CONTRÔLE DE LA DISPERSION ET DE LA DISSIPATION POUR UN SCHÉMA ADVECTIF À RECONSTRUCTION QUADRATIQUE.

Alexandre Carabias, alexandre.carabias@inria.fr

INRIA Sophia Antipolis, FRANCE

1. Introduction

Motivation : On s'intéresse à des applications en maillages non-structurés pour l'acoustique, la turbulence et les interfaces liquide-gaz. On cherche à définir un schéma précis d'ordre elevé, peu coûteux et peu dissipatif.

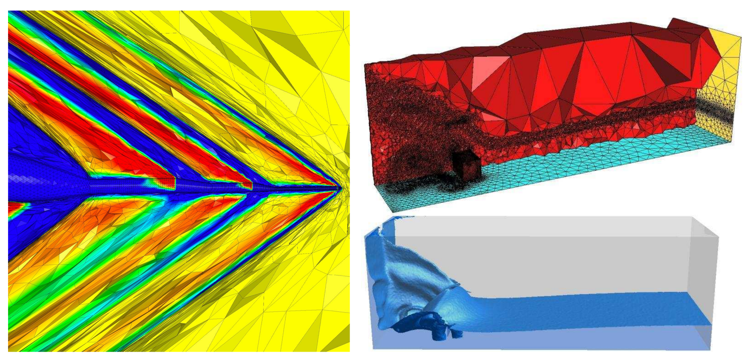


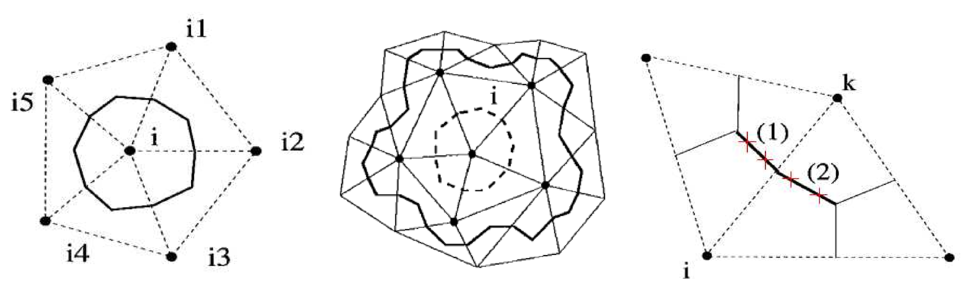
Schéma de référence : Dans la suite de [1], la technique central-ENO (CENO [5]) s'inspire de [2][3], avec une reconstruction quadratique d'ordre 2 centrée-sommet : connaissant $\bar{u}_i$ sur chaque cellule C_i de centre de gravité G_i, on cherche à trouver les $c_{i,\alpha}$, $|\alpha| \in [1,2]$ tels que

$$\overline{P_{i,i}} = \overline{u_i} \qquad \sum_{j \in voisin(i)} (\overline{P_{i,j}} - \overline{u_j})^2 = Min$$

avec

$$P_i(x) = \bar{u}_i + \sum_{|\alpha| \in [1,2]} c_{i,\alpha}[(X - G_i)^\alpha - \overline{(X - G_i)^\alpha}]$$

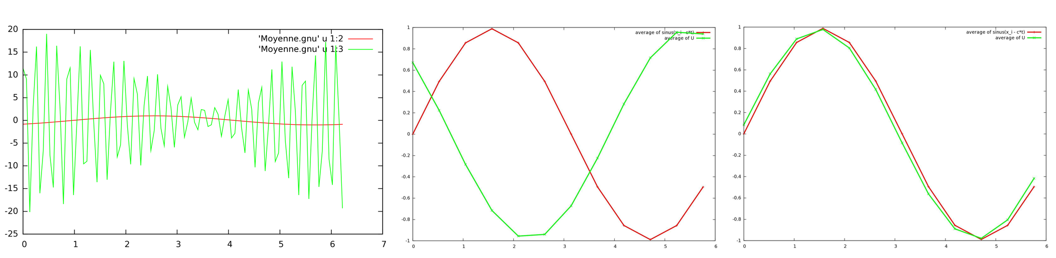
et où $\overline{P_{i,j}}$ représente la moyenne de $P_i(x)$ sur la cellule voisine C_j.



Sur chaque segment $C_{ij}^{(1)}$ et $C_{ij}^{(2)}$ une intégration numérique avec deux points de Gauss utilise des *solveurs de Riemann* :

$$\Phi\big(u_L, u_R, \mathbf{v}\big) = \frac{\mathbf{f}(u_L) + \mathbf{f}(u_R)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\gamma}{2}\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}\left(\frac{u_L + u_R}{2}\right) \cdot \mathbf{v}\right| (u_R - u_L)\Big|,$$

où $\gamma \in [0,1]$ est un paramètre pour controler la viscosité numérique.

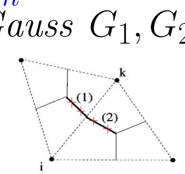
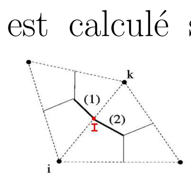


De gauche à droite, schéma centré, schéma centré + diffusion, schéma centré + diffusion + antidispersion.

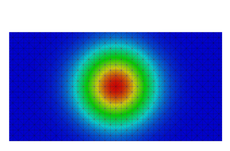
4. Extension au 2D

Modèle de reconstruction 2D :

$$u_r(\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}) = \hat{u}_h + u'_h \cdot \delta\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}u''_h \cdot \delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} - \kappa \frac{16}{5}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u_h}{\partial s^3}(\delta s)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u_h}{\partial s^4}(\delta s)^4$$

- $\hat{u}_h + u'_h \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}u''_h \cdot \delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x}$ est calculé sur chaque *4 points d'intégration de Gauss* G_1, G_2, G_3, G_4 sur l'interface ∂C_{ij}: $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{G_k} - \mathbf{x}_i$ i=1,4  et inséré dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,
- $-\kappa \frac{16}{5}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u_h}{\partial s^3}(\delta s)^3$ est calculé sur *le milieu I de l'interface* avec $\kappa_{opt} \approx 1.90$  ($\delta s = ||ij||/2$) et inséré dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,
- $\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u_h}{\partial s^4}(\delta s)^4$ est calculé sur *le milieu I de l'interface* et inséré dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.

Expérience numérique (1) :

Advection d'une gaussienne sur un maillage structuré : 

2. Analyse 1D

Volumes finis décentrés :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{C_i} u(x,t)dx \qquad C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}].$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_i + \frac{1}{\Delta x}\left[\Phi(u^+_{i+1/2}, u^-_{i+1/2}) - \Phi(u^+_{i-1/2}, u^-_{i-1/2})\right] = 0$$

$$\Phi_{upwind}(u^+_{i+1/2}, u^-_{i+1/2}) = c\frac{u^+_{i+1/2} + u^-_{i+1/2}}{2} - \gamma|c|\frac{u^+_{i+1/2} - u^-_{i+1/2}}{2}$$

Par exemple, avec une reconstruction quadratique et un maillage **uniforme**:

$$u_i^{recons}(x) = c_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2$$

$$a_i = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x^2}$$

$$b_i = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$c_i = \frac{-\bar{u}_{i+1} + 2\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{24} + \bar{u}_i$$

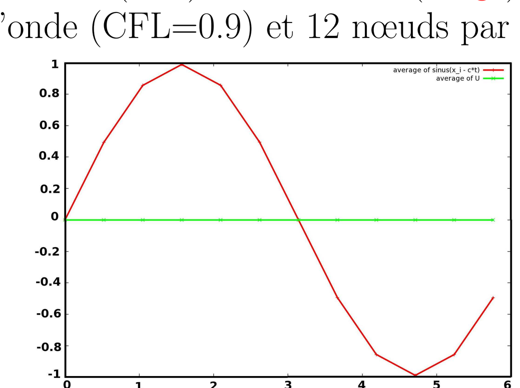
Analyse de troncature spatiale :

$$\bar{u}_i = u_i + u_i^{(2)}\frac{\Delta x^2}{24} + u_i^{(4)}\frac{\Delta x^4}{1920} + O(\Delta x^6).$$

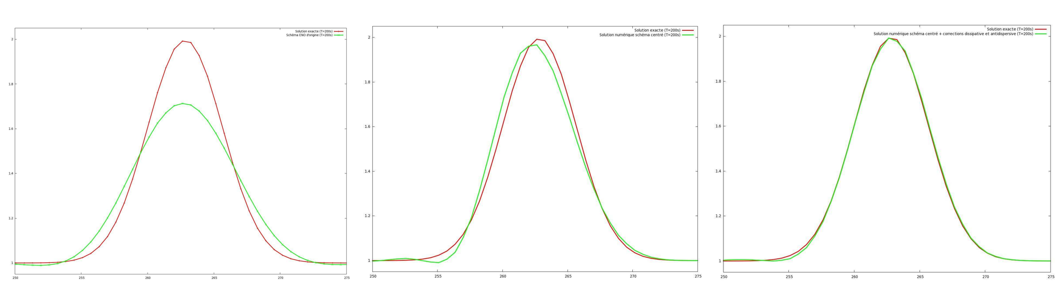
$$\int_{C_i}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx - \frac{1}{\Delta x}\left[\Phi(u^+_{i+1/2}, u^-_{i+1/2}) - \Phi(u^+_{i-1/2}, u^-_{i-1/2})\right] = -\frac{\gamma|c|}{12}(\Delta x)^3 u^{(4)} + \frac{|c|}{30}(\Delta x)^4 u^{(5)} + O(\Delta x^6).$$

Cas-test 1D : propagation d'un sinus (1)

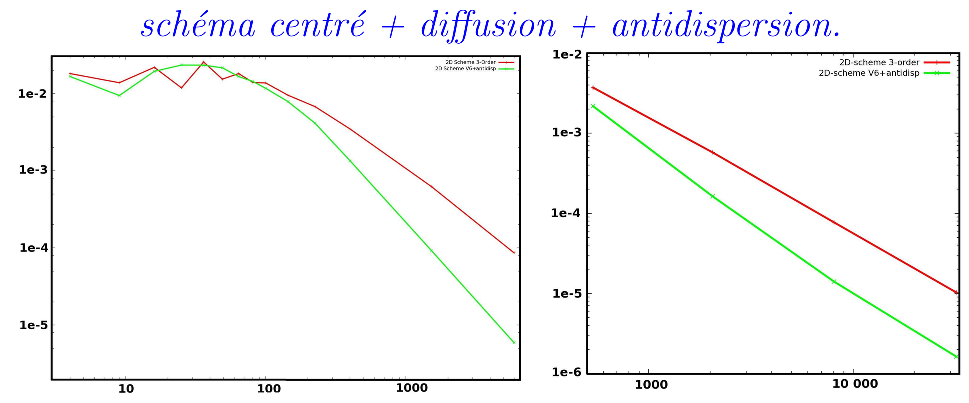
Solution approximée (vert) et exacte (rouge), déplacement de 100 longueurs d'onde (CFL=0.9) et 12 nœuds par longueur d'onde.



Solutions numériques advectées (T=200s, CFL=0.1), valeurs d'une coupe faites pour $y = \frac{Ymin+Ymax}{2}$.



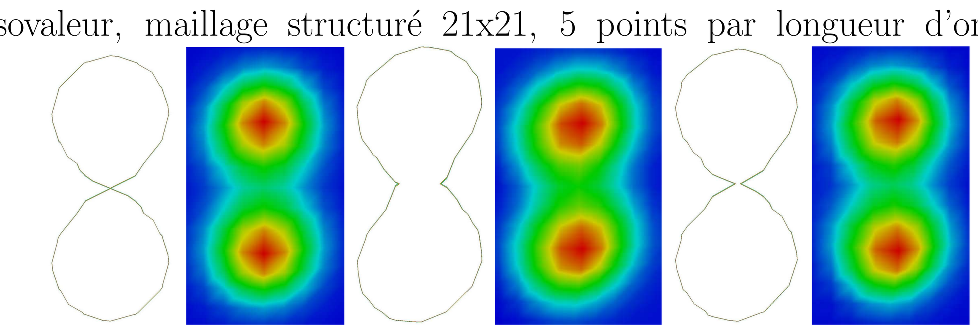
De gauche à droite, schéma d'origine, schéma centré, schéma centré + diffusion + antidispersion.



Ordre de convergence en maillages structurés (gauche) et non-structurés (droite) : schéma d'origine, nouveau schéma.

Expérience numérique (2) :

Convection de la somme de deux gaussiennes, évolution d'une isovaleur, maillage structuré 21x21, 5 points par longueur d'onde.



Condition initiale, schéma d'origine, puis nouveau schéma.

3. Boost du schéma quadratique

Quoi faire ? Passer à une reconstruction polynômiale de degré 3 :
- Poser $\gamma = 0 \Leftrightarrow$ suppression des termes de diffusion.
- Ajouter un terme en $\Delta x^3 u^{(3)} \Rightarrow$ solveur de Riemann + divergence $\Rightarrow$ terme en $\Delta x^4 u^{(5)} \Rightarrow$ compensation de la dispersion en $\Delta x^4 u^{(5)}$.
- Ajouter un terme en $\Delta x^4 u^{(4)} \Rightarrow$ solveur de Riemann + divergence $\Rightarrow$ terme en $\Delta x^5 u^{(6)} \Rightarrow$ ajout d'une diffusion V6.

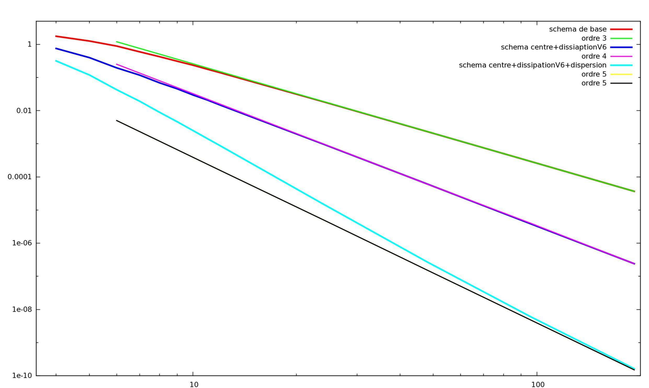
Comment faire ?
- Reconstruction quadratique $\Rightarrow$ dans la partie *centrée* du solveur de Riemann.
- Calcul des dérivées 4ème par différences finies : $u_h^{(4)} = \frac{2}{\Delta x}(a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}) \Rightarrow$ dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.
- Calcul des dérivées 3ème par différences finies : $u_h^{(3)} = \frac{1}{\Delta x}(a_{i+1} - a_{i-1}) \Rightarrow$ dans la partie *centrée* du solveur de Riemann.

Modèle de reconstruction :

$$u_r(x + x_i) = \hat{u}_h + u'_h x + \frac{1}{2}u''_h x^2 + -\frac{16}{5}\frac{1}{3!}u_h^{(3)}x^3 + \frac{1}{4!}u_h^{(4)}x^4$$

- $\hat{u}_h + u'_h x + \frac{1}{2}u''_h x^2$ est injectée dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,
- $-\frac{16}{5}\frac{1}{3!}u_h^{(3)}x^3$ est injectée dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,
- $\frac{1}{4!}u_h^{(4)}x^4$ est injectée dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.

Cas test 1D : propagation d'un sinus (2)



Ordre de convergence, advection d'un sinus sur maillages cartésiens.

Extension aux équations d'Euler :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla.F(W) = 0,$$

où $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^t$ est le vecteur des variables conservatives et F est l'opérateur de convection $F(W) = \big(F_1(W), F_2(W), F_3(W)\big)$.

$$F_1(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},\ F_2(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix},\ F_3(W) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}$$

Un cas-test acoustique : propagation d'une onde

Nous considérons une source sonore située au centre-bas d'un domaine rectangulaire.

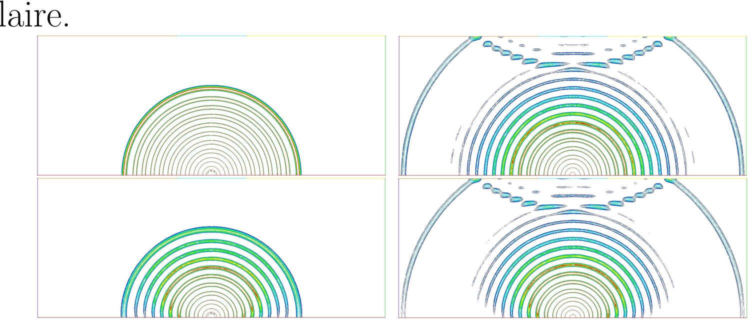


Schéma MUSCLV4 (haut), schéma CENO d'origine (bas), 500 itérations en temps (gauche) et 1000 itérations (droite), CFL=0.1.

5. Conclusion et perspectives

Avec 4 résolutions (en 2D) de problème de Riemann par flux pour le schéma de base, le nouveau schéma utilise des flux centrés sur les points de Gauss et un seul problème de Riemann. Il a été intégré à une plateforme d'adaptation de maillage anisotrope et est en cours d'expérimentation (en Euler 2D). Le passage au 3D est prévu.

References

[1] A. Dervieux, B. Koobus, I. Abalakin, T. Kozubskaya, H. Ouvrard. Advection vertex-centered reconstruction scheme on unstructured meshes. Rapport INRIA, N RR-7033 (2009).

[2] F.C. Lafon abd R. Abgrall. Eno schemes on unstructured meshes. Rapport INRIA (2009).

[3] S. Engquist, B. Harten, A. Osher and S.R. Chakravarthy. Some results on uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes. Appl. Numer. Math., 344-377 (1986).

[4] A. Dervieux, N. Gourvitch, T. Kozubaskaya, G. Roge. A tetrahedral-based superconvergent scheme for aeroacoustics. AIAA Paper Technical. Report RR-5212 INRIA (2004).

[5] C. P. T. Groth and M. R. J. Charest. High-Order Central ENO Finite-Volume Scheme for Multi-Block Unstructured Mesh. University of Toronto Institude for Aerospace Studies. HONOM 2011, April 11-15, Trento, Italy (2011).