Préchargement dans un monde dynamique
une évaluation de performances

Alain Jean-Marie
Inria – Université de Montpellier

AEP12, Grenoble, 5 juillet 2022

Contenu

Le terrain du jeu du préchargement

Un monde de « documents »: un graphe orienté pondéré

- les sommets représentent les documents
- les arcs représentent les liens connectant ces documents
- les poids représentent des probabilités de transition

Le jeu

- Deux joueurs: le Surfeur et le Contrôleur
- Le Surfeur se trouve sur un nœud du graphe (de documents)
- Tour de jeu:
  - Le Contrôleur marque au plus k nœuds (c'est-à-dire précharge k documents)
  - Le surfeur se déplace sur un nœud voisin, aléatoirement
- Un coût est imputé au Contrôleur si le Surfeur se déplace sur un nœud non marqué
- Le jeu se termine quand tout le graphe est marqué.

But du jeu

Problème d'optimization

Minimiser le coût total espéré, où:

coût = nombre de fois que le Surfeur se déplace sur un nœud non marqué.

Problème de faisabilité

Soit un graphe de documents, possiblement avec des nœuds déjà marqués, et une position du surfeur. Existe-t-il une stratégie de marquage qui réalise un coût zéro?

Si la réponse au problème de faisabilité est « oui» », la stratégie résout le problème d'optimisation.

Le problème de faisabilité

Le problème de faisabilité est difficile en général, voir:

> *F. Fomin, F. Giroire, A. Jean-Marie, D. Mazauric, N. Nisse. To satisfy impatient web surfers is hard. Theoretical Computer Science, 526(20) :1–17, March 2014.*

Néanmoins, il est facile dans les arbres.

Faisabilité dans les arbres

La fonction f est définie sur l'arbre par récurrence

- si v est une feuille

$$f(v) = 0$$

- si v est un nœud interne et $C(v)$ l'ensemble de ses descendants

$$f(v) = \max\left\{0, |C(v)| + \sum_{w \in C(v)} f(w) - k\right\}$$

Faisabilité dans les arbres, suite

Théorème (Fomin *et al.* 2014)

Il existe une politique à coût zéro si et seulement si $f(v_0) = 0$.

Propriété

Si on marque $f(v_0)$ nœuds bien choisis avant de commencer le jeu, il existe un politique à coût zéro (f-politique).

Observation

On ne sait pas si une f-politique est optimale pour le problème d'optimisation, quand elle ne réalise pas le coût zéro.

Question

Quel est le coût moyen d'un arbre auquel on applique une f-politique? Performance de la politique!

Progress

Préchargement dans les arbres de Bienaymé-Galton-Watson

Considérons le problème suivant:

Probabilité de coût zéro

Supposons que le graphe soit un arbre de Bienaymé-Galton-Watson arrêté à la profondeur d. Quelle est la probabilité qu'il existe une politique à coût nul?

De façon équivalente: quelle est la probabilité que $f(v_0) = 0$?

Distribution de la fonction f

Si on peut calculer la distribution de $f(v_0)$, on aura en particulier $P(f(v_0) = 0)$.
Soient:

- X la distribution/variable aléatoire générique du branchement
- F_d la suite de distributions/variables aléatoires définie par:

$$F_0 = 0 \quad \text{wp } 1$$

$$F_{d+1} = \max\left\{0, \sum_{i=1}^{X}(1 + F_{d,i}) - k\right\}$$

où $\{F_{d,i}\}_{i=1..\infty}$ sont iid avec distribution F_d.

Distribution de f, suite

La suite F_d est stochastiquement croissante: donc elle converge.

La limite peut-elle être une distribution finie?

Il y a-t-il une condition de stabilité, en fonction de la distribution de X et de d?

Cas d'instabilité avérée

Résultat

Si $\mathbb{E}X > k \geq 1$, alors $\mathbb{E}F_d \to \infty$ quand $d \to \infty$.

Preuve: $\mathbb{E}F_{d+1} \geq \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{X}(1 + F_{d,i})\right) - k = \mathbb{E}X\mathbb{E}F_d + \mathbb{E}X - k$.
Par récurrence, $\mathbb{E}F_d \geq (\mathbb{E}X - k)(1 + \mathbb{E}X + \ldots + \mathbb{E}X^{d-1})$.

Raffinement

Si il existe d_0 tel que

$$\mathbb{E}F_{d_0} > \frac{k - \mathbb{E}X}{\mathbb{E}X - 1}$$

alors $\mathbb{E}F_d \to \infty$ quand $d \to \infty$.

Fonctions génératrices

Soient $F_d^*(z) = \mathbb{E}(z^{F_d})$, $X^*(z) = \mathbb{E}(z^X)$ et $p_i = \mathbb{P}(X = i)$.

Récurrence sur les fonctions génératrices

On a: $F_0^*(z) = 1$ et

$$F_{d+1}^*(z) = \frac{1}{z^k} \left(S_d(z) \; + \; \sum_{\ell=0}^{k-1} (z^k - z^\ell) S_d^{(\ell)}(0) \right)$$

$$S_d(z) = X^*(zF_d^*(z)).$$

Formule de Faà di Bruno: for $n \geq 1$,

$$S^{(n)}(0) = \sum_{m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_n!} \, p_{m_1+\ldots+m_n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{F^{*(j-1)}(0)}{(j-1)!} \right)^{m_j}$$

Récurrence pour $k = 2$

Quand $k = 2$, la formule a l'air plus simple:

Récurrence pour $k = 2$

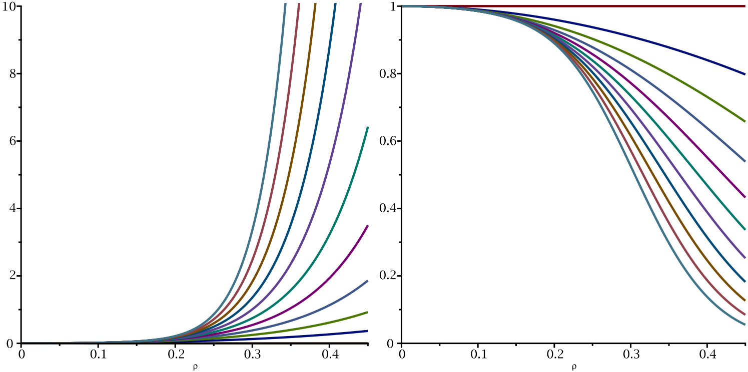
$$F^*_{d+1}(z) = \frac{1}{z^2}\left(X^*(zF^*_d(z)) + z(z-1)p_1 F^*_d(0)\right)$$

On fixe $k = 2$ dans le reste de cette étude.

Expériences avec le branchement géométrique

Supposons que $X \sim \mathrm{Geom}_1(\rho)$: $\mathbb{P}(X = k) = (1-\rho)\rho^{k-1}$.

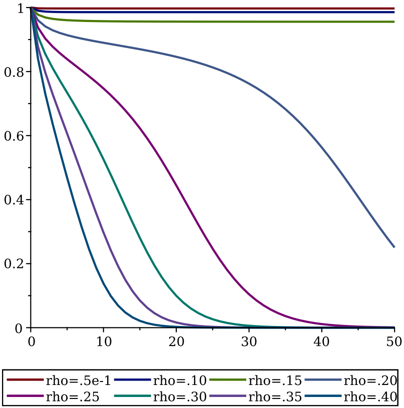
Quand d varie de 0 à 10, et en fonction de ρ:



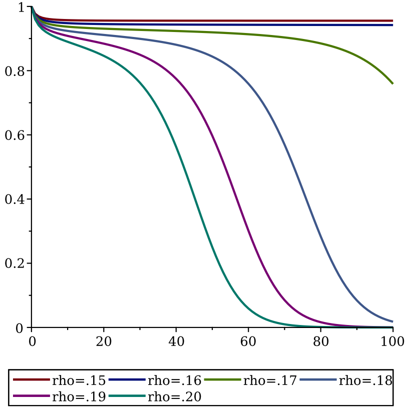
$\mathbb{E}F_d$ $\quad$ $\mathbb{P}(F_d = 0)$

Expériences avec la loi géométrique, suite

Regardons de plus près, quand d varie pour différentes valeurs de ρ:



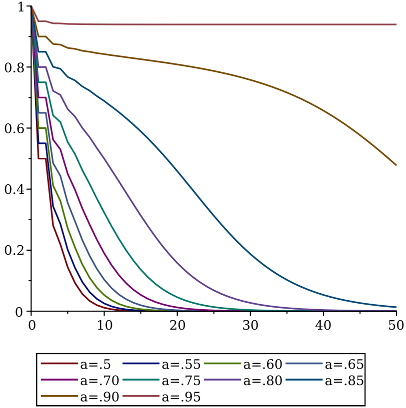
$\mathbb{P}(F_d = 0)$, ρ moyen



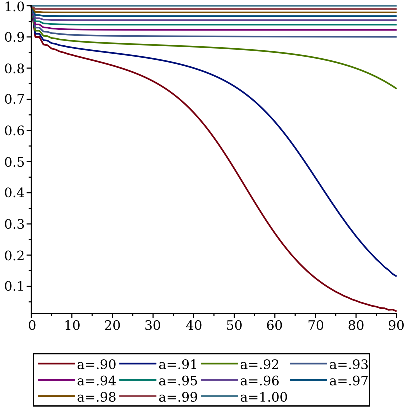
$\mathbb{P}(F_d = 0)$, ρ petit

Expériences avec une loi binaire

Supposons que $X = 1$ avec proba a, et $X = 3$ avec proba $1 - a$.



$\mathbb{P}(F_d = 0)$, medium a



$\mathbb{P}(F_d = 0)$, large a

Conclusion des expériences

Conclusion: il semble encore possible que

$$\lim_{d\to\infty} F_d(0) \;>\; 0$$

pour certaines distributions X, mais alors avec $\mathbb{E}X$ bien plus petit que k.

Distribution stationnaire, $k = 2$

Supposons que la suite F_d converge. La fonction génératrice de la limite satisfait:

$$z^2 F^*(z) = X^*(zF^*(z)) + z(z-1)p_1 f_0$$

où $f_0 = F^*(0) = \mathbb{P}(F = 0)$. Dans le cas géométrique, la solution est:

$$F^*(z) = \frac{-1 + z + \rho + (1-\rho)\,\rho\, z\,(z-1)\, f_0 + \sqrt{\delta(z)}}{2\rho z^2}$$

$$\delta(z) = \rho^2 z^2 (z-1)^2 (1-\rho)^2 f_0^2 + 2\,\rho\, z(z-1)(1-\rho)\,(\rho - z - 1)\, f_0 + (\rho + z - 1)^2$$

Mais f_0 reste inconnu...

Progress

Arbres dynamiques

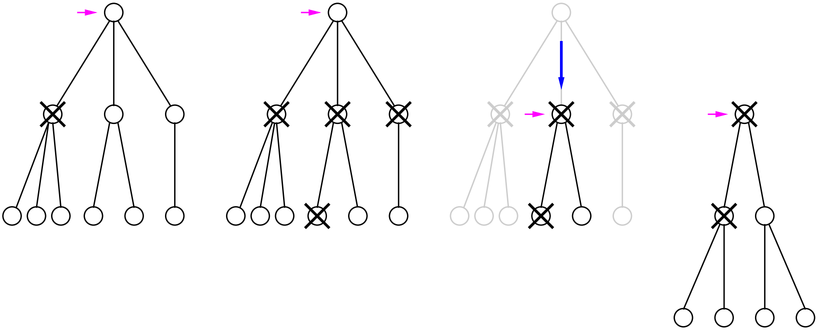
On passe à un modèle où l'arbre des documents est découvert progressivement: il devient dynamique.
Les arbres dynamiques les plus simples: arbres aléatoires de profondeur d.

L'analyse qui suit est basée en partie sur

K. Keshava, A. Jean-Marie, S. Alouf.
Optimal Prefetching in Random Trees.
Mathematics, MDPI, 2021, 9 (19), pp. 2437.

Le cycle de marquage

Les arbres suivent un cycle décision/transition:



arbre t
$d = 2$

marquage
$k = 3$

routage
proba $1/3$

branchement
proba $1/p^2$

On a choisi comme loi de branchement X la loi uniforme sur $[1..p]$.
Ainsi, le modèle a 3 paramètres: d, k et p.

La politique optimale

Objectif: trouver une politique qui minimise le coût moyen.

Moyen: résoudre le processus de décision Markovien

~~La politique optimale~~

Objectif: trouver une politique qui minimise le coût moyen.

~~Moyen: résoudre le processus de décision Markovien~~

Mais comme il s'agit d'évaluation de performances, on se limitera ici à... évaluer des politiques.

Famille de politiques

Definition

Une politique qui marque en priorité les fils non marqués est nommée « gourmande·».

Théorème

Si $k = 1$ et $d = 2$, ou si $d = 1$, n'importe quelle politique gourmande est optimale.

Conjecture raisonnable

Il existe toujours une politique gourmande optimale.

En tout cas, on se limite ici aux politiques gourmandes.

Chaînes de Markov

Étant donnée une politique de marquage (en feedback), le cycle marquage/transition définit une chaîne de Markov.

Espace d'états: les objets manipulés sont des arbres marqués

- arbres d'arité comprise entre 1 et p, de profondeur d
- ces mêmes arbres avec des marques 0/1 sur certains nœuds

L'arbre sans les marques est la *forme* de l'arbre marqué.

Deux propriétés utiles

Propriété

Le processus des formes d'arbre est indépendant de la politique. C'est une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire est celle d'un arbre de Bienaymé-Galton-Watson stoppé à la profondeur d.

En particulier, la distribution du nombre de fils $|s(t)|$ est celle de X: ici, uniforme sur $[1..p]$.

Propriété

Le coût instantanné ne dépend pas de la politique gourmande et vaut:

$$c(t) = \frac{[\ |s(t)| - k\ ]^+}{|s(t)|}.$$

Calcul des performances

Méta-algorithme de calcul de la performance d'une politique γ:

1. construire la matrice de transition P^γ
2. calculer sa probabilité stationnaire π^γ
3. calculer

$$J^\gamma = \sum_t \pi^\gamma(t) c(t) = \pi^\gamma . c$$

Un peu de structure

Les transitions se décomposent:

- marquage: matrice M^γ dépendant de la politique de marquage
- routage: matrice R indépendante de γ
- branchement: matrice B également indépendante

$$P^\gamma = \mathrm{M}^\gamma RB.$$

Pour calculer la distribution stationnaire π^γ de P^γ, il suffit de calculer la distribution stationnaire de

$$P_b^\gamma = BM^\gamma R$$

qui est également une matrice stochastique, mais plus petite.

Un peu plus de structure

Dans le cas $d = 2$, les arbres après routage ont profondeur 1! La matrice P_b^γ ne dépend que de deux paramètres, $m = |s(t)|$ et μ le nombre de fils marqués. Taille $= 3p - 1$. Forme typique:

$$P_b^\gamma = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & 0 & 0 & -- \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Calcul de la probabilité stationnaire

La matrice P_b^γ contient essentiellement des blocs de rang 1.
Conséquence:

Propriété

Dans le cas $d = 2$, $k = 2$, le vecteur de probabilités stationnaires π_b^γ peut être calculé en $O(p)$.

Coût des politiques gourmandes

Corollary

Soit t distribué selon la distribution stationnaire. Soit la variable aléatoire

$$C = \frac{[\,|s(t)| - k\,]^+}{|s(t)|}.$$

Alors

$$\mathbb{E}C \;=\; \frac{1}{p} \sum_{m=k+1}^{p} \frac{m-k}{m} \;=\; \frac{1}{p}\left(p - k - k(\mathbb{H}_p - \mathbb{H}_k)\right).$$

Conséquence

Toute politique gourmande a un coût inférieur à $\mathbb{E}C$.

Exploration des politiques gourmandes

On se concentre sur le cas $d = 2$ et $k = 2$: les ensembles d'arbres restent manipulables pour p petit.
Les politiques doivent spécifier quoi faire des marques qui restent une fois les fils tous marqués.

Exploration des politiques gourmandes (suite)

Politiques à description simple:

- **Greedy Depth 1**: ne marque que les fils
- **Greedy Leftmost**: sous-arbres de gauche à droite
- **Greedy Smallest**: sous-arbres les plus petits en premier
- **Greedy Largest**: sous-arbres les plus grands en premier
- **Greedy Finite Optimal**: définit des petits et des grands sous-arbres selon un seuil $\sigma = 2k + \mu(t) - |s(t)|$.
  Marque le plus petit des grands sous-arbres, ou le plus grand des petits.

Résultats pour les politiques gourmandes

Coût moyen de différentes politiques gourmandes:

Policy	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
Greedy Depth 1	0.111111	0.208333	0.286667
Greedy Leftmost	0.062802	0.159747	0.246549
Greedy Largest	0.056960	0.157805	0.245887
Greedy Finite Optimal (GFO)	0.056235	0.157349	0.245330
Improved GFO	0.055998	0.157067	0.245263
Further Improved GFO	–	–	0.245192

Questions

Questions?