'$  o grafo obtido pela união disjunta de  $G$  e  $T_i$  adicionada das arestas  $u_it_i$  para todo  $1 \leq i \leq p$ . O grafo  $G'$  é mostrado na figura Figure 5.6.

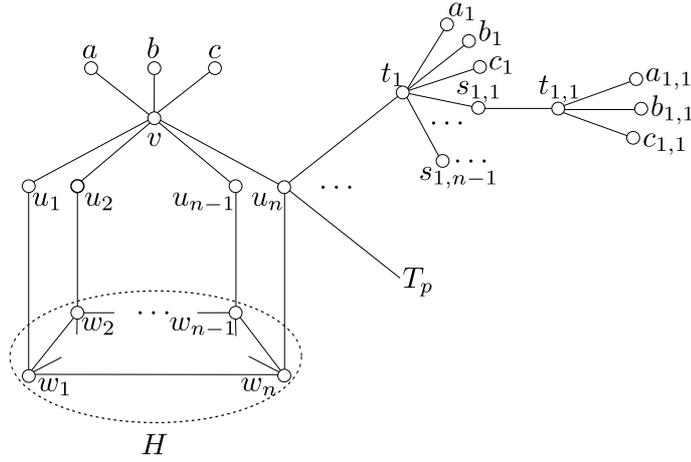


Figura 5.6: Grafo  $G'$  obtido de um grafo cúbico  $H$ .

Observe que  $\Delta(G') = n + 3$  e os vértices com grau  $n + 3$  são  $v, t_1, \dots, t_p$  e  $u_n$  quando  $p = n + 1$ . Além do mais, toda aresta é adjacente a no máximo  $n + 3 + p$  arestas, e dessa forma  $\Gamma'(G) \leq n + 3 + p + 1 = f(\Delta(G')) + 1$ . No Teorema 5.4, apresentamos a redução do problema Índice Cromático de Grafos Cúbicos para  $f$ -Índice de Grundy [22].

**Teorema 5.4**  $\chi'(H) = 3$  se e somente se  $\Gamma'(G') = f(\Delta(G')) + 1$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que existe um 3-coloração de arestas  $c$  de  $H$ . Vamos estender  $c$  para uma coloração gulosa de arestas de  $G'$  com  $f(\Delta(G')) + 1 = n + p + 4$  cores. Primeiramente, estendemos  $c$  em uma  $(n + 4)$ -coloração gulosa de  $G$  como fizemos na prova do Teorema 5.3. Em particular, temos  $c(u_n w_n) = 4$  e  $c(u_n v) = n + 4$ . Para todo  $1 \leq i \leq p$  e todo  $1 \leq j \leq n - 1$ , faça  $c(t_i a_i) = 1$ ,  $c(t_i b_i) = 2$ ,  $c(t_i c_i) = 3$ ,  $c(t_{i,j} a_{i,j}) = 1$ ,  $c(t_{i,j} b_{i,j}) = 2$ ,  $c(t_{i,j} c_{i,j}) = 3$ ,  $c(t_{i,j} s_{i,j}) = 4$ ,  $c(s_{i,j} t_i) = j + 4$  e finalmente  $c(t_i u_n) = n + 4 + i$ . É fácil verificar que  $c$  cumpre a Propriedade 5.1, e portanto é uma  $(n + p + 4)$ -coloração gulosa de arestas de  $G'$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $G'$  admite uma  $(n + p + 4)$ -coloração gulosa de arestas  $c$ . Para todo  $1 \leq i \leq p$ , deve existir pelo menos uma aresta  $e_i$  com a cor  $n + 4 + i$ . Essas arestas devem ser adjacentes a pelo menos  $n + 3 + i$  arestas, pela Propriedade 5.1. Então toda  $e_i$  deve estar em  $F = \{vu_n\} \cup \{u_n t_i | 1 \leq i \leq p\}$ . A aresta  $e_p$  é adjacente a uma aresta  $e_0$  colorida com  $n + 4$ . Essa aresta é adjacente a pelo menos  $n - 4$  arestas, uma de cada cor em  $\{1, \dots, n + 3\}$  e  $e_p$ . Então  $e_0$  também deve estar em  $F$ . Pela cardinalidade de  $F$ , todas as arestas desse conjunto são coloridas com cores diferentes entre  $\{n + 4, \dots, n + p + 4\}$ .

Desde que  $vu_n$  tem uma das cores  $\{n + 4, \dots, n + p + 4\}$  e tem arestas vizinhas com as cores  $\{1, \dots, n + 3\}$  em  $G$ , podemos aplicar o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 5.3 e chegar à conclusão de que a restrição de  $c$  a  $H$  é uma 3-coloração de arestas.  $\square$

**Corolário 5.2** *O problema  $f$ -Índice de Grundy é co-NP-completo.*

**Demonstração:** O problema  $f$ -Índice de Grundy é claramente co-NP, pois uma coloração gulosa de arestas de um grafo  $G$  com pelo menos  $f(\Delta(G)) + 1$  cores é um certificado que  $\Gamma'(G) > f(\Delta(G))$ . O resultado é complementado pela redução do Teorema 5.4.  $\square$

### 5.3.2 Índice de Grundy dos Caterpillars

Nesta seção, mostramos um algoritmo polinomial para resolver o problema da Coloração gulosa de arestas para os caterpillars. Esses grafos que são árvores tais que se todas as folhas e arestas incidentes às mesmas forem removidas, o que resta do grafo é um caminho induzido, chamado caminho principal.

Nos próximos resultados, demonstramos algumas propriedades da coloração gulosa de arestas dos caterpillars. Nós mostramos que se  $T$  é um caterpillar,  $\Gamma'(T) \leq \Delta(T) + 1$ , e então o índice de Grundy de  $T$  é  $\Delta(T)$  ou  $\Delta(T) + 1$ . Em seguida, damos um algoritmo polinomial para computar  $\Gamma'(T)$ .

**Lema 5.4** *Seja  $T$  um caterpillar e  $v$  um vértice no seu caminho principal. Em toda coloração gulosa de arestas de  $T$ , as cores  $1, \dots, d(v) - 2$  aparecem nas arestas incidentes a  $v$ .*

**Demonstração:** Seja  $c$  uma coloração gulosa de arestas de  $T$ . Suponha por absurdo que uma das cores  $\alpha \in \{1, \dots, d(v) - 2\}$  não é atribuída a nenhuma aresta incidente a  $v$ . Como todas as arestas incidentes a  $v$  possuem cores diferentes, pelo menos pelo menos três cores maiores que  $d(v) - 2$  aparecem em três arestas incidentes a  $v$ . Uma dessas cores, digamos  $\beta$ , deve aparecer em uma aresta  $e$  incidente a uma folha. Mas  $e$  é adjacente somente às arestas incidentes a  $v$ . Então, para algum  $\alpha \leq d(v) - 2$ ,  $e$  não é adjacente a  $\alpha$ . Como  $\alpha \leq d(v) - 2 < \beta$ , a coloração de arestas  $c$  não é gulosa.  $\square$

**Lema 5.5** *Seja  $c$  uma coloração gulosa de arestas de um caterpillar  $T$  e  $v$  um vértice no caminho principal de  $T$ . Se duas arestas  $e_1$  e  $e_2$  incidentes em  $v$  recebem cores maiores que  $d(v) - 1$ , então  $e_1$  e  $e_2$  são duas arestas do caminho principal e as arestas que tem como extremidades  $v$  e uma folha são coloridas  $1, \dots, d(v) - 2$ .*

**Demonstração:** Suponha por absurdo que uma dessas duas arestas, digamos  $e_1$ , é incidente a uma folha. Então  $e_1$  é adjacente a  $d(v) - 1$  outras arestas, e uma delas,  $e_2$ , foi colorida com uma cor maior que  $d(v) - 1$ . Portanto  $e_1$  é adjacente a no máximo  $d(v) - 2$  arestas cujas cores são

menores ou igual a  $d(v) - 1$ . Então, existe uma cor  $\alpha$  em  $\{1, \dots, d(v) - 1\}$  tal que nenhuma aresta adjacente a  $e_1$  possui a cor  $\alpha$ . Isso contradiz o fato de  $c$  ser gulosa. Então  $e_1$  e  $e_2$  são arestas do caminho principal.

Agora, pelo Lema 5.4, devem existir arestas incidentes a  $v$  com cada uma das cores em  $\{1, \dots, d(v) - 2\}$ . Dessa forma, as  $d(v) - 2$  arestas diferentes de  $e_1$  e  $e_2$ , que são as arestas que conectam  $v$  às folhas, possuem as cores  $\{1, \dots, d(v) - 2\}$ .  $\square$

**Teorema 5.5** *Se  $T$  é um caterpillar, então  $\Gamma'(T) \leq \Delta(T) + 1$ .*

**Demonstração:** Seja  $T$  um caterpillar e  $\Delta(T) = \Delta$ . Suponha por contradição que existe uma coloração gulosa de arestas  $c$  de  $T$  com  $\Delta + 2$  cores. Seja  $e$  uma aresta de  $T$  que recebeu a cor  $\Delta + 2$  em  $c$ . Tal aresta deve ser adjacente a pelo menos  $\Delta + 1$  arestas, uma de cada uma das cores  $1, \dots, \Delta + 1$ . Logo, a aresta  $e$  está no caminho principal. De acordo com o Lema 5.5, as arestas  $e_1$  e  $e_2$  adjacentes a  $e$  com as cores  $\Delta$  e  $\Delta + 1$  estão no caminho principal. Além disso, todas as arestas adjacentes a  $e$ , exceto  $e_1$  e  $e_2$ , possuem uma das cores em  $\{1, \dots, \Delta - 2\}$ . Então  $e$  não é adjacente a nenhuma aresta com a cor  $\Delta - 1$ , uma contradição.  $\square$

Na Figura 5.7 podemos ver um exemplo em que  $\Gamma'(T) = \Delta(T) + 1$ , para um caterpillar  $T$ .

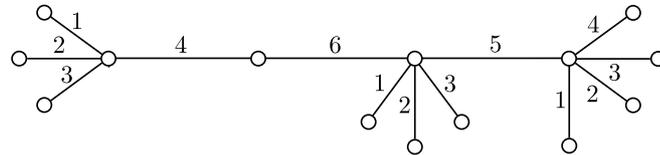


Figura 5.7: Caterpillar  $T$  com  $\Delta(T) = 5$  e  $\Gamma'(T) = 6$ .

O Teorema 5.5 implica que o índice de Grundy de um caterpillar é  $\Delta(T)$  ou  $\Delta(T) + 1$ . Dessa forma, determinar o índice de Grundy de um caterpillar é equivalente ao problema da Coloração Gulosa Mínima de Arestas. Com os próximos resultados, mostramos que podemos calcular  $\Gamma'(T)$  em tempo linear.

Vejam primeiramente algumas definições. Seja  $T$  um caterpillar com caminho principal  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . A primeira aresta de  $P$  é  $v_1v_2$ . Para qualquer aresta  $e = v_i v_{i+1} \in P$ , se removermos  $e$  de  $T$ , teremos dois caterpillars  $T_e^-$  e  $T_e^+$ , o primeiro contendo  $v_i$  e o segundo contendo  $v_{i+1}$ . Por conveniência, dizemos que o caminho principal de  $T_e^-$  é  $P_e^- = (v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$  e o caminho principal de  $T_e^+$  é  $P_e^+ = (v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n)$ . Portanto a primeira aresta de  $T_e^-$  é  $(v_i, v_{i-1})$  e a primeira aresta de  $T_e^+$  é  $(v_{i+1}, v_{i+2})$ .

**Lema 5.6** *Seja  $T$  um caterpillar de grau máximo  $\Delta$  com caminho principal  $P = (v_1, \dots, v_n)$ . Então  $\Gamma'(T) = \Delta + 1$  se e somente se existe uma aresta  $e \in E(P) \setminus \{v_1v_2, v_{n-1}v_n\}$  tal que*

- (i) uma extremidade de  $e$  tem grau  $\Delta$ ,  $e$
- (ii) um dos caterpillars  $T_e^-$  e  $T_e^+$  tem uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta do seu caminho principal é colorida com  $\Delta$  e o outro tem uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta do seu caminho principal tem a cor  $\Delta - 1$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $T$  tem uma  $(\Delta + 1)$ -coloração gulosa de arestas. Seja  $e$  uma aresta com a cor  $\Delta + 1$ . A aresta  $e$  é adjacente a uma aresta  $e_1$  com a cor  $\Delta$  e a outra  $e_2$  com a cor  $\Delta - 1$ . Pelo Lema 5.5,  $e$ ,  $e_1$  e  $e_2$  estão no caminho principal e  $e$  é incidente a um vértice de grau  $\Delta$ , provando (i). Note que  $e$  não pode ser  $v_1v_2$  ou  $v_{n-1}v_n$  uma vez que essas duas arestas são adjacentes a uma única aresta no caminho principal. Além disso, a coloração gulosa de arestas induzida em  $T_e^-$  e  $T_e^+$  claramente satisfaz (ii).

( $\Leftarrow$ ) Suponha que existe uma aresta  $e \in E(P) \setminus \{v_1v_2, v_{n-1}v_n\}$  satisfazendo (i) e (ii). Sejam  $\phi^-$  e  $\phi^+$  as colorações gulosas de arestas de  $T_e^-$  e  $T_e^+$ , respectivamente, como em (ii). Seja  $\phi$  a coloração gulosa de arestas de  $T$  definida por  $\phi(e) = \Delta + 1$ ,  $\phi(f) = \phi^-(f)$ , para todo  $f \in T_e^-$  e  $\phi(f) = \phi^+(f)$ , para todo  $f \in T_e^+$ . Vamos mostrar que  $\phi$  é uma coloração gulosa de arestas. Claramente, dado que  $\phi^-$  e  $\phi^+$  são gulosas, é suficiente provar que  $e$  é adjacente a arestas de cada uma das cores  $i$  em  $\{1, \dots, \Delta\}$ . Uma vez que  $\phi^+$  e  $\phi^-$  satisfazem (ii),  $e$  é adjacente a arestas coloridas com  $\Delta$  e  $\Delta - 1$ . Por (i),  $e$  é incidente a um vértice  $v$  de grau  $\Delta$ . Esse vértice é incidente a  $e$  e a uma aresta  $f$  no caminho principal. A aresta  $f$  é a primeira aresta de  $T_f$ , onde  $T_f = T_e^+$  ou  $T_f = T_e^-$ . Em uma coloração gulosa de arestas de  $T_f$ , a aresta  $f$  tem cor maior que  $\Delta - 2$ , então as  $\Delta - 2$  arestas incidentes a  $v$  que não são  $e$  nem  $f$  são coloridas com todas as cores entre  $1, \dots, \Delta - 2$ . Portanto  $e$  é adjacente à arestas com todas as cores em  $\{1, \dots, \Delta\}$ .  $\square$

**Lema 5.7** *Seja  $T$  um caterpillar com caminho principal  $P$  tal que a primeira aresta é  $e = uv$ .  $T$  tem uma coloração gulosa de arestas em que  $e$  recebe a cor  $k$  se e somente se uma das seguintes afirmações vale:*

- (i)  $d(u) \geq k$  ou  $d(v) \geq k$ ;
- (ii)  $d(u) = k - 1$  e  $T_e^+$  admite uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta de  $P_e^+$  possui a cor  $k - 1$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $e = uv$  com  $u$  o primeiro vértice de  $P$ . Suponha que  $T$  tem uma coloração gulosa de arestas tal que  $e$  recebe a cor  $k$  e  $e$  não é incidente a vértices de grau  $k$ . Então as arestas incidentes a  $u$  devem ter as cores  $1, \dots, d(u) - 1$ . Pela Propriedade 5.1,  $e$  deve ser adjacente a arestas com todas as cores  $1, \dots, k - 1$ . A aresta colorida com  $k - 1$

só pode ser a primeira aresta de  $P_e^+$ , e as arestas incidentes a  $v$  e a folhas recebem as cores  $1, \dots, d(v) - 2$ . Então a aresta incidente a  $e$  e colorida com  $k - 2$  deve ser incidente a  $u$ , e portanto  $d(u) - 1 \geq k - 2$ , isto é,  $d(u) \geq k - 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que (i) vale. Seja  $x$  um vértice em  $\{u, v\}$  com grau pelo menos  $k$ . Podemos colorir todas as arestas incidentes a  $x$  com  $1, \dots, d(v)$  tal que  $e$  é colorida com  $k$  e então estendemos essa coloração de arestas de forma gulosa para obter a coloração gulosa de arestas desejada de  $T$ .

Finalmente suponha que (ii) vale. Seja  $\phi$  uma coloração gulosa de arestas de  $T_e^+$  tal que a primeira aresta de  $P_e^+$  possui cor  $k - 1$ . Podemos estender essa coloração atribuindo  $k$  à  $e$  e  $1, \dots, k - 2$  às  $k - 2$  arestas que tem como extremidades  $u$  e uma folha. É fácil verificar que essa é uma coloração gulosa de arestas de  $T$ .  $\square$

O Teorema 5.5 e o Lema 5.6 implicam que o Algoritmo 4 retorna o índice de Grundy de  $T$  utilizando a Sub-rotina  $\text{primeiraAresta}(T, P, k)$ , que retorna 'sim' se um caterpillar  $T$  com caminho principal  $P$  admite uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta de  $P$  recebe a cor  $k$ .

---

**Algoritmo 4:**  $\text{indiceGrundy}(T)$

---

**Entrada:** Caterpillar  $T$ .

**Saída:**  $\Gamma'(T)$ .

```

1 Seja  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  o caminho principal de  $T$ . Compute  $d(v_i)$  para todo  $1 \leq v_n$  e
  compute  $\Delta = \Delta(T)$ .
2 para  $i = 2, \dots, n - 2$  faça
3    $e := v_i v_{i+1}$ ;
4   se  $d(v_i) = \Delta$  ou  $d(v_{i+1}) = \Delta$  então
5     se  $\text{primeiraAresta}(T_e^+, P_e^+, \Delta) = \text{TRUE}$  e  $\text{primeiraAresta}(T_e^-, P_e^-, \Delta - 1) = \text{TRUE}$ 
6       então
7          $\lfloor$  retorne  $\Delta + 1$ ;
8     se  $\text{primeiraAresta}(T_e^+, P_e^+, \Delta - 1) = \text{TRUE}$  e  $\text{primeiraAresta}(T_e^-, P_e^-, \Delta) = \text{TRUE}$ 
9       então
10         $\lfloor$  retorne  $\Delta + 1$ ;
9 Retorne  $\Delta$ ;
```

---

A sub-rotina  $\text{primeiraAresta}$  pode ser obtida pelo Algoritmo 5 de acordo com o Lema 5.7.

Vamos examinar agora a complexidade do Algoritmo 4. Primeiramente observe que a sub-rotina  $\text{primeiraAresta}(T, P, k)$  faz um número constante de operações antes de chamar

---

**Algoritmo 5:** primeiraAresta( $T, P, k$ )
 

---

**Entrada:** Caterpillar  $T$  com caminho principal  $P$  e um inteiro  $k$ .

**Saída:**  $TRUE$  se existe uma  $k$ -coloração gulosa de arestas de  $T$  com a primeira aresta de  $P$  colorida com a cor  $k$ , e  $FALSE$ , caso contrário.

- 1 Seja  $u$  o primeiro vértice de  $P$  e  $v$  o segundo vértice. (Então  $uv$  é a primeira aresta.)
  - 2 **se**  $d(u) \geq k$  **ou**  $d(v) \geq k$  **então**
  - 3     retorne  $TRUE$ ;
  - 4 **se**  $d(u) \geq k - 1$  **então**
  - 5     retorne primeiraAresta( $T - u, P - u, k - 1$ );
  - 6 retorne  $FALSE$ ;
- 

primeiraAresta( $T - u, P - u, k - 1$ ). Então uma indução simples mostra que são feitas  $O(k)$  operações no total.

O Algoritmo 4 computa primeiro (linha 1) os graus de todos os  $v_i$ , que pode ser feito em tempo  $O(|V(T)|)$ , e então pega o máximo entre todos esses valores, que também pode ser feito em tempo  $O(|V(T)|)$ .

Em uma segunda fase (linhas 2 a 8), para cada aresta  $e \in P$  que é incidente a um vértice de grau  $\Delta$ , o Algoritmo 4 faz no máximo quatro chamadas a primeiraAresta com os últimos parâmetros iguais a  $\Delta - 1$  ou  $\Delta$ . Então para cada  $e \in P$  ele faz  $O(\Delta)$  operações. Seja  $S$  o conjunto de vértices com grau  $\Delta$ . O número de arestas de  $P$  incidentes a um vértice de grau  $\Delta$  é no máximo  $2|S|$ . Porém todo vértice em  $S$  é adjacente a pelo menos  $\Delta - 2$  folhas. Então  $|V(T)| \geq |S| + (\Delta - 2)|S|$ , portanto  $|S| \leq |V(T)|/(\Delta - 1)$ . Logo, na segunda fase, o algoritmo faz no máximo  $O\left(2 \times \frac{|V(T)|}{\Delta - 1} \Delta\right) = O(|V(T)|)$  operações.

Dessa forma, no total, o Algoritmo 4 executa  $O(|V(T)|)$  operações.

## 6 Conclusões

Os problemas de coloração de vértices e de arestas, que consistem em determinar o menor número de cores necessárias para colorir os vértices e as arestas de um grafo, respectivamente, de forma que vértices adjacentes e arestas adjacentes, respectivamente, possuam cores distintas, são problemas computacionalmente difíceis e são objeto de pesquisa recorrente em teoria dos grafos em virtude dos inúmeros problemas práticos que eles modelam.

No presente trabalho, estudamos o pior desempenho dos algoritmos gulosos de coloração de vértices e de arestas e provamos dois resultados de complexidade. Provamos que o número de Grundy de um  $(q, q - 4)$ -grafo pode ser determinado em tempo polinomial. Essa classe contém estritamente a classe dos cografos e grafos  $P_4$ -esparsos, para os quais o mesmo resultado havia sido estabelecido. Esse resultado generaliza, portanto, aqueles resultados. O algoritmo apresentado usa a decomposição primeval desses grafos, determinando o parâmetro em tempo polinomial.

Uma consequência desse resultado é a prova de que o problema de coloração gulosa é FTP (Fixed Parameter Tractable), isto é, pode ser resolvido em tempo  $f(k)p(n)$  para um parâmetro  $k$ , o que era desconhecido até o momento. Como vimos anteriormente, todo grafo pertence à  $(q, q - 4)$  para algum  $q$ , e então podemos utilizar  $q$  como parâmetro para o algoritmo FTP.

Uma questão interessante a ser investigada é a determinação da relação dos  $(q, q - 4)$ -grafos com os grafos  $P_4$ -carregados estendidos gordos e os grafos livres de  $P_5$ . As três classes possuem interseção, porém, para as duas primeiras, o número guloso pode ser calculado em tempo polinomial enquanto para a última é NP-completo. É possível que essa interseção seja exatamente os únicos grafos livres de  $P_5$  para os quais o problema pode ser resolvido em tempo polinomial.

No que se refere à coloração de arestas, provamos que o problema de determinar o índice de Grundy é NP-completo para grafos em geral e polinomial para grafos caterpillar, implicando que o número de Grundy é polinomial para os grafos linha desses. Mais especificamente provamos que o índice de Grundy dos caterpillar é  $\Delta$  ou  $\Delta + 1$ , e apresentamos um algoritmo linear

para determiná-lo exatamente. Dado que os caterpillar são árvores bastante especiais, a próxima questão a ser investigada é a complexidade do problema para árvores quaisquer.

## *Lista de Figuras*

1.1	$P_4$ e suas partições. . . . .	p. 10
2.1	Um grafo e seu grafo linha. . . . .	p. 15
2.2	Os nove subgrafos proibidos de um grafo linha. . . . .	p. 16
2.3	Aranhas. . . . .	p. 17
2.4	Grafos $P_4$ -leve. . . . .	p. 17
2.5	Exemplo de grafos que pertencem e não pertencem aos $(5, 1)$ -grafos. . . . .	p. 18
3.1	$P_4$ e suas partições. . . . .	p. 22
3.2	Grafo não $P_4$ -conexo. . . . .	p. 22
3.3	Grafo particionado em suas $P_4$ -componentes. . . . .	p. 23
3.4	Grafo com $P_4$ -componente separável $H$ . . . . .	p. 24
4.1	Grafo $G$ e sua árvore de decomposição modular. . . . .	p. 28
4.2	Operação 2. . . . .	p. 29
4.3	Grafo e a árvore de decomposição primeval correspondente. . . . .	p. 31
5.1	Árvores binomiais. . . . .	p. 34
5.2	Construção de um $k$ -átomo a partir de um $\{k - 1\}$ -átomo $H$ com $m = 3$ . . . . .	p. 35
5.3	Grafo $H$ . . . . .	p. 38
5.4	Árvores binomiais em arestas. . . . .	p. 42
5.5	Grafo $G$ obtido de um grafo cúbico $H$ . . . . .	p. 43
5.6	Grafo $G'$ obtido de um grafo cúbico $H$ . . . . .	p. 45
5.7	Caterpillar $T$ com $\Delta(T) = 5$ e $\Gamma'(T) = 6$ . . . . .	p. 47

# Índice Remissivo

- $P_4$ , 9
- $P_4$ -cadeia, 22
- $P_4$ -componente, 10, 23
- $P_4$ -componente separável, 24
- $P_4$ -conectividade, 9, 21
- $P_4$ -estrutura, 9
- $P_4$ -isomorfismo, 9
- $k$ -átomos, 35
- índice
  - cromático, 8, 20
  - de Grundy, 9
- árvore, 14
  - de decomposição modular, 27
  - de decomposição primeval, 30
- árvores binomiais, 34
- Algoritmo guloso de coloração
  - de arestas, 40
- algoritmo guloso de coloração, 9, 33
  - de arestas, 9
- aranha, 16
  - gorda, 16
  - magra, 16
- arestas, 12
  - adjacentes, 12
  - incidentes a um vértice, 12
  - múltiplas, 12
- caminho, 13
  - induzido, 13
- ciclo, 13
- classe de cor, 19
- clique, 13
- cografo, 9, 15
- coloração, 18
  - de arestas, 19
  - gulosa, 33
    - de arestas, 41
  - própria, 8, 19
    - de arestas, 8
- complemento de um grafo, 13
- componentes de um grafo, 14
- conjunto
  - estável, 13
  - homogêneo, 26
  - independente, 13
- cor, 18
- corda, 13
- decomposição
  - modular, 27
  - primeval, 29
- emparelhamento, 13
- extremidades de uma aresta, 12
- fatores, 27
- folhas, 14
- grafo, 12
  - $(q, q - 4)$ , 9, 18
  - $P_4$ -arrumado, 17
  - $P_4$ -conexo, 9, 21
  - $P_4$ -esparso, 9, 16
  - $P_4$ -extensível, 17
  - $P_4$ -leve, 17
  - $P_4$ -reduzível, 15
  - acíclico, 14
  - bipartido, 14
  - bipartido completo, 14
  - cúbico, 15
  - caterpillar, 10
  - completo, 13
  - conexo, 14
  - desconexo, 14
  - estrela, 14
  - linha, 9, 15
  - livre de  $P_n(C_n)$ , 13
  - pequeno, 32

- primo, 26
- quociente, 27
- regular, 15
- simples, 12
- split, 15
- trivial, 13
- vazio, 13
- grafos disjuntos, 14
- grau de um vértice, 13
  
- isomorfismo, 13
  
- junção de grafos, 14
  
- laço, 12
  
- módulo, 26
  - forte, 26
  - maximal forte, 27
  - trivial, 26
  
- nó, 14
  - interno, 14
  - ancestral, 14
  - descendente, 14
  - filho, 15
  - pai, 15
  - paralelo, 28
  
- raiz, 14
- série, 28
- vizinhança, 28
  
- número
  - cromático, 8, 19
  - first-fit, 34
  - guloso, 34
  - de Grundy, 9, 34
  - guloso, 34
  
- partição de congruência, 27
- partição de um conjunto, 13
- passeio, 13
- produto lexicográfico, 14
  
- subgrafo, 13
  - induzido, 13
  
- união de grafos, 14
- união disjunta de grafos, 14
  
- vértices, 12
  - adjacentes, 12
  - conectados, 13
  - fracos, 23
  - incidentes a uma aresta, 12
- vizinhança, 12

## *Referências Bibliográficas*

- [1] ARAÚJO, J. C. S., AND LINHARES-SALES, C. Grundy number of  $P_4$ -classes. In *LAGOS'09—V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*, vol. 35 of *Electron. Notes Discrete Math.* Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009, pp. 21–27.
- [2] ASTÉ, M., HAVET, F., AND LINHARES-SALES, C. Grundy number and products of graphs. *Discrete Math.* 310, 9 (2010), 1482–1490.
- [3] BABEL, L. On the  $p_4$ -structure of graphs. *Habilitationsschrift, Zentrum Mathematik, Technische Universität München* (1997).
- [4] BABEL, L. Triangulating graphs with few  $P_4$ 's. *Discrete Appl. Math.* 89, 1-3 (1998), 45–57.
- [5] BABEL, L., KLOKS, T., KRATOCHVIL, J., KRATSCH, D., MÜLLER, H., AND OLARIU, S. Efficient algorithms for graphs with few  $P_4$ 's. *Discrete Math.* 235, 1-3 (2001), 29–51. *Combinatorics* (Prague, 1998).
- [6] BABEL, L., AND OLARIU, S. A new characterization of  $P_4$ -connected graphs. In *Graph-theoretic concepts in computer science (Cadenabbia, 1996)*, vol. 1197 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer, Berlin, 1997, pp. 17–30.
- [7] BABEL, L., AND OLARIU, S. On the structure of graphs with few  $P_4$ s. *Discrete Appl. Math.* 84, 1-3 (1998), 1–13.
- [8] BAUMANN, S. A linear algorithm for the homogeneous decomposition of graphs. Tech. Rep. M-9615, Zentrum Mathematik, Technische Universität München, 1996.
- [9] BEINEKE, L. W. Characterizations of derived graphs. *J. Combinatorial Theory* 9 (1970), 129–135.
- [10] BOLLOBÁS, B. *Modern graph theory*, vol. 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [11] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [12] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph theory*, vol. 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [13] BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 (1941), 194–197.
- [14] CHVÁTAL, V. A semistrong perfect graph conjecture. In *Topics on perfect graphs*, vol. 88 of *North-Holland Math. Stud.* North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 279–280.

- [15] CORNEIL, D. G., LERCHS, H., AND BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. *Discrete Appl. Math.* 3, 3 (1981), 163–174.
- [16] GALLAI, T. Transitiv orientierbare Graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* 18 (1967), 25–66.
- [17] GALLAI, T. A translation of T. Gallai’s paper: “Transitiv orientierbare Graphen” [*Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 25–66; MR0221974 (36 #5026)]. In *Perfect graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim. Wiley, Chichester, 2001, pp. 25–66. Translated from the German and with a foreword by Frédéric Maffray and Myriam Preissmann.
- [18] GIAKOUMAKIS, V., ROUSSEL, F., AND THUILLIER, H. On  $P_4$ -tidy graphs. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 1, 1 (1997), 17–41 (electronic).
- [19] GOYAL, N., AND VISHVANATHAN, S. Np-completeness of undirected greedy numbering and related problems. Manuscript.
- [20] GYÁRFÁS, A., AND LEHEL, J. On-line and first fit colorings of graphs. *J. Graph Theory* 12, 2 (1988), 217–227.
- [21] HABIB, M., MONTGOLFIER, F., AND PAUL, C. A simple linear-time modular decomposition algorithm for graphs, using order extension. In *Algorithm theory—SWAT 2004*, vol. 3111 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer, Berlin, 2004, pp. 187–198.
- [22] HAVET, F., MAIA, K., AND YU, J. Greedy edge-colouring. manuscript.
- [23] HAVET, F., AND SAMPAIO, L. On the (k-improper) greedy number of a graph. Manuscript, Março 2010.
- [24] HOANG, C. T. *Perfect graphs*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1985. Thesis (Ph.D.)—McGill University (Canada).
- [25] HOLYER, I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.* 10, 4 (1981), 718–720.
- [26] JAMISON, B., AND OLARIU, S. A new class of brittle graphs. *Stud. Appl. Math.* 81, 1 (1989), 89–92.
- [27] JAMISON, B., AND OLARIU, S.  $P_4$ -reducible graphs—a class of uniquely tree-representable graphs. *Stud. Appl. Math.* 81, 1 (1989), 79–87.
- [28] JAMISON, B., AND OLARIU, S. On a unique tree representation for  $P_4$ -extendible graphs. *Discrete Appl. Math.* 34, 1-3 (1991), 151–164. *Combinatorics and theoretical computer science* (Washington, DC, 1989).
- [29] JAMISON, B., AND OLARIU, S. A tree representation for  $P_4$ -sparse graphs. *Discrete Appl. Math.* 35, 2 (1992), 115–129.
- [30] JAMISON, B., AND OLARIU, S.  $p$ -components and the homogeneous decomposition of graphs. *SIAM J. Discrete Math.* 8, 3 (1995), 448–463.
- [31] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*. Plenum, New York, 1972, pp. 85–103.

- [32] KÖNIG, D. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.* 77, 4 (1916), 453–465.
- [33] LERCHS, H. On cliques and kernels. Tech. rep., Department of Computer Science, University of Toronto. Technical Report, Março 1971.
- [34] LUND, C., AND YANNAKAKIS, M. On the hardness of approximating minimization problems. *J. Assoc. Comput. Mach.* 41, 5 (1994), 960–981.
- [35] MCCONNELL, R. M., AND SPINRAD, J. P. Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Math.* 201, 1-3 (1999), 189–241.
- [36] MÖHRING, R. H. Algorithmic aspects of the substitution decomposition in optimization over relations, sets systems and Boolean functions. *Ann. Oper. Res.* 4, 1-4 (1985), 195–225.
- [37] PEDROTTI, V. Decomposição modular de grafos não orientados. Master’s thesis, UNICAMP, Fevereiro 2007.
- [38] REED, B. A semistrong perfect graph theorem. *J. Combin. Theory Ser. B* 43, 2 (1987), 223–240.
- [39] SEINSCHE, D. On a property of the class of  $n$ -colorable graphs. *J. Combin. Theory* (1974).
- [40] VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph. *Diskret. Analiz* No. 3 (1964), 25–30.
- [41] ZAKER, M. Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australas. J. Combin.* 31 (2005), 325–329.
- [42] ZAKER, M. Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Math.* 306, 23 (2006), 3166–3173.