Analyse et amélioration d'un schéma à reconstruction quadratique sur maillage non-structuré.

Alexandre CARABIAS, INRIA Sophia Antipolis

Le travail présenté est motivé par le développement d'approximations pour des écoulements incompressibles multiphasique, compressibles instationnaires et pour la propagation acoustique. Dans ces écoulements l'advection joue un rôle important. Dans [?], les auteurs appliquent un schéma "S-MUSCL" centré-sommet qui est précis au second ordre sur n'importe quelle région du maillage et précis du cinquième ordre -*superconvergent*- sur les sous-régions cartésiennes. Toutefois, pour des calculs en maillages localement non-structurés et fortement adaptatifs, nous souhaitons un meilleur ordre de précision en non-structuré. Comme nous nous intéressons à des phénomènes à dominance advective, nous pouvons nous inspirer des travaux des dernières décennies sur les schémas d'ordre élevé incorporant des mécanismes de décentrage. Il s'agit des schémas de reconstruction comme ENO [?], voir aussi [?], et des schémas de type distributif commme par exemple dans [?] ou encore des schémas Galerkin discontinu [?].
Un second schéma s'appuyant sur une méthode de reconstruction quadratique (QRM) a été introduit et appliqué à l'acoustique non-linéaire dans [?]. Le schéma est aussi centré-sommet. Une reconstruction quadratique par cellule duale est calculée grâce aux valeurs moyennes sur les cellules voisines, par un algorithme inspiré de la méthode ENO. Un décentrage type Godunov est appliqué pour l'intégration numérique sur les interfaces des cellules. Dans [?], le schéma QRM a été comparé au schéma S-MUSCL pour des cas-tests de propagation acoustique. Ces schémas ont été lancé avec un échantillon de maillages plus ou moins irréguliers et non-structurés. Il est apparu que même sur maillage non-structuré relativement irrégulier, l'ordre de convergence numérique du S-MUSCL était supérieur. La viscosite interne du schéma QRM figure parmi les explications possibles de son comportement relativement décevant. Le premier terme de dissipation est une dérivée quatrième avec un poids proportionnel au cube de la taille de la maille locale. Le schéma S-MUSCL est en revanche stabilisé par des dérivées sixièmes avec un poids proportionnel à la puissance cinq de la taille de maille locale. Le remplaçement dans le schéma QRM du solveur de Riemann par la demi-somme des flux droit et gauche, produit un schéma du quatrième ordre, qui malheureusement, n'est pas suffisamment stable.
Dans la communication proposée, nous construisons un schéma S-QRM superconvergent. Il est obtenu en introduisant dans le schéma QRM deux nouveaux termes dans l'interpolation aux interfaces des cellules. Le premier terme réduit de façon importante l'erreur de dispersion d'ordre quatre. Le second terme équipe le nouveau schéma d'un terme de dissipation d'ordre cinq bien dimensionné. Ces termes augmentent le coût de calcul de moins de 20%. La précision sur des maillages non-structurés est mesurée comme étant du quatrième ordre. Des mesures de convergence numérique avec divers maillages non-structurés pour l'advection d'un signal lisse et d'une interface paramétrée par level-set illustrera notre analyse.

Références

[1] I.V. Abalakin, T.K. Kozubskaya, A. Dervieux., *High Accuracy Finite Volume Method for Solving Nonlinear Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes*, *Chinese Journal of Aeronautics*, 19:2 (2006).

[2] H. Ouvrard, T. Kozubskaya, I. Abalakin, B. Koobus, and A. Dervieux, *Advective vertex-centered reconstruction scheme on unstructured meshes*, INRIA Research Report, RR-7033 (2009).

[3] T.J. Barth, P.O. Frederickson, *Higher order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction*, AIAA paper no.90-0013, 28th Aerospace Sciences Meeting, January 1990.

[4] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L.D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, *SIAM J. Numer. Anal.* 39(5):1749-1779, 2002.

[5] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R.Chakravarthy, *Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III*, *J. Comput. Phys.*, 71, 231-303 (1987).

[6] R. Abgrall, *Essentially non-oscillatory Residual Distribution schemes for hyperbolic problems*, *Journal of Computational Physics*, 214:2,773-808, 2006.

Alexandre CARABIAS, INRIA, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France
alexandre.carabias@inria.fr