b-coloração de grafos com poucos P_4's

V. Campos, C. Linhares Sales, A. Maia, R. Sampaio

Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910, 60455–760 Fortaleza, CE, Brazil

{campos,linhares,karol,rudini}@lia.ufc.br

Resumo

Uma b-coloração de um grafo G é uma coloração própria na qual toda classe de cor possui um vértice que é adjacente a pelo menos um vértice em cada uma das outras classes de cor. O número b-cromático $\chi_b(G)$ de G é o maior inteiro t tal que G possui uma b-coloração com t cores. [Irving e Manlove, 1999] provaram que determinar o número b-cromático de um grafo qualquer G é um problema NP-Difícil. Em 2009, [Bonomo et al., 2009] provaram que determinar o número b-cromático é polinomial para cografos e grafos P_4-esparsos. Neste artigo, nós generalizamos esse resultado para a classe dos $(q, q-4)$-grafos, q sendo qualquer inteiro fixo, que são grafos tais que nenhum conjunto de no máximo q vértices induz mais do que $q-4$ diferentes P_4's.
PALAVRAS-CHAVE: b-coloração, decomposição primeval, $(q, q-4)$-grafos.
ÁREA: Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG).

Abstract

A b-coloring of a graph is a coloring such that every color class contains a vertex adjacent to at least one vertex in each other color class. The b-chromatic number $\chi_b(G)$ of a graph G is the maximum number t such that there exists a b-coloring of G with t colors. [Irving e Manlove, 1999] proved that determining $\chi_b(G)$ for a general graph G is an NP-Hard problem. In 2009, [Bonomo et al., 2009] presented a polynomial time algorithm to compute the b-chromatic number of P_4-sparse graphs. In this work, we generalize this result for the class of $(q, q-4)$-graphs, for every fixed q, which are the graphs for which no set of at most q vertices induces more than $q-4$ distinct P_4's.
KEYWORDS: b-coloring, primeval decomposition, $(q, q-4)$-graphs.
AREA: Graph Theory and Algorithms.

1 Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo finito não direcionado, sem laços nem arestas múltiplas. Uma k-coloração dos vértices de G é uma atribuição c de cores aos vértices de G de forma que para qualquer aresta $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. O conjunto dos vértices de G coloridos com uma mesma cor i forma uma classe de cor c_i da coloração c. O problema clássico de coloração consiste em determinar o número cromático de G, ou seja, o menor inteiro k tal que G admite uma k-coloração de seus vértices. Esse problema é NP-difícil. De fato, a menos $P = NP$, não existe algoritmo aproximativo para o problema de determinar o número cromático de um grafo [Lund e Yannakakis, 1994].

Uma forma de abordar o problema é obter uma coloração c qualquer do grafo G, que utilize por exemplo k cores, e aplicar alguma estratégia de melhoria, obtendo a partir de c uma coloração com um menor número de cores. Observe que se c possui uma classe de cor c_i tal que para todo vértice $v \in c_i$, existe pelo menos uma outra classe de cor c_j tal que v não possui vizinhos em c_j, podemos esvaziar a classe de cor c_i, recolorindo cada vértice de v de c_i com a cor j que não ocorre não sua vizinhança. Essa recoloração dos vértices permitiria obter uma coloração com $k-1$ cores a partir de c. Dizemos que um vértice v é dominante se v é adjacente a pelo menos um vértice em cada outra classe de cor, isto é, se todas as cores ocorrem na vizinhança de v. É fácil ver que se uma classe de cor c_i tem um vértice dominante, não se pode melhorar a coloração c aplicando a estratégia acima.

Uma b-coloração de G é uma coloração na qual toda classe de cor possui um vértice dominante. O número b-cromático $\chi_b(G)$ é o máximo inteiro t tal que existe uma b-coloração de G com t cores. Observe que o número b-cromático de G mede o pior desempenho da estratégia de melhoria de coloração descrita acima. Esse parâmetro foi introduzido por [Irving e Manlove, 1999]. Eles provaram que determinar o número b-cromático é polinomial para árvores, mas é NP-Difícil em geral. [Kratochvíl et al., 2002] provaram que determinar o número b-cromático é NP-Difícil até mesmo para grafos bipartidos. Recentemente, foram feitos vários estudos envolvendo conceitos relacionados ao problema da b-coloração, tais como b-continuidade e b-monotonicidade (ver, por exemplo, [Hoàng et al., 2009, Kára et al., 2004, Klein e Kouider, 2004, Maffray e Mechbbek, 2009]).

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que G é um P_4 se $V(G) = \{x, y, z, w\}$ e $E(G) = \{xy, yz, zw\}$. Dizemos que x e w são as extremidades de G e yz é sua aresta do meio. Dizemos que G é um cografo se G é livre de P_4's, ou seja, G não possui um subgrafo induzido isomorfo ao P_4. Por outro lado, dizemos que G é P_4-esparso se cada cinco vértices de G induzem no máximo um P_4.

Em 2004, o problema da b-coloração foi investigado para cografos em [Klein e Kouider, 2004], sem uma conclusão sobre a complexidade do problema para esta classe. Sabe-se que muitos problemas NP-Difíceis são resolvidos em tempo polinomial para cografos, como determinar o número cromático, mas sabe-se que calcular o número a-cromático $\chi_a(G)$ (um parâmetro semelhante a $\chi_b(G)$) de um cografo G é NP-Difícil [Bodlaender, 1989].

A classe dos cografos, introduzida em [Corneil et al., 1981], tem uma estrutura bem definida, como se pode ver na proposição que segue.

Proposição 1.1. *[Corneil et al., 1981] Todo subgrafo induzido de um cografo é também um cografo. Se G é um cografo não trivial, então G ou $\bar{G}$ é desconexo, onde $\bar{G}$ é o grafo complemento de G.*

Em 2005, o problema da b-coloração foi investigado para a classe dos grafos P_4-esparsos em [Hoàng e Kouider, 2005], sem resultados conclusivos a respeito da complexidade do problema para essa classe. Os grafos P_4-esparsos, introduzidos em [Hoàng, 1985], contém os cografos e podem ser reconhecidos em tempo linear [Jamison et al., 1992]. Além disso, de forma semelhante aos cografos, eles também possuem uma estrutura bem definida, que será mostrada a seguir. Para tanto, faz-se necessária a definição dos grafos *aranha*. Um grafo $G = (V, E)$ é uma aranha se $V(G)$ pode ser particionado em conjuntos S, C e R, onde os conjuntos $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$, para algum $k \geq 1$, formam respectivamente um conjunto independente e uma clique; além disso, s_i é adjacente a c_j se e só se $i = j$ (*aranha magra*), ou s_i é adjacente a c_j se e só se $i \neq j$ (*aranha gorda*); e, finalmente, existem todas as arestas entre os vértices de R e C e não existe nenhuma aresta entre os vértices de R e S. Chamaremos os conjuntos S, C e R respectivamente de *pernas*, *corpo* e *cabeça* da aranha. Dizemos que a aranha é sem cabeça se $R = \emptyset$.

Proposição 1.2. *[Hoàng, 1985, Jamison e Olariu, 1992] Se G é um grafo P_4-esparso não trivial, então G ou $\bar{G}$ é desconexo, ou G é uma* aranha*, onde a cabeça da aranha, caso exista, induz um grafo P_4-esparso.*

Em 2009, usando esses resultados estruturais, Bonomo, Durán, Maffray, Marenco e Valencia-Pabon [Bonomo et al., 2009] provaram que determinar o número b-cromático de grafos P_4-esparsos (e, em particular, cografos) é polinomial, apresentando um algoritmo polinomial de programação dinâmica para resolvê-lo. Nesse algoritmo, um vetor de dominância, que definiremos mais tarde, é calculado através da visita da árvore de decomposição modular do grafo. Uma vez calculado o vetor, o problema está resolvido.

Neste artigo, nós generalizamos esse resultado para uma vasta quantidade de classes de grafos. Dizemos que um grafo é um $(q, q-4)$-*grafo* se nenhum conjunto com q vértices induz mais do que $q - 4$ diferentes P_4's. Observe que cografos e grafos P_4-esparsos são exatamente $(4, 0)$-grafos e $(5, 1)$-grafos respectivamente. Os grafos P_4-*estensíveis* que são livres de C_5 são os $(6, 2)$-grafos e os grafos P_4-*leve* são $(7, 3)$-grafos especiais. O teorema principal abaixo diz que, para qualquer $q > 0$ fixo, temos um algoritmo polinomial para obter o número b-cromático de $(q, q-4)$-grafos.

Teorema 1.3 (Resultado principal)**.** *Seja $q > 0$ um inteiro fixo. O número b-cromático de um $(q, q-4)$-grafo pode ser determinado em tempo polinomial.*

Esse artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 possui resultados estruturais sobre os $(q, q-4)$-grafos e a chamada decomposição primeval, baseada em grafos p-conexos. A Seção 3 mostra os resultados de [Bonomo et al., 2009], incluindo a definição de *vetor de dominância* e seu cálculo através da decomposição modular dos grafos P_4-esparsos, além do enunciado do nosso lema técnico principal, que completa o método de cálculo do vetor de dominância através da decomposição primeval de um $(q, q-4)$-grafo.

2 Decomposição de $(q, q-4)$-grafos

As Proposições 1.1 e 1.2 permitem caracterizar os grafos cografos e P_4-esparsos através de suas árvores de decomposição modular. Ao invés de introduzir formalmente o conceito de módulo e decomposição modular, vamos definir a árvore de decomposição de um grafo G qualquer como sendo a árvore T_G, onde as folhas são subconjuntos de vértices de G e cada nó interno v, com filhos $v_1, \ldots, v_l$, representa o subgrafo de G, denotado por $G(v)$, induzido pelas folhas da subárvore de T_G enraizada em v. Além disso, v é rotulado de acordo com a sua relação com os grafos $G(v_1), \ldots, G(v_l)$. Por essa definição, a raiz de T_G representa G.

Caso o rótulo de v seja *união disjunta*, $G(v)$ é a união disjunta de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$, ou seja, o conjunto de vértices de $G(v)$ é a união dos conjuntos de vértices de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$ e o conjunto de arestas de $G(v)$ é a união dos conjuntos de arestas de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$.

Caso o rótulo de v seja *junção*, então $G(v)$ é a união completa de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$, ou seja, o conjunto de vértices de $G(v)$ é a união dos conjuntos de vértices de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$ e o conjunto de arestas de $G(v)$ é a união dos conjuntos de arestas de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$, além de todas as arestas possíveis entre os vértices de $G(v_1), \ldots, G(v_l)$.

Caso o rótulo de v seja *aranha*, $G(v)$ é isomorfo a uma aranha.

A Proposição 1.1 implica que para cada cografo G, existe uma árvore de decomposição T_G, onde cada nó interno é rotulado *união disjunta* ou *junção* e cada folha é um vértice de G. Essa árvore pode ser calculada em tempo polinomial [Corneil et al., 1984].

A Proposição 1.2 implica que para cada grafo P_4-esparso G, existe uma árvore de decomposição T_G, onde cada nó interno é rotulado *união disjunta* ou *junção* ou *aranha* e cada folha é um vértice de G [Jamison e Olariu, 1992]. Essa árvore também pode ser calculada em tempo polinomial [Jamison et al., 1992].

Utilizando essas decomposições, [Bonomo et al., 2009] apresentaram um algoritmo polinomial para computar o número b-cromático de cografos e de grafos P_4-esparsos.

[Babel e Olariu, 1998] chamaram de $(q, q-4)$-grafos os grafos tais que nenhum conjunto de no máximo q vártices induz mais $q-4$ P_4's distintos. Eles também provaram a existência de uma decomposição em árvore para $(q, q-4)$-grafos cujas folhas induzem grafos especiais, chamados grafos p-conexos.

Definição 2.1. *Um grafo G é* p-conexo *se, para toda partição de $V(G)$ em dois conjuntos disjuntos A e B não-vazios, existe um P_4 induzido com vértices de A e B. Um grafo p-conexo G é separável se existe uma partição de $V(G)$ em subconjuntos A e B não-vazios tal que cada P_4 induzido que possui vértices de A e B tem sua aresta do meio em A e suas extremidades em B. Um subgrafo induzido que é p-conexo e, além disso, é maximal com relação a essa propriedade, é chamado de p-componente. Vértices que não estão contidos em uma p-componente não-trivial são chamado de* fracos*.*

O teorema abaixo de [Jamison e Olariu, 1995] é um importante resultado sobre a estrutura geral de grafos arbitrários, e utiliza grafos p-conexos.

Teorema 2.2 (teorema da estrutura p-conexa[Jamison e Olariu, 1995])**.** *Dado um grafo $G = (V, E)$, exatamente uma das seguintes afirmações é válida:*

(i) G é desconexo;

(ii) $\bar{G}$ é desconexo;

(iii) G contém uma única p-componente separável própria H com partição (H_1, H_2) e um subgrafo H_f disjunto de H tal que todo vértice de H_f (que por definição é fraco) é adjacente a todo vértice de H_1 e a nenhum vértice de H_2;

(iv) G é p-conexo.

O teorema acima sugere uma decomposição em árvore para grafos em geral, chamada *decomposição primeval*, que pode ser calculada em tempo polinomial [Jamison e Olariu, 1995]. As folhas da árvore de decomposição primeval de um grafo G são as suas componentes p-conexas (ver (iv)) e seus vértices fracos, e os nós internos v são rotulados *união disjunta* (ver (i)), *junção* (ver (ii)) ou *p-componente*, indicando que $G(v)$ satisfaz (iii).

Foi provado em [Babel e Olariu, 1998] que todo $(q, q-4)$-grafo p-conexo é uma aranha sem cabeça ou possui menos de q vértices. Então, em uma decomposição primeval de um $(q, q-4)$-grafo, as p-componentes separáveis H dos grafos $G(v)$, onde v é rotulado *p-componente* ou são aranhas sem cabeça ou grafos com menos de q vértices.

Nos casos em que v for rotulado união disjunta ou junção, podemos usar os resultados de [Bonomo et al., 2009] na obtenção do algoritmo para determinar o o número b-cromático de G. Para as folhas que induzem grafos p-conexos isomorfos a aranhas, podemos ainda usar os resultados de [Bonomo et al., 2009]. Neste artigo, mostramos como resolver os casos em que os grafos p-conexos induzidos pelas folhas são grafos com menos de q vértices. Além disso, mostramos o tratamento dado aos vértices fracos de $G(v)$, caso existam.

3 b-coloração de $(q, q-4)$-grafos

[Bonomo et al., 2009] mostraram como obter o número b-cromático de um cografo ou de um grafo P_4-esparso em tempo polinomial. Para isso, eles introduziram o conceito de vetor de dominância de um grafo:

Definição 3.1. *Seja G um grafo. O* vetor de dominância *dom_G de G é tal que $dom_G[t]$ é o número máximo de classes de cores distintas que possuem vértices dominantes dentre todas as colorações de G com t cores, para $\chi(G) \leq t \leq |V(G)|$.*

Note que um grafo G admite uma b-coloração com t cores se e somente se $dom_G[t] = t$. Logo, o número b-cromático $\chi_b(G)$ é o maior número t tal que $dom_G[t] = t$. Logo, uma vez calculado $dom_G[t]$ para um grafo G, o seu número b-cromático pode ser facilmente obtido. [Bonomo et al., 2009] provaram que o vetor de dominância pode ser calculado em tempo polonomial para cografos e grafos P_4-esparsos.

Os Lemas 3.2 e 3.3 abaixo de [Bonomo et al., 2009] mostram como obter o vetor de dominância usando a árvore de decomposição do grafo, segundo os rótulos dos nós internos. Observamos que o cálculo de $\chi(G)$ foi mostrado em [Corneil et al., 1984] e [Jamison et al., 1995] e, para fins de simplificação, consideramos que os nós internos união disjunta e junção têm apenas dois filhos, uma vez que essas operações são associativas.

Lema 3.2 (Vetor de dominância para os grafos representados pelos vértices com rótulos união e junção [Bonomo et al., 2009])**.** *Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ os grafos representados pelos filhos de um nó v e faça $G = G(v)$. Se v é rotulado união disjunta, então $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ e*

$$dom_G[t] \;=\; min\{t, dom_{G_1}[t] + dom_{G_2}[t]\}.$$

Se v é rotulado junção, então $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Seja $a = max\{\chi(G_1), t - |V(G_2)|\}$ e $b = \min\{|V(G_1)|, t - \chi(G_2)\}$. Tem-se

$$dom_G[t] \;=\; \max_{a \leq j \leq b}\{dom_{G_1}[t] + dom_{G_2}[t-j]\}.$$

Lema 3.3 (Vetor de dominância de aranhas [Bonomo et al., 2009])**.** *Seja G uma aranha com partição (S, C, R), onde $k = |S| = |C| \geq 2$. Se R é vazio, considere $\chi(G[R]) = 0$ e $dom_{G[R]}[0] = 0$. Então, $\chi(G) = k + \chi(G[R])$ e*

(a) Se G é uma aranha magra, então

$$dom_G[i] \;=\; \begin{cases} k + dom_{G[R]}[i-k], & \text{if } k + \chi(G[R]) \leq i \leq k + |R|, \\ k, & \text{if } i = k + |R| + 1, \\ 0, & \text{if } i > k + |R| + 1 \end{cases}$$

(b) Se G é uma aranha gorda, então

$$dom_G[i] \;=\; \begin{cases} k + dom_{G[R]}[i-k], & \text{if } k + \chi(G[R]) \leq i \leq k + |R|, \\ \min\{k, 4k - 2i + 2|R|\}, & \text{if } k + |R| + 1 \leq i \leq 2k + |R|, \\ 0, & \text{if } i > 2k + |R| \end{cases}$$

Usando esses lemas, Bonomo et al. provaram o teorema abaixo:

Teorema 3.4 ([Bonomo et al., 2009])**.** *O vetor de dominância e o número b-cromático de um cografo ou um grafo P_4-esparso pode ser calculado em $O(n^3)$.*

Para resolver a b-coloração para os $(q, q-4)$-grafos, primeiramente aplicamos a decomposição primeval. O próximo passo é calcular o vetor de dominância para as folhas. Calcular dom_G para vértices fracos é trivial. No caso das folhas que induzem grafos p-conexos, se forem aranhas, o Lema 3.3 mostra como encontrar dom_G. Se a folha induz um grafo p-conexo com menos de q vértices, podemos calcular dom_G verificando todas as possibilidades em tempo constante.

Dado que sabemos como determinar o vetor de dominância para as folhas, precisamos descobrir como calcular para os nós internos da árvore. Se o nó em questão for rotulado por *união* ou *junção*, o Lema 3.2 mostra como obter esse vetor.

Se o nó v for rotulado *p-componente*, temos dois casos: a p-componente separável, que chamaremos H, de $G(v)$ é uma aranha sem cabeça (com $R = \emptyset$) ou é um grafo com menos de q vértices. No primeiro caso, podemos utilizar o Lema 3.3. Observe que aqui, ainda que $G(v)$ possua vértices fracos, esses vértices definem, junto com H, uma aranha com cabeça, caso que também é tratado por [Bonomo et al., 2009]. A determinação de dom_G para o segundo caso foi o nosso maior trabalho e é o nosso lema técnico principal.

Lema 3.5. *Seja v um nó rotulado* p-componente *tal que a p-componente separável H possui menos de q vértices, $q > 0$ fixo. Seja H_f o grafo induzido pelos vértices fracos de $G(v)$. Suponha que $|V(H_f)| = n$ e considere que H_1 e H_2 é são os subgrafos induzidos pela partição de $V(H)$ tal que existem todas as arestas entre os vértices de H_f e H_1 e nenhuma aresta entre os vértices de H_f e H_2. Então, dado o número cromático $\chi(H_f)$ e o vetor de dominância dom_{H_f} de H_f, nós podemos calcular o número cromático $\chi(G(v))$ em tempo $\Theta(n)$ e o vetor de dominância $dom_{G(v)}$ de $G(v)$ em tempo $\Theta(n^2)$.*

Esse resultado é intuitivo porque H é um grafo pequeno com tamanho constante q. Então é possível aplicar várias colorações em H e fazer vários cálculos em tempo constante, dependendo somente de q, e não de n. Em [Babel, 1997], foi provado que o número cromático de um $(q, q-4)$-grafo pode ser calculado em tempo linear utilizando a decomposição primeval. Então, o nosso maior trabalho foi calcular o vetor de dominância. Apesar de intuitiva, a prova é muito extensa e técnica. Por esse razão, ela foi omitida.

Com esse lema, temos a prova do resultado principal:

Prova do Teorema 1.3. Segue diretamente do Teorema 2.2 e Lemas 3.2, 3.3 e 3.5 como apresentado. A partir do vetor de dominâncias de G, o número b-cromático é o máximo t tal que $dom_G[t] = t$. □

Referências

[Babel, 1997] L. Babel, On the P_4 structure of graphs, *Habilitationsschrift, Zentrum Mathematik, Technische Universität München* (1997).

[Babel e Olariu, 1998] L. Babel and S. Olariu, On the structure of graphs with few P_4s, *Discrete Applied Mathematics* **84** (1998), 1–13.

[Babel et al., 2001] L. Babel and T. Kloks and J. Kratochvíl and D. Kratsch and H. Muller and S. Olariu, Efficient algorithms for graphs with few $P_4's$, *Discrete Mathematics* **235** (2001), 29–51.

[Bodlaender, 1989] H. L. Bodlaender, Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs, *Information Processing Letters* **31** (1989), 135–138.

[Bonomo et al., 2009] F. Bonomo and G. Durán and F. Maffray and J. Marenco and M. Valencia-Pabon, On the b-coloring of cographs and P_4-sparse graphs, *Graphs and Combinatorics* **25** n.2 (2009), 153–167.

[Corneil et al., 1981] D. Corneil and H. Lerchs and L. K. Stewart, Complement reducible graphs, *Discrete Applied Mathematics* **3** n.3 (1981), 163–174.

[Corneil et al., 1984] D. Corneil and Y. Perl and L. K. Stewart, Cographs: recognition, applications and algorithms, *Congressus Numerantium* **43** (1984), 249–258.

[Hoàng, 1985] C. Hoàng, Perfect graphs, *PhD thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal* (1985).

[Hoàng e Kouider, 2005] C. Hoàng and M. Kouider, On the b-dominant coloring of graphs, *Discrete Applied Mathematics* **152** (2005), 176–186.

[Hoàng et al., 2009] C. Hoàng and C. Linhares-Sales and F. Maffray, On minimally b-imperfect graphs, *Discrete Applied Mathematics* **157** n.17 (2009), 3519–3530.

[Irving e Manlove, 1999] R. W. Irving and D. F. Manlove, The b-chromatic number of a graph, *Discrete Applied Mathematics* **91** (1999), 127–141.

[Jamison e Olariu, 1992] B. Jamison and S. Olariu, A tree representation for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **35** (1992), 115–129.

[Jamison et al., 1992] B. Jamison and S. Olariu, Recognizing P_4-sparse graphs in linear time, *SIAM Journal on Computing* **21** (1992), 381–406.

[Jamison e Olariu, 1995] B. Jamison and S. Olariu, P-components and the homogeneous decomposition of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **8** (1995), 448–463.

[Jamison et al., 1995] B. Jamison and S. Olariu, Linear-time optimization algorithms for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **61** (1995), 155–175.

[Lund e Yannakakis, 1994] C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems, *Journal of the ACM* **41**(5) (1994), 960–981.

[Kára et al., 2004] J. Kára and J. Kratochvíl and M. Voigt, b-continuity, *Technical Report M 14/04, Technical University Olmenau, Faculty of Mathematics and Natural Sciences* (2004).

[Klein e Kouider, 2004] S. Klein and M. Kouider, On b-perfect graphs, *In Annals of the XII Latin-Ibero-American Congress on Operations Research, Havanna, Cuba* (October 2004).

[Kratochvíl et al., 2002] J. Kratochvíl and Zs. Tuza and M. Voigt, On the b-chromatic number of a graph, *Lecture Notes in Computer Science* **2573** (2002), 310–320.

[Maffray e Mechbbek, 2009] F. Maffray and M. Mechebbek, On b-perfect chordal graphs, *Graphs and Combinatorics* **25** n.3 (2009), 365–375.