

# Contrôle de la dispersion et de la dissipation pour un schéma advectif à reconstruction quadratique

Alexandre CARABIAS

INRIA Sophia-Antipolis  
Project SCIPORT  
Alexandre.Carabias@inria.fr

Réunion ECINADS du 3 avril 2012

# Motivations (1)

## Contexte de la présente étude

A terme, la plateforme massivement parallèle issue de ECINADS calculera efficacement des états direct et adjoint précis à l'ordre 2 et à l'ordre 3. L'état adjoint sera appliqué à l'adaptation de maillage orienté objectif.

Cet exposé contribue au passage à l'ordre 3 par une reconstruction ENO.

Le problème principal du premier schéma ENO réalisé (Ouvrard, Kozubskaya, Abalakin, Koobus et Dervieux) est d'être trop dissipatif sur maillages grossiers et inférieur au schéma MUSCL implémenté dans le code AIRONUM de l'équipe.

Le but de la présente étude est de combiner les avantages des méthodes CENO et MUSCL afin d'obtenir un schéma d'ordre plus élevé, donc plus précis, et moins dissipatif.

# Plan de la présentation

1. Présentation du schéma de base 2D quadratique.
2. Analyses et amélioration dans un contexte 1D.
3. Expériences numériques 1D.
4. Extension au 2D.
5. Expériences numériques 2D.

# 1. Schéma de base (1)

## Reconstruction quadratique centrée-sommet ENO 2-exact

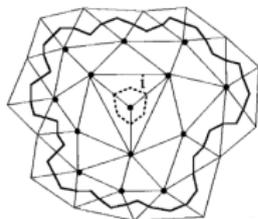
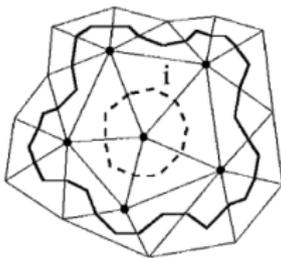
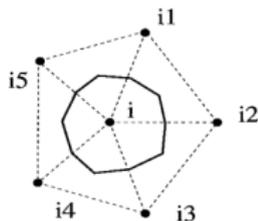
Se donnant  $\bar{u}_i$  sur chaque cellule  $i$  de centre de gravité  $G_i$ , nous devons calculer les coefficients  $c_{i,\alpha}$ ,  $|\alpha| \leq k$  tel que

$$\overline{P_{i,i}} = \bar{u}_i \quad \sum_{j \in N(i)} (\overline{P_{i,j}} - \bar{u}_j)^2 = \text{Min}$$

avec

$$P_i(x) = \bar{u}_i + \sum_{|\alpha| \leq k} c_{i,\alpha} [(X - G_i)^\alpha - \overline{(X - G_i)^\alpha}]$$

et où  $\overline{P_{i,j}}$  est la valeur moyenne de  $P_i(x)$  sur la cellule  $j$ .



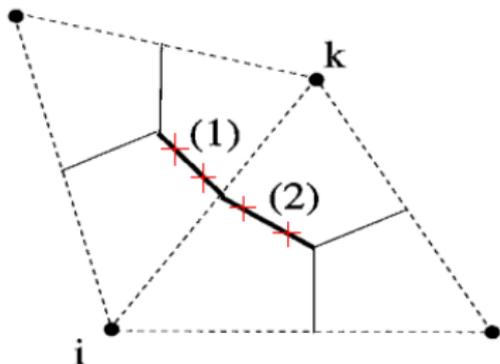
# 1. Schéma de base (2)

## Intégration du flux 2-exacte

L'intégrale sur l'interface de la cellule  $C_{ij} = C_i \cap C_j$  est séparée en intégrales sur deux segments de  $C_{ij}$ .

$$\int_{\partial C_{ij}} \mathbf{f}(u(x,y,t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{l=1,2} \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(u(x,y,t)) \cdot \mathbf{n} ds.$$

Sur chaque segment  $C_{ij}^{(1)}$  et  $C_{ij}^{(2)}$  une intégration numérique avec deux points de gauss (deux solveurs de Riemann) est appliquée.



# 1. Schéma de base (3)

## Coût de calcul, maillage fixe

Le coût de calcul est minimisé en calculant et en stockant la topologie de la reconstruction, les coefficients et l'inverse de la matrice.

Ces données stockées ont besoin d'être changées lorsque le maillage change.

Dans ces conditions, le schéma à reconstruction quadratique a besoin à chaque pas de temps pour chaque évaluations du flux entre deux cellules :

*4 solutions de Riemann,*

alors que le schéma MUSCL n'a besoin que d'une seule. Nous avons vérifié que le ratio CPU est supérieur à 4.

## Coût de calcul, maillage non-fixe

Dans le cas d'un maillage changeant au cours du temps, le ratio entre les schémas MUSCL et quadratique est supérieure à 6.

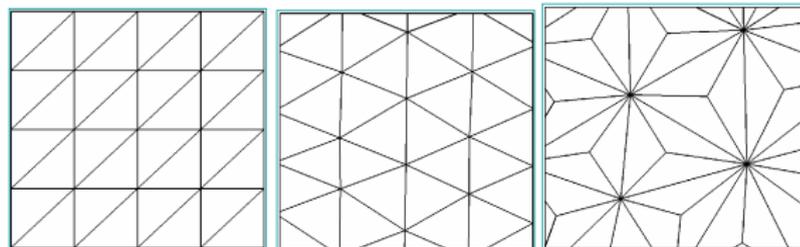
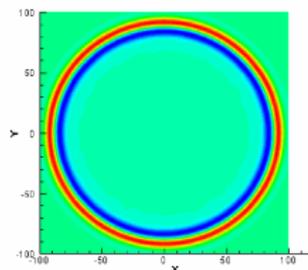
Ce sont des mesures 2D et elles devraient être plus amplifiées pour du 3D.

# 1. Schéma de base (4)

Un cas-test: Test de C.Tam's pour l'acoustique linéaire

[Ouvrard-Kozubskaya-Abalakin-Koobus-Dervieux, INRIA Rep. 2009]

- 12  $\Delta x$  par longueur d'onde, 3 types de maillage.
- **noir**: schéma MUSCL,
- **bleu**: schéma CENO2 présenté.



Maillage1	Maillage1	Maillage2	Maillage2	Maillage3	Maillage3
$L^1$	$L^2$	$L^1$	$L^2$	$L^1$	$L^2$
1.3045D-3	2.8561D-3	1.2786D-3	2.6318D-3	3.1097D-3	5.9216D-3
1.5189D-4	3.4010D-4	3.7384D-4	2.6318D-3	6.7626D-4	1.4598D-3

## 2. Analyse et amélioration en contexte 1D

### Volumes finis décentrés

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t) dx \quad C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}].$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i + \frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi(u_{i+1/2}^+, u_{i+1/2}^-) - \Phi(u_{i-1/2}^+, u_{i-1/2}^-) \right] = 0$$

$$\Phi_{upwind}(u_{i+1/2}^+, u_{i+1/2}^-) = c \frac{u_{i+1/2}^+ + u_{i+1/2}^-}{2} - \delta |c| \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^-}{2} \quad (*)$$

### Reconstruction polynomiale

Sur chaque cellule  $C_i$  et à chaque pas de temps :  $u_i^{recons}(x) = P_i^{\bar{u}}(x - x_i)$ .

$P_k$  exactitude : si pour n'importe quel  $u$  polynôme de degré  $k$ , on a

$$u_i^{recons} = u \quad \forall i,$$

alors (\*) préserve exactement la ( $P_k$  exactitude).

Par exemple, avec une reconstruction quadratique et un maillage **uniforme**:

$$u_i^{recons}(x) = c_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2$$

$$a_i = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x^2}$$

$$b_i = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$c_i = \frac{-\bar{u}_{i+1} + 2\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{24} + \bar{u}_i$$

## Analyse de troncature spatiale

$$\bar{u}_i = u_i + u_i^{(2)} \frac{\Delta x^2}{24} + u_i^{(4)} \frac{\Delta x^4}{1920} + O(\Delta x^6).$$

$$\int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi(u_{i+1/2}^+, u_{i+1/2}^-) - \Phi(u_{i-1/2}^+, u_{i-1/2}^-) \right] =$$
$$- \frac{\delta |c|}{12} (\Delta x)^3 u^{(4)} + \frac{|c|}{30} (\Delta x)^4 u^{(5)} + O(\Delta x^6).$$

- La diffusion est le terme principal de l'erreur de troncature, avec une large influence pour les maillages grossiers.
- L'équilibre entre la dispersion et la diffusion contribue à l'effet "Essentially Non Oscillating" qui maîtrise les éventuelles oscillations provoquées par les singularités.
- Cette équilibre rend la diffusion inutilement grande pour des solutions lisses.

Passant à une reconstruction polynômiale de degré 4:

- on souhaite ajouter un terme  $\Delta x^3 u^{(3)}$  ainsi qu'un terme en  $\Delta x^4 u^{(4)}$  dans les interpolations, qui deviendraient, à travers le solveur de Riemann et de la divergence finale,

(1) un terme  $\Delta x^4 u^{(5)}$  et

(2) un terme  $\Delta x^5 u^{(6)}$ .

Le premier terme compenserait l'erreur de dispersion en  $\Delta x^4 u^{(5)}$ .

Le deuxième terme *ajouterait* une diffusion dans le schéma quadratique .

Poser  $\delta = 0$  (aucun terme de diffusion) dans le schéma quadratique est suffisant pour se débarrasser du terme en  $\Delta x^3 u^{(4)}$  et atteindre un 4<sup>eme</sup> ordre de précision (avec un probable manque de dissipation). Le premier terme dans l'erreur devient un terme de dispersion en  $\Delta x^4 u^{(5)}$ .

# “Boostons” notre schéma quadratique

## Quoi faire ?

- En réduisant le modèle de diffusion d'un terme en  $(\Delta x)^3 u^{(4)}$  à un terme en  $(\Delta x)^5 u^{(6)}$ .
- En améliorant l'équilibre entre la dispersion et la diffusion en réduisant la dispersion.

## Comment ?

- La reconstruction quadratique est gardée, avec seulement une contribution dans la partie *centrée* du solveur de Riemann.

# “Boostons” notre schéma quadratique

## Comment ?

- Une dérivée approximative du quatrième ordre est obtenue de la dérivée seconde  $u_h'' = 2a_i$  construite par le schéma quadratique, par différences finies

$$u_h^{(4)} = \frac{2}{\Delta x} (a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1})$$

et introduite (avec le facteur  $(\Delta x/2)^4/4!$ ) dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.

- Une dérivée du troisième ordre est obtenue similairement

$$u_h^{(3)} = \frac{1}{\Delta x} (a_{i+1} - a_{i-1})$$

et introduite dans la partie *centrée* du solveur de Riemann.

## Introduction des dérivées 5<sup>eme</sup> de dispersion et 6<sup>eme</sup> de diffusion

Modèle de reconstruction:

$$u_{reconstr}(x + x_i) = \hat{u}_h + u'_h x + \frac{1}{2} u''_h x^2 + -\frac{16}{5} \frac{1}{3!} u_h^{(3)} x^3 + \frac{1}{4!} u_h^{(4)} x^4$$

♡  $\hat{u}_h + u'_h x + \frac{1}{2} u''_h x^2$  est inséré dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,

♡  $-\frac{16}{5} \frac{1}{3!} u_h^{(3)} x^3$  est inséré dans la partie *centrée* du solveur de Riemann,

♡  $\frac{1}{4!} u_h^{(4)} x^4$  est inséré dans la partie *diffusive* du solveur de Riemann.

Un schéma en temps explicite Runge-Kutta linéarisé d'ordre 5 est appliqué pour l'avancement en temps.

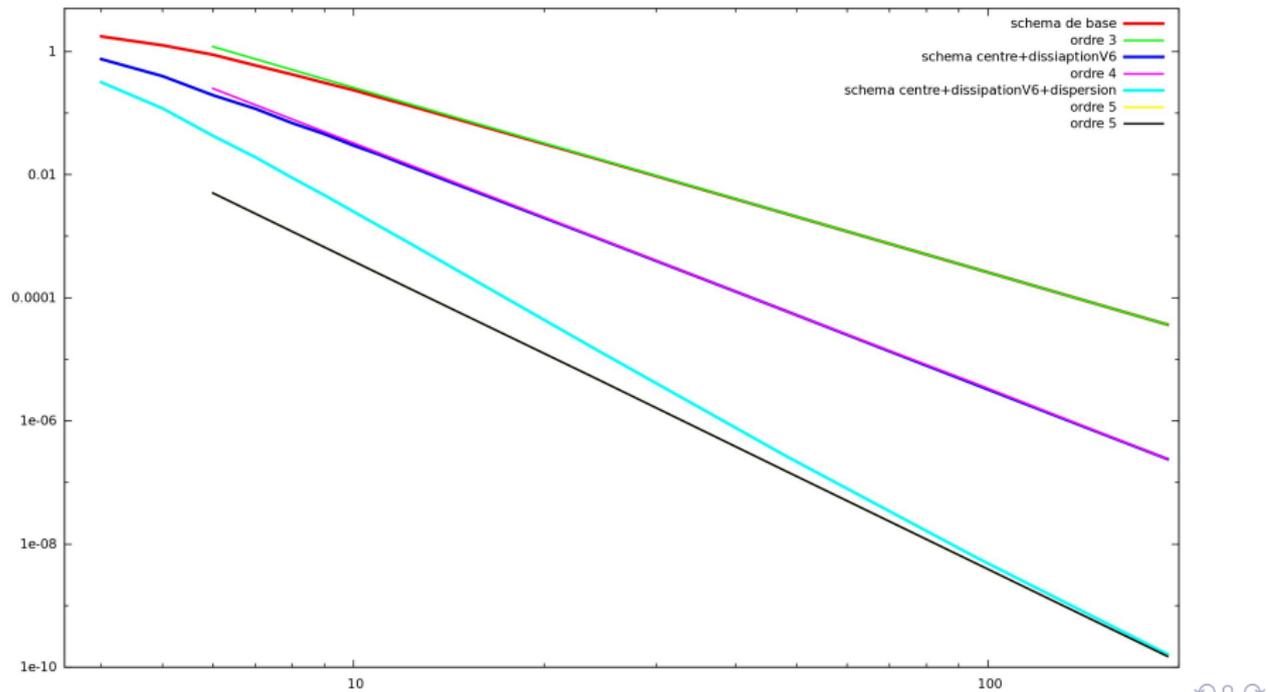
## Propriété du prototype 1D

Le schéma ci-dessus est du 5<sup>eme</sup> ordre de précision sur maillages uniformes.

# 3. Quelques expériences numériques 1D (1)

Advection d'un sinus

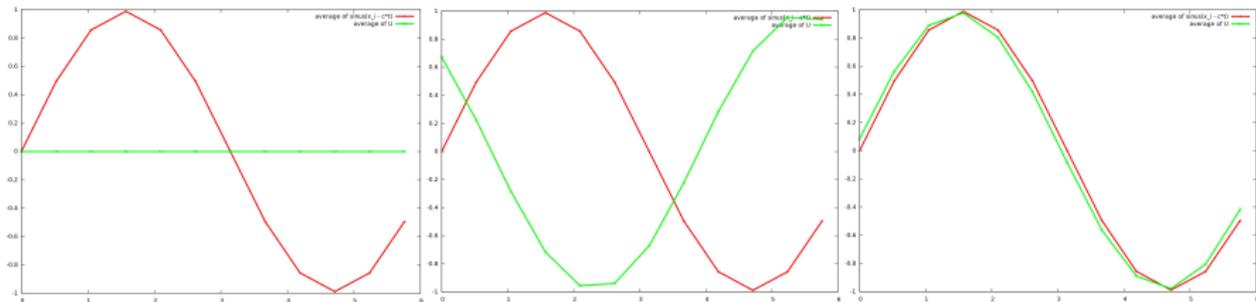
Maillages cartésiens commençant à 4 nœuds par longueur d'onde.



### 3. Quelques expériences numériques 1D (2)

#### Analyse de convergence numérique

Valeurs moyennes dans le centre des cellules: solutions approximées (**en vert**) et exacte (**en rouge**) pour un voyage de 100 longueurs d'onde (CFL=.9) et 12 nœuds par longueur d'onde.



– Schéma de base

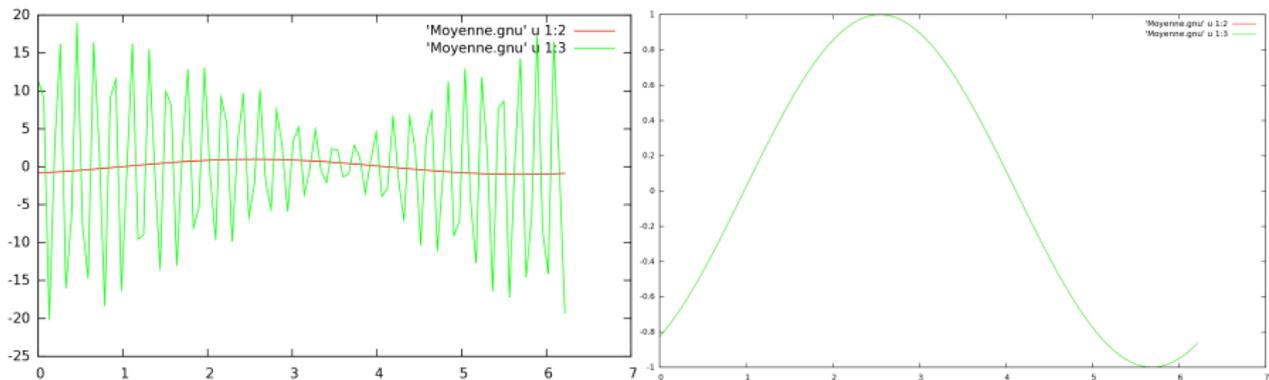
– Centré+V6-diffusion

– Centré+V6+antidispersion

### 3. Quelques expériences numériques 1D (3)

#### Analyse de convergence numérique

Valeurs moyennes dans le centre des cellules: solutions approximées (**en vert**) et exacte (**en rouge**) pour un voyage de **1000 longueurs d'onde** (CFL=.9) et 12 nœuds par longueur d'onde.



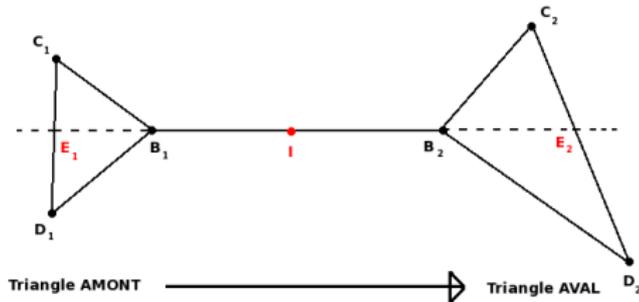
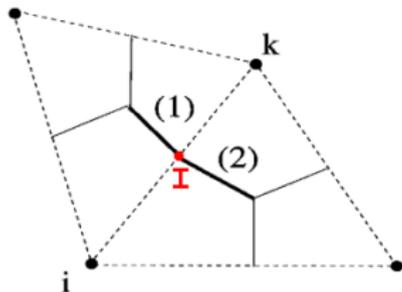
— Centré

— Centré+V6-diffusion

## 4. Extension au 2D (1)

### Principe général

- Notre préoccupation est d'éviter une forte augmentation du coût de calcul par rapport au coût de base du schéma à reconstruction quadratique.
- Nous débutons avec le schéma de base quadratique.
- Les deux corrections précédentes sont appliquées sur un mode "basé segment".
- Elles sont calculées dans la direction 1D de l'edge  $ik$  à partir des interpolations des Hessiens approximatifs donnés par la reconstruction quadratique.

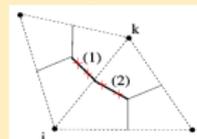


## 4. Extension au 2D (2)

Modèle de reconstruction:

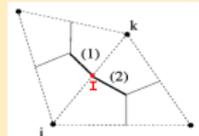
$$u_{reconstr}(\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}) = \hat{u}_h + u'_h \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}u''_h \cdot \delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} + -\kappa \frac{16}{5} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_h}{\partial s^3} (\delta s)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u_h}{\partial s^4} (\delta s)^4$$

♥  $\hat{u}_h + u'_h \cdot \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}u''_h \cdot \delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x}$  est calculé sur chaque 4 points d'intégration de Gauss



$G_1, G_2, G_3, G_4$  sur l'interface  $\partial C_{ij}$ :  $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{G_k} - \mathbf{x}_i \quad i=1,4$   
et inséré dans la partie centré du solveur de Riemann,

♥  $-\kappa \frac{16}{5} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_h}{\partial s^3} (\delta s)^3$  est calculé sur le milieu  $I$  de l'interface avec  $\kappa_{opt} = 2.75$



( $\delta s = ||ij||/2$ ) et inséré dans la partie centré du solveur de Riemann,

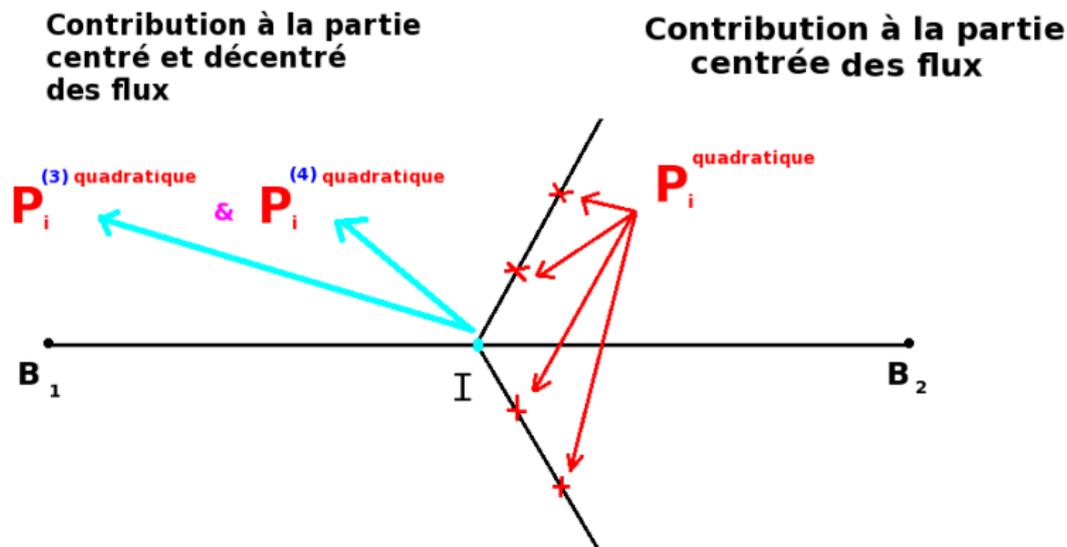
♥  $\frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u_h}{\partial s^4} (\delta s)^4$  et calculé sur sur le milieu  $I$  de l'interface et inséré dans la partie diffusive du solveur de Riemann.

⇒ Moins que 40 flops supplémentaires par segment.

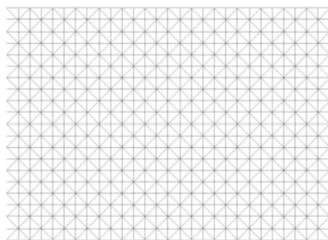
## 4. Extension au 2D (3)

### Modèle de reconstruction

Contribution des flux sur les points de Gauss et au centre des demi-segments composants une interface

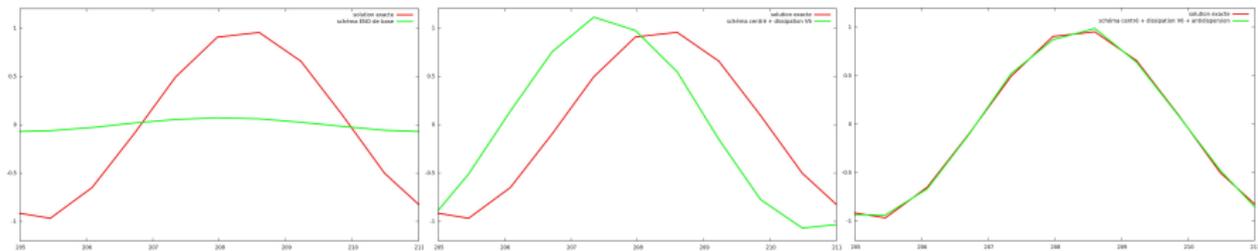


## 4. Quelques expériences numériques 2D (1)



### Analyse de convergence numérique

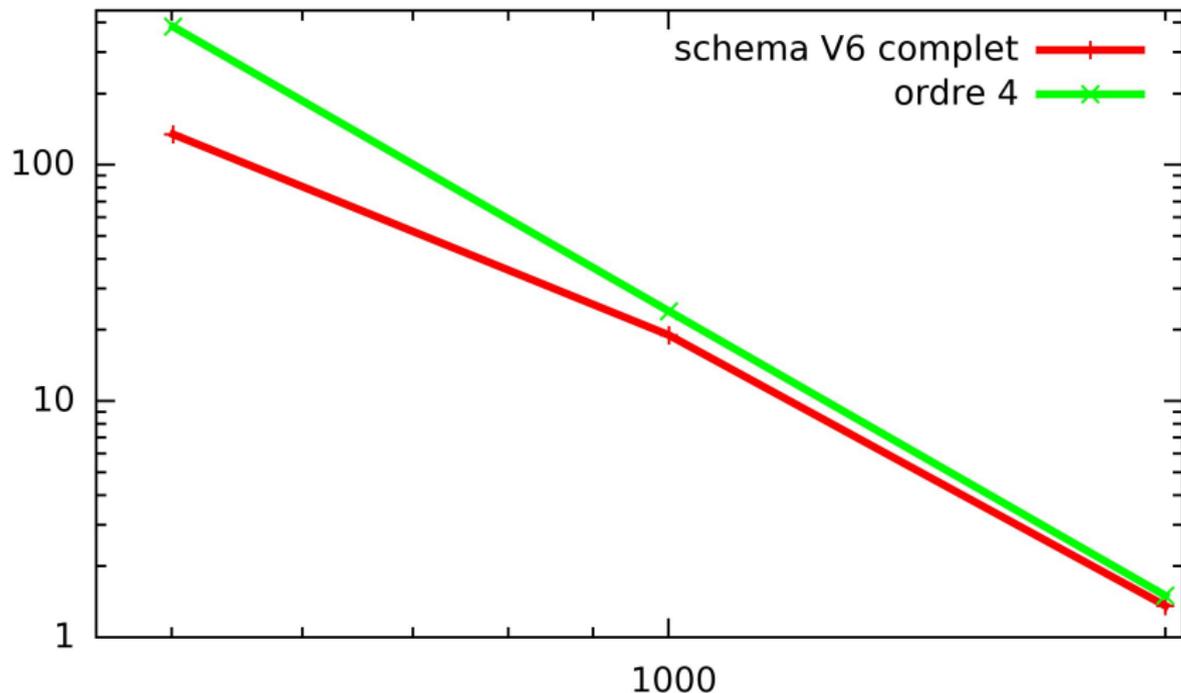
Valeurs moyennes dans le centre des cellules: solutions approximées (en vert) et exacte (en rouge) pour un voyage de 400 longueurs d'onde (CFL=.9) et 6 nœuds par longueur d'onde.



## 4. Quelques expériences numériques 2D (2)

### Analyse de convergence numérique

Convection de la concentration d'un sinus, maillages structurés de 501x21, 1001x21 et 2001x21 nœuds.



## 5. Remarques finales

### Synthèse (1)

Nous avons un schéma CENO d'ordre 3 trop dissipatif et qui possède une dispersion pas très bonne.

Avec la suppression de la viscosité, le schéma CENO-centré ainsi obtenu est non-dissipatif et donc marginalement stable. Il est inutilisable en pratique : sur des temps longs de calcul il ne dissipe pas assez les erreurs d'arrondi et devient instable, encore plus sur des maillages non réguliers.

Le nouveau schéma quadratique à viscosité du sixième ordre, QV6, créé avec les corrections dissipative V6 et dispersive, est quant-à-lui stable et faiblement dissipatif. Les erreurs de dispersions sont réduites, il est d'ordre 4 sur maillages réguliers.

## 5. Remarques finales

### Synthèse (2)

Les mesures de précisions montrent pour le schéma de base un ordre numérique de 2.91 à 2.92, et de 3.12 à 4.1 pour le nouveau schéma.

Mais l'amélioration est importante dans les constantes, par exemple, pour des maillages non structurés de 2,000 nœuds, l'erreur est de 3,5 fois plus petite, pour 30.000 nœuds, elle est 6,5 fois plus petite.

Le schéma a été étendu aux équations d'Euler bidimensionnelles et intégré à une plateforme d'adaptation de maillage anisotrope. Alors que le schéma de base demande quatre résolutions (nettement plus en 3D) de problème de Riemann par flux, le nouveau schéma utilise des flux centrés sur les points de Gauss et un seul problème de Riemann par flux dans la partie MUSCL.

### Travaux actuels et futurs

Le nouveau schéma est en cours d'expérimentation (en Euler 2D) en combinaison avec l'adaptation de maillage anisotrope basé Hessien. Le passage au 3D (AERONUM) est prévu dans quelques mois.

