ANALYSE ET AMÉLIORATION D'UN SCHÉMA À RECONSTRUCTION QUADRATIQUE.

Alexandre Carabias, alexandre.carabias@inria.fr

INRIA Sophia Antipolis, FRANCE

1. Introduction

Motivation : On s'intéresse à des applications en maillages non-structurés pour l'acoustique, la turbulence et les interfaces liquide-gaz. On cherche à définir un schéma précis à l'ordre 3, peu coûteux et le plus précis possible.

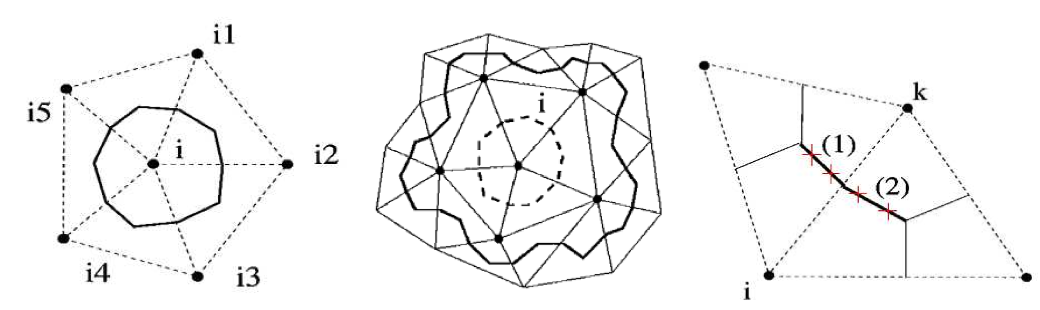
Schéma de référence : Dans la suite de [1], la technique central-ENO (CENO [5]) s'inspire de [2][3], avec une reconstruction quadratique d'ordre 2 centrée-sommet : connaissant $\bar{u}_i$ sur chaque cellule C_i de centre de gravité G_i, on cherche trouver les $c_{i,\alpha}$, $|\alpha| \leq k$ tels que

$$\overline{P_{i,i}} = \overline{u_i} \qquad \sum_{j \in N(i)} (\overline{P_{i,j}} - \overline{u_j})^2 = Min$$

avec

$$P_i(x) = \bar{u}_i + \sum_{|\alpha| \leq k} c_{i,\alpha}[(X - G_i)^\alpha - \overline{(X - G_i)^\alpha}]$$

et où $\overline{P_{i,j}}$ représente la moyenne de $P_i(x)$ sur la cellule C_j.



Construction d'une cellule C_i, de la molécule S_i centrée au nœud i et intégration numérique des flux.

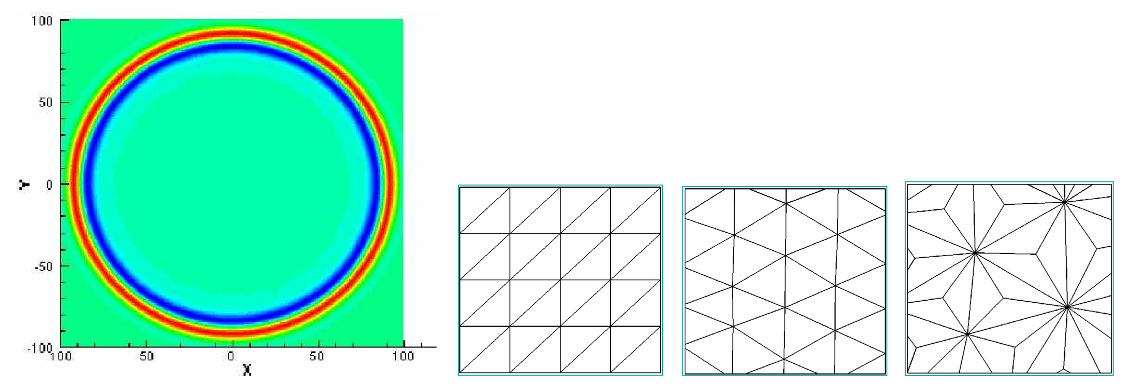
L' intégrale sur les interfaces des cellules $C_{ij} = C_i \cap C_j$ est divisée en intégrales sur les deux segments C_{ij}. Sur chaque segment $C_{ij}^{(1)}$ et $C_{ij}^{(2)}$ une intégration numérique avec deux points de Gauss utilise des *solveurs de Riemann* :

$$\Phi(u_L, u_R, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}(u_L) + \mathbf{f}(u_R)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\gamma}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{u_L + u_R}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (u_R - u_L) \Big|,$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est un paramètre pour controler la viscosité numérique. Dans ces conditions, le schéma de reconstruction quadratique a besoin à chaque pas de temps, pour chaque évaluation du flux entre deux cellules, de 4 solutions de Riemann. Si on compare au schéma MUSCL super-convergent de [4], le nouveau schéma est 3 fois plus coûteux en CPU.

2. Un banc d'essai décevant

Un cas-test : une onde acoustique circulaire [4]
- 12 Δx par longueur d'onde, trois types de maillages.
- **en rouge :** schéma MUSCL super-convergent [4], 3-fois moins cher.
- **en bleu :** schéma CENO présent.



Mesh1	Mesh1	Mesh2	Mesh2	Mesh3	Mesh3
L^1	L^2	L^1	L^2	L^1	L^2
.5189D-4	3.4010D-4	3.7384D-4	2.6318D-3	6.7626D-4	1.4598D-3
1.3045D-3	2.8561D-3	1.2786D-3	2.6318D-3	3.1097D-3	5.9216D-3

3. Analyse 1D

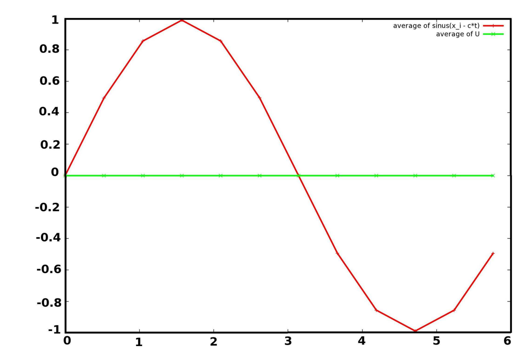
Analyse de troncature spatiale :

$$\bar{u}_i = u_i + u_i^{(2)} \frac{\Delta x^2}{24} + u_i^{(4)} \frac{\Delta x^4}{1920} + O(\Delta x^6).$$

$$\int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx - \frac{1}{\Delta x} \left[\Phi(u^+_{i+1/2}, u^-_{i+1/2}) - \Phi(u^+_{i-1/2}, u^-_{i-1/2}) \right] = -\frac{\delta |c|}{12} (\Delta x)^3 u^{(4)} + \frac{|c|}{30} (\Delta x)^4 u^{(5)} + O(\Delta x^6).$$

- La diffusion est le plus grand terme d'erreur de troncature, avec une large influence pour des maillages grossiers.
- L'équilibre entre la dispersion et la diffusion contribue à l'effet "Essentiellement Non-Oscillatoire" qui maîtrise les oscillations possibles provoqués par des singularités.
- Un schéma de type Runge-Kutta explicite du 5ième ordre est appliqué pour l'avancement en temps.

Analyse de convergence :
Valeurs moyenne sur les cellules : approximée (vert) et exacte (rouge). Solutions pour un déplacement de 100 longueurs d'onde (CFL=0.9) et 12 nœuds par longueur d'onde. Le schéma CENO diffuse complètement le signal.



Analyse en différences-finies de la reconstruction P_k exacte : Supposons que l'on passe à une reconstruction polynômiale de degré 3. Alors on ajoute un terme en $\Delta x^3 u^{(3)}$ dans les interpolations, qui deviendra, au travers du solveur de Riemann et de la divergence finale : un terme en $\Delta x^4 u^{(5)}$, puis un terme en $\Delta x^3 u^{(4)}$. Le premier terme dans l'erreur contribue à une dispersion d'ordre $\Delta x^4 u^{(5)}$. Le second terme permettra de *compenser* la diffusion du schéma quadratique.
En revanche, mettre $\delta = 0$ (pas de terme diffusif) dans le schéma quadratique est suffisant pour se débarrasser du terme $\Delta x^3 u^{(4)}$. Le premier terme dans l'erreur devient alors une dispersion d'ordre $\Delta x^4 u^{(5)}$. Mais le schéma manque de dissipation.

4. Boost du schéma quadratique

Quoi faire ?
- Ajouter une diffusion en $(\Delta x)^5 u^{(6)}$ en utilisant une quadrature simplifiée.
- Améliorer l'équilibre entre la dispersion et la diffusion en réduisant la dispersion.

Comment faire ?
- La reconstruction quadratique est maintenue, avec seulement une contribution dans la partie *centrée* du solveur de Riemann.
- Une dérivée 4ième approximative est obtenue de la dérivée seconde $u_h'' = 2a_i$ construite par la reconstruction quadratique par différences finies :

$$u_h^{(4)} = \frac{2}{\Delta x}(a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1})$$

et introduite (avec le facteur $(\Delta x/2)^4/4!$) dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.
- Une dérivée du 3ième ordre approximée est obtenue similairement

$$u_h^{(3)} = \frac{1}{\Delta x}(a_{i+1} - a_{i-1})$$

et introduite dans la partie *centrée* du solveur de Riemann.

Modèle de reconstruction :

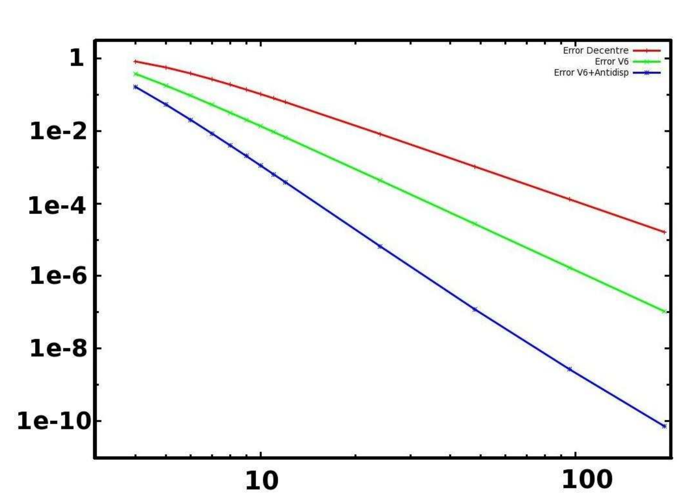
$$u_{rec}(x + x_i) = \hat{u}_h + u_h' x + \frac{1}{2} u_h'' x^2 + \frac{1}{3!} u_h^{(3)} x^3 + \frac{1}{4!} u_h^{(4)} x^4$$

$\hat{u}_h + u_h' x + \frac{1}{2} u_h'' x^2$ est injectée dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,

$\frac{1}{3!} u_h^{(3)} x^3$ est injectée dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,

$\frac{1}{4!} u_h^{(4)} x^4$ est injectée dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.

Quelques expériences 1D numérique :



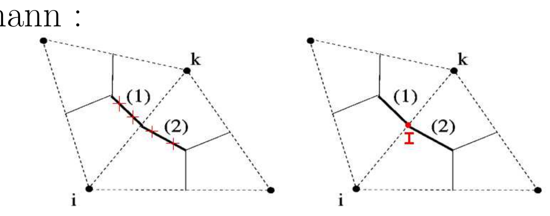
Advection d'une fonction sinus sur maillages cartésiens. Erreur schéma CENO, Erreur schéma V6, Erreur nouveau schéma.

5. Extension au 2D

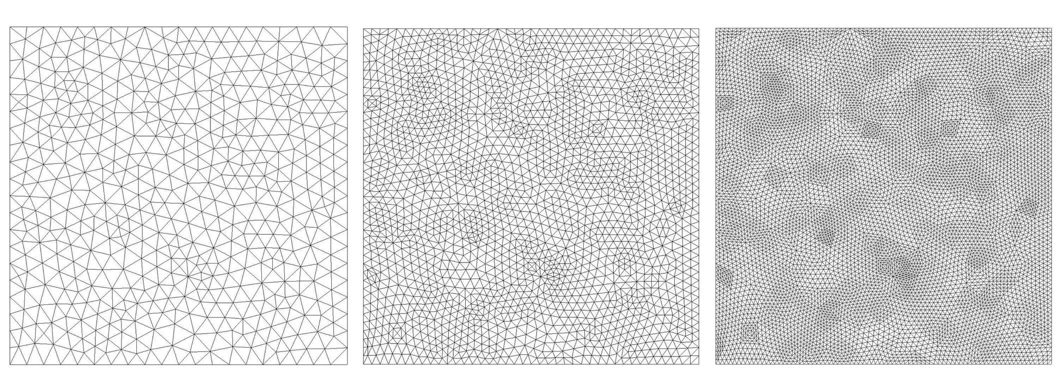
Modèle de reconstruction 2D :

$$u_{rec}(\mathbf{x}_i + \delta \mathbf{x}) = \hat{u}_h + u_h' \cdot \delta \mathbf{x} + \tfrac{1}{2} u_h'' \cdot \delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} + \tfrac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_h}{\partial s^3} (\delta s)^3 + \tfrac{1}{4!} \frac{\partial^4 u_h}{\partial s^4} (\delta s)^4$$

$\hat{u}_h + u_h' \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} u_h'' \cdot \delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x}$ est calculé sur chaque *4 points d'intégrations de Gauss* G_1, G_2, G_3, G_4 sur l'interface ∂C_{ij}, $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{G_k} - \mathbf{x}_i$, i=1,4, et inséré dans la partie *centré* du solveur de Riemann. $\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_h}{\partial s^3} (\delta s)^3$ est calculé sur le *point milieu I* $(\delta s = ||ij||/2)$ et injecté dans la partie *centré* du solveur de Riemann, $\frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u_h}{\partial s^4} (\delta s)^4$ est calculé sur le *point milieu I* et inséré dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann :

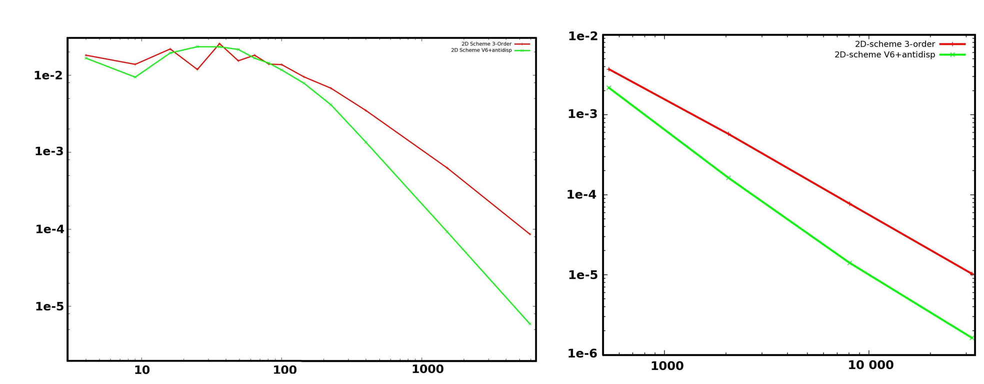


Quelques expériences numériques préliminaires sur maillage non-structurés :

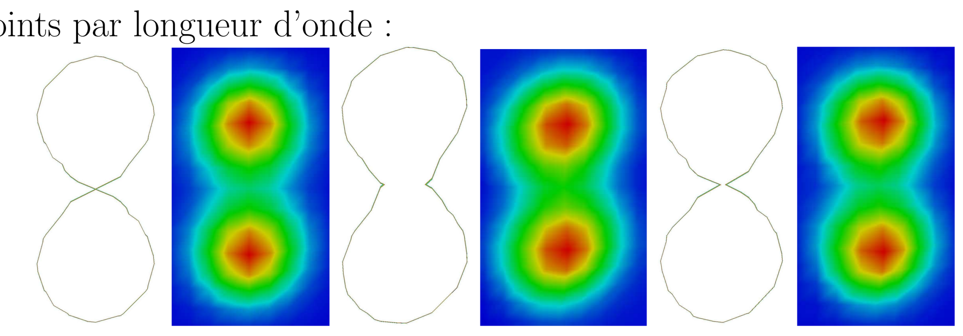


Maillages non-structurés 535, 2057 et 8065 nœuds.

Expérience numériques (1) : Convection d'une Gaussienne en maillages structurés (gauche) et non-structurés (droite) : schéma CENO, nouveau schéma.



Expérience numériques (2) : Convection de la somme de deux Gaussienne, évolution d'une isovaleur, en maillage structuré 21x21, 5 points par longueur d'onde :



Condition initiale, schéma CENO2 et nouveau schéma.

6. Conclusion

Notre schéma d'advection est 10% plus cher que le schéma CENO2. Nous mesurons une amélioration de la convergence : 2.91 et 2.92 pour le schéma CENO2 contre 3.12 et 4.1 pour le nouveau schéma. Le progrès est important sur maillages non-structurés : avec 2000 nœuds, l'erreur est 3,5-fois plus petite, pour 30,000 nœuds, 6,5-fois plus petite. Dans la suite de l'étude, nous testerons le nouveau schéma d'advection en combinaison avec maillages adaptatifs anisotropiques.

References

[1] A. Dervieux, B. Koobus, I. Abalakin, T. Kozubskaya, H. Ouvrard Advection vertex-centered reconstruction scheme on unstructured meshesRapport INRIA, 2009.

[2] F.C. Lafon abd R. Abgrall. Eno schemes on unstructured meshes. Rapport INRIA, 2009.

[3] S. Engquist, B. Harten, A. Osher and S.R. Chakravarthy. Some results on uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes.Appl. Numer. Math.,344-377,1986.

[4] A. Dervieux, N. Gourvitch, T. Kozubaskaya, G. Roge. A tetrahedral-based superconvergent scheme for aeroacoustics.AIAA PaperTechnical Repport RR-5212 INRIA,2004.

[5] C. P. T. Groth and M. R. J. Charest High-Order Central ENO Finite-Volume Scheme for Multi-Block Unstructured Mesh. University of Toronto.