

Modèles de trafic modulés par chaînes de Markov

Alain Jean-Marie

LIRMM, University of Montpellier

161 Rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 5, France

ajm@lirmm.fr

Séminaire Réseaux de Grenoble

17 janvier 2002

Plan de l'exposé

Introduction et définitions _____3

- Modèles de trafic, discrets ou fluides.
- MMPP, MAP, BMAP
- MMRP
- Généralisation

Propriétés et analyse _____16

- Générateurs, stationarité, moyennes
- Renouvellement
- Fonctions génératrices

Files d'attente _____ 26

- Files fluides: Le modèle de Mitra
- La file MMPP/GI/1

Applications _____ 42

- Un modèle d'allocation de capacité
- Un modèle de transmission de vidéo

Introduction

Les processus de Markov modulés sont des processus d'arrivée d'une certaine quantité:

$N(t) \in \mathbb{N}$ quantité de clients dans une file d'attente

$N(t) \in \mathbb{R}$ quantité d'information (bits, octets) arrivés à un élément de réseau

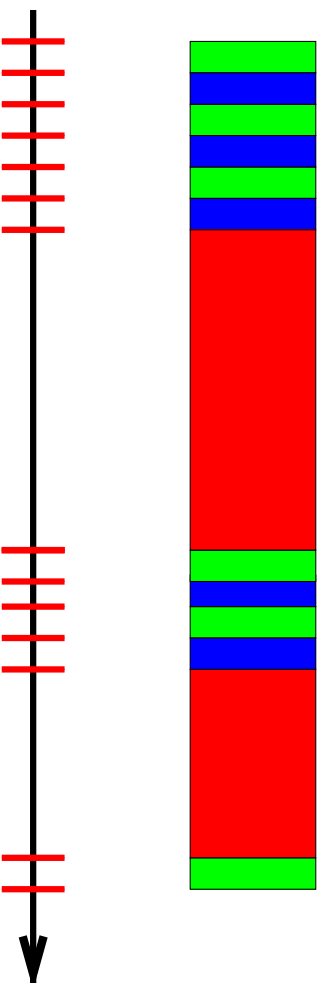
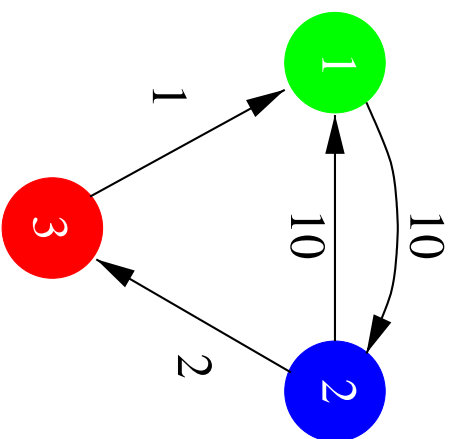
$N(t) \in \mathbb{R}$ quantité de «temps» écoulée (vidéo, temps-réel, biologie,...)

Ils constituent une famille de modèles pour lesquels on arrive à

- modéliser des processus complexes (rafales, dépendances dans le temps),
- maîtriser le nombre de sources,
- faire du calcul stochastique: distributions, files d'attente, asymptotiques...

MAP: Markov Arrival Process

Soit $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ une chaîne de Markov en temps continu dans un espace fini.
 $\{N(t); t \in \mathbb{R}\}$ compte le nombre de sauts de X dans $[0, t[$.



BMAP: Batch Markov Arrival Process

Aussi nommé « N-process » (N comme Neuts), processus « versatile » modulé par Markov.

$\{(X(t), N(t)); t \in \mathbb{R}\}$ est un chaîne de Markov en temps continu dans $\mathcal{E} \times \mathbb{N}$ dont le générateur a la structure:

$$Q = \begin{pmatrix} D_0 & & & & & \\ & D_1 & & & & \\ & & D_2 & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & D_2 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & D_1 & \\ & & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

On peut avoir

- des changements de phase $i \rightarrow j$ sans arrivée, avec taux $(D_0)_{i,j}$
- l'arrivées d'un groupe (batch) de taille k sans changement de la phase i , avec taux $(D_k)_{i,i}$
- changement de phase et arrivée d'un groupe de taille k , avec taux $(D_k)_{i,j}$.

MMP: Markov Modulated Poisson Process

Soit $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ une chaîne de Markov en temps continu sur un espace fini \mathcal{E} .

Soient $\lambda_i \geq 0$ des taux d'arrivée, pour chaque $i \in \mathcal{E}$.

On suppose que les arrivées ont lieu selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda_{X(t)}$, c'est-à-dire d'intensité λ_i dans les intervalles où $X(t) = i$.

C'est un cas particulier de processus BMAP, pour lequel

- les arrivées se font un par un: $D_k = 0, k \geq 2$;
- les changements de phase ne provoquent pas d'arrivée

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & \end{pmatrix} .$$

Cas particulier, le processus IPP (Interrupted Poisson Process): $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda$.

Et le processus de Poisson non interrompu:

$$\lambda_i = \lambda, \quad \forall i \in \mathcal{E} .$$

MMRP: Markov Modulated Rate Process

Soit $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ une chaîne de Markov en temps continu sur un espace fini \mathcal{E} .

Soient r_i (≥ 0 en général) des taux d'arrivée (accumulation, déplétion), pour chaque $i \in \mathcal{E}$.

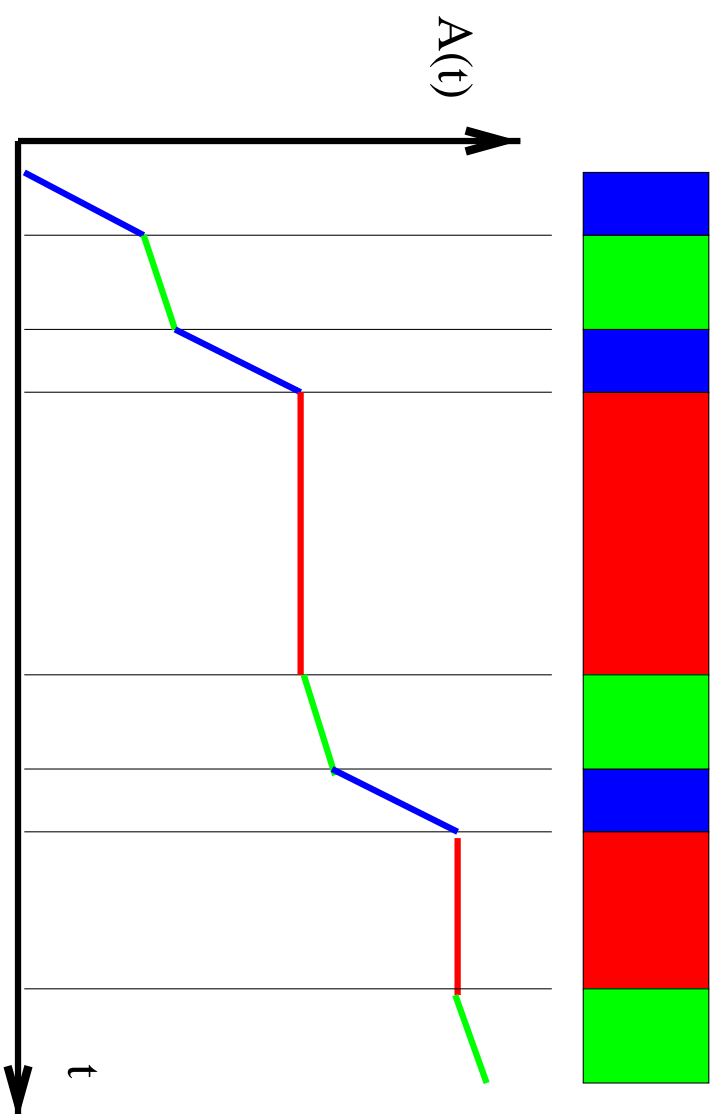
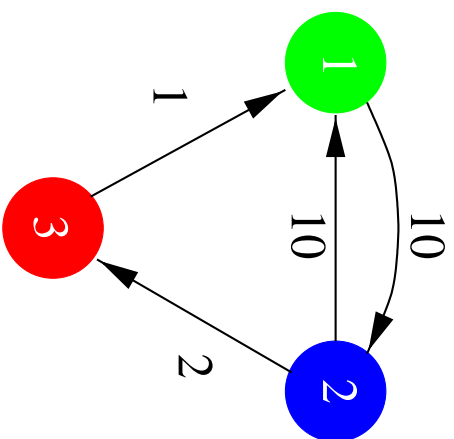
On suppose que les arrivées ont lieu selon un processus fluide de débit $r_{X(t)}$, c'est-à-dire d'intensité r_i dans les intervalles où $X(t) = i$.

Soit $N(t)$ la quantité de fluide arrivé à la date t :

$$\frac{dN}{dt}(t) = r_{X(t)}.$$

Note: anciennement nommé « Markov drift process ».

Exemple. \mathcal{E} a trois états, $r_3 = 0$, $0 < r_1 < r_2$:

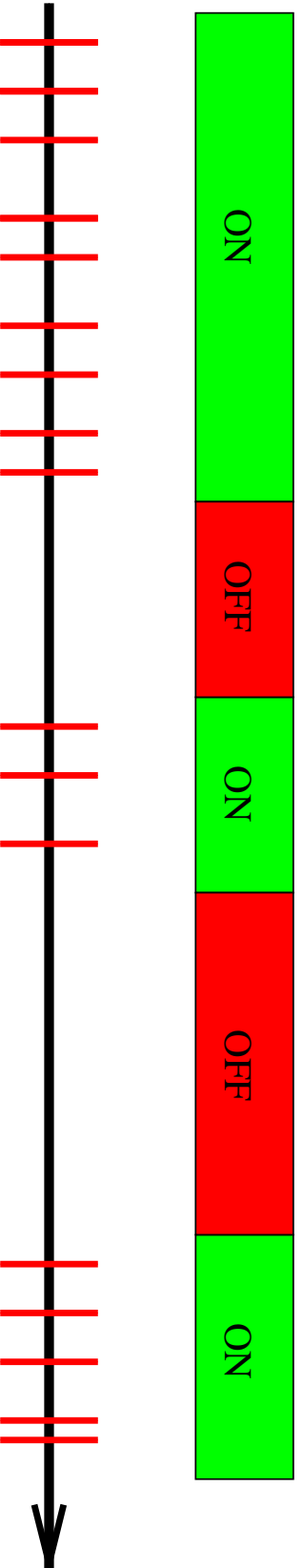


Sources On/Off

Processus On/Off:

- alternance de périodes On et Off, de durées IID (deux distributions)
- pendant les périodes On, un processus fluides (débit constant) ou discrets (Poisson ou périodique).

→ bon modèle de télécommunication voix/vidéo numériques, ainsi que sources TCP, etc.



→ processus de renouvellement alterné.

MMPP, BMAP, etc ont tous des durées exponentielles. On/Off peut avoir des durées non-exponentielles (en particulier, queues lourdes!).

Semi-Markov Accumulation Process

Un processus unifiant MMPP et MMRP. Voir aussi les sources «Markov Regenerative» [Kulkarni96].

Soit:

- $\{S_i(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d., $i \in \mathcal{E}$;
- $\{Z(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une CM en temps discret à états dans \mathcal{E} ;
- $\{x_i(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus stationnaire à incréments indépendents, for each $i \in \mathcal{E}$.

On définit d'abord un processus semi-Markovien $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, conjointement à une suite de

dates de sauts $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + S_{Z^{(n)}}(n) \\ X(t) &= Z(n+1) & T_n \leq t < T_{n+1} \\ X(t) &= Z(0) & 0 \leq t < T_0, \end{aligned}$$

$T_0 \geq 0$ v.a. donnée.

Le processus $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est construit comme:

$$\begin{aligned} N(t) &= N(T_n) + (x_{Z^{(n+1)}}(t) - x_{Z^{(n+1)}}(T_n)) & T_n \leq t < T_{n+1} \\ N(t) &= x_{Z(0)}(t) - x_{Z(0)}(T_n) & 0 \leq t < T_0. \end{aligned}$$

avec $N(0) = 0$.

Comme les processus

- fluides à débit constant $x(t) = rt$,
- de Poisson $x(t) = N_\lambda(0, t)$

sont à incréments indépendants, on a les MMPP et MMRP.

On a aussi les combinaisons des deux.

Le processus de Wiener est à incréments indépendants: utilité possible pour des sources « bruitées », ou pour un grand nombre de sources?

Propriétés et analyse

Les propriétés communes les plus utiles sont:

- Les processus sont « Markov renouvellement » (semi-Markoviens).
- Ils se décrivent par des matrices. Par exemple pour MMPP/MMRP
 - Le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov sous-jacente, \mathbf{Q} ,
 - La matrice des taux d'arrivée (rate matrix) $\mathbf{\Lambda}$.
- Leur superposition mène à un calcul matriciel simple.

Processus d'accumulation semi-Markovien

On peut calculer la transformée de Laplace de la quantité arrivée en T unités de temps:

$$K_{i,j}(\mu, \nu) = \int_0^\infty e^{-\mu T} \int_0^\infty e^{-\nu q} d\mathbb{P}_i\{N(T) \leq q, X(T) = j\} dT .$$

and the matrices:

$$\mathbf{K} = ((K_{i,j}(\mu, \nu)))_{(i,j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}}$$

$$\mathbf{L} = \text{diag} \left(\frac{1}{\mu + \phi_i(\nu)} \right)_{i \in \mathcal{E}} \quad \mathbf{S} = \text{diag} (S_i^*(\mu + \phi_i(\nu)))_{i \in \mathcal{E}} .$$

Alors,

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) + \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{K} .$$

Chaînes incluses – MMPP

Soit $\{Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov incluse aux instants d'arrivée. Sa matrice de transition est

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{A} .$$

Soit

$$F_{i,j}(x) = \mathbb{P}\{Y(n) = j, \tau_k \leq x \mid Y(n-1) = i\}$$

la proba de transition de $\{Y(n)\}$ conjointement avec les temps inter-arrivées:

$$\mathbf{F}(x) := (F_{i,j}(x))_{i,j} = \left(\mathbf{I} - e^{(\mathbf{Q} - \mathbf{A})x} \right) (\mathbf{A} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{A} .$$

Débites moyens

Pour un MMPP/MMRP, avec π la proba stationnaire de X ,

$$\bar{\lambda} = \pi \mathbf{A} \mathbf{1} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi_i \lambda_i.$$

Pour un processus On/Off avec *débit crête* r :

$$\bar{\lambda} = r \frac{\overline{ON}}{\overline{ON} + \overline{OFF}}.$$

Autocorrelations

Toujours pour un MMPP: soit $R = (\mathbf{A} - \mathbf{Q})^{-1}$.

Autocovariance aux moments de sauts:

$$\begin{aligned} h(k) &= \text{Cov}(X(n) X(n+k)) = \mathbb{E}[X(n) X(n+k)] - \mathbb{E}X(n) \mathbb{E}X(n+k) \\ &= R^2 \mathbf{A} (R\mathbf{A})^k (I - R\mathbf{A}) \mathbb{R}^2 \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Donc forcément,

$$\exists 0 < \rho < 1, \quad h(k) = O(\rho^k).$$

Mémoire

Autocorrelation totale d'un processus:

$$\begin{array}{ll} \text{temps continu} & \int_0^{\infty} |h(s)| \, ds \\ \text{temps discret} & \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \end{array} .$$

Un processus a une *mémoire courte* if

$$\int_0^{\infty} |h(s)| \, ds < \infty .$$

Sinon, il a une *mémoire longue*.

Mémoire longue \Rightarrow une **décroissance lente** de la dépendance entre $X(t+s)$ et $X(t)$.

Les processus MMP/MRP sont à mémoire courte... mais on peut la rendre plutôt longue!

Les processus On/Off avec des distributions à **queue lourde** ont une mémoire longue.

Superposition de sources

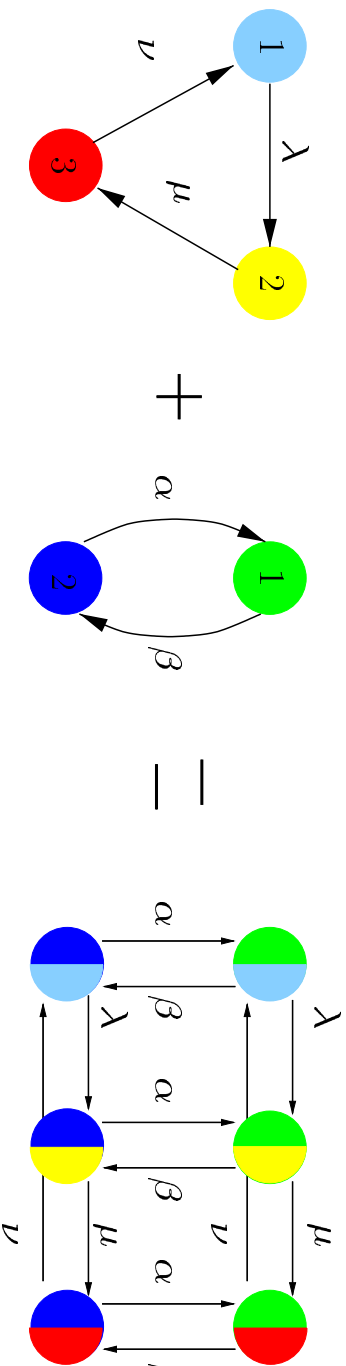
Si on superpose plusieurs sources Markov-modulées, le processus résultant est toujours Markov-modulé.

Les matrices (générateur et taux) s'obtiennent comme des *sommes de Kronecker*.

Produit de Kronecker de deux matrices A ($n \times n$) et B ($m \times m$): une matrice $nm \times nm$ avec

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}B & \dots & A_{nm}B \end{pmatrix} .$$

Exemple: pour deux chaînes de Markov $\{X_1(t)\}$ et $\{X_2(t)\}$, on a:



$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ \nu & 0 & -\nu \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \lambda & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & - & \mu & 0 & \alpha & 0 \\ \nu & 0 & - & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 & - & \lambda & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & - & \mu \\ 0 & 0 & \beta & \beta & \nu & - \end{array} \right)$$

Modèles de files d'attente

Files discrètes: arrivées Markov-modulées

- services exponentiels/Erlang → méthode des phases,
- services généraux IID: méthode de la chaîne incluse.

Files fluides:

- équations aux dérivées partielles (Chapman-Kolmogoroff),

Dans les deux cas, les résultats obtenus sont:

- Calcul par des formules matricielles, séries génératrices, transformées de Laplace.
- Décomposition spectrale des probabilités stationnaires et transitoires:

$$\mathbb{P}\{W \leq x; X = i\} = \sum_p a_{i,p} e^{-z_i x} .$$

→ asymptotiques, ou bornes

$$\mathbb{P}\{W \leq x; X = i\} \sim a_{i,1} e^{-z_i x} , \quad x \rightarrow \infty .$$

- calcul de « bande passante équivalente ».

Files d'attente: la Dynamique

Pour un processus d'arrivée discret, on a le fonctionnement habituel, avec variantes:

- distribution de durée de service dépendant de la phase à son départ,
- vitesse de service modulée par phase (services de distribution exponentielle).

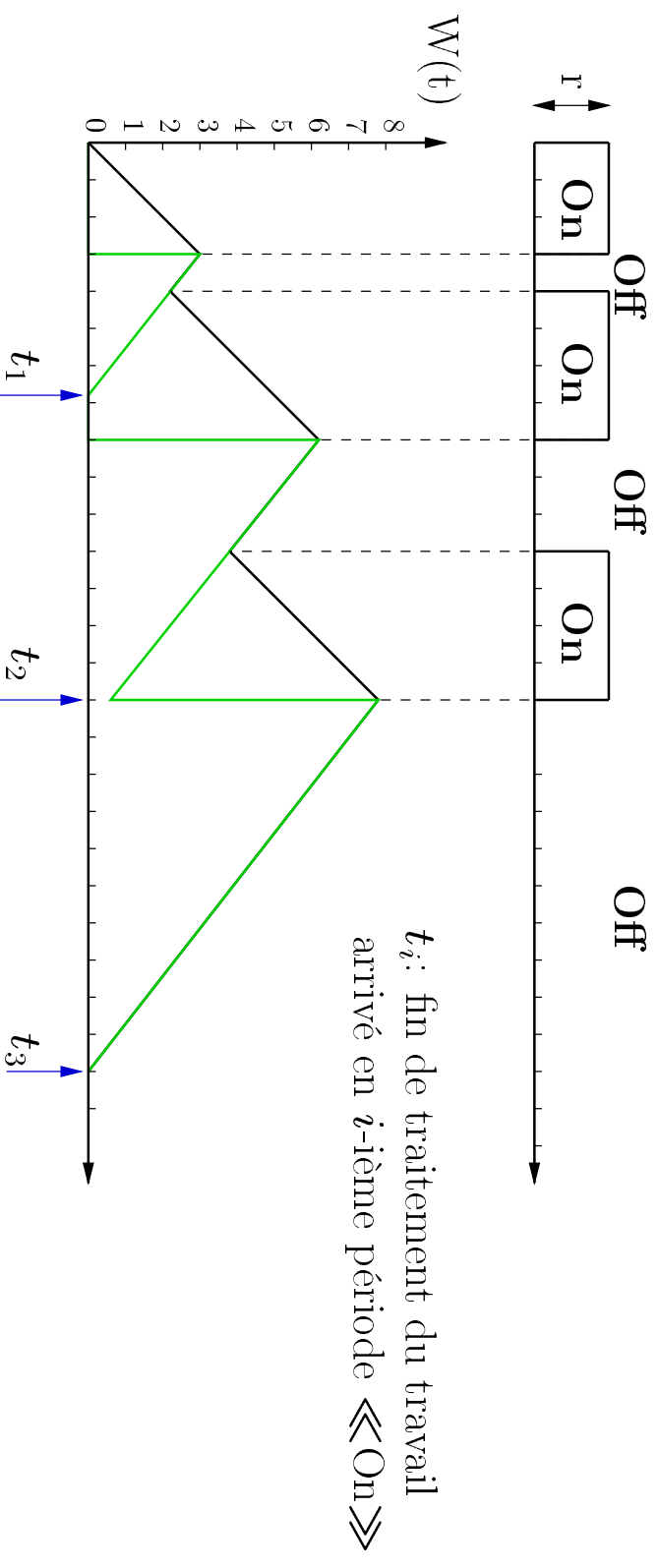
Pour une file fluide, le serveur a une *vitesse* de C unités par seconde. La dynamique de la quantité de travail $W(t)$ est:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt}(t) &= r_{X(t)} - C && \text{si } W(t) > 0 \\ &= [r_{X(t)} - C]^+ && \text{si } W(t) = 0.\end{aligned}$$

Files fluides \leftrightarrow files discrètes

On constate que les formules pour MMPP et MMRP sont similaires.

Relation entre quantités de travail fluide \leftrightarrow discret.



Ainsi, si le processus fluide est On/Off avec durées $\{A_n\}$, $\{I_n\}$,

$$\begin{aligned} W_n &= [W_{n-1} + r A_n - C (A_n + I_n)] \\ &= [W_{n-1} + (r - C) A_n - C I_n] . \end{aligned}$$

C'est la quantité de travail dans une file $GI/GI/1$ avec

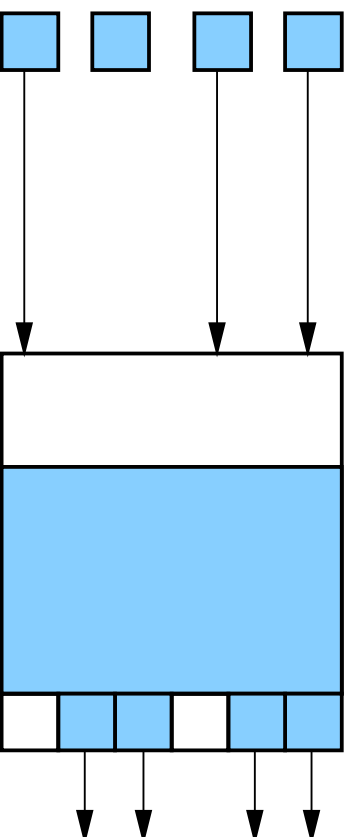
- inter-arrivées $\{CI_n\}$
- services $\{(r - C)A_n\}$.

→ analyse connue...

Le modèle de Mitra

Un modèle fluide producteur-consommateur couplés par un réservoir de capacité finie.

Kosten (1982), Anick-Mitra-Sohdhy (1982), Stern-Elwalid-Mitra (198x).



Modèle sources-réservoir-consommateurs de Mitra

Caractéristiques:

- m sources, activité on/off exponentielles débit crête r ,
- n consommateurs, activité on/off exponentielles capacité c ,
- capacité X .

Le générateur d'une source est

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Noter que $M(t)$ est la superposition de m sources on/off, mais le générateur a été *agrégé* et est de taille $m + 1$ et non 2^m . Idem pour $C(t)$.

Le processus $(M(t), C(t))$ des nombres de machines et consommateurs actifs à t , est la superposition de deux CM indépendantes. C'est une CM de générateur:

$$Q = Q_1 \oplus Q_2 = Q_1 \otimes I(n+1) + I(m+1) \otimes Q_2,$$

et chaque état (i, j) correspond à une *dérive* du réservoir $ir - jc$, d'où la matrice des taux:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 = \text{diag}(ir - jc).$$

Soit $Q(t)$ la quantité stockée dans le réservoir. Calculons:

$$p(i, j; t, x) = \mathbb{P}\{i \text{ sources, } j \text{ consommateurs, } Q(t) \leq x\}.$$

Entre t et $t + \delta t$,

$$Q(t + \delta t) = Q(t) + (ir - jc) \delta t \quad \text{avec proba } 1 + Q_{i,j} \delta t + o(\delta t)$$

etc.

Après passage à la limite et mise sous forme matricielle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(x, t) \mathbf{A} = \mathbf{P}(x, t) \mathbf{Q}.$$

En régime stationnaire,

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(x) \mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}(x) \mathbf{Q} .$$

Il est bien connu que ce genre de système différentiel linéaire admet comme solutions élémentaires les fonctions

$$\mathbf{P}(x) = \phi e^{zx} ,$$

où (z, ϕ) sont solution du *problème spectral* associé:

$$z \phi \mathbf{\Lambda} = \phi \mathbf{Q} .$$

Dans ce cas précis, les solutions sont connues sous forme explicite, et on calcule la *décomposition spectrale* de $\mathbf{P}(x)$:

$$\mathbf{P}(x) = \sum_i \alpha_i \phi_i e^{z_i x} .$$

Les vecteurs ϕ_i se décomposent: $\phi_i = \phi_{i,1} \otimes \phi_{i,2}$.

Les scalaires α_i sont obtenus grâce aux conditions aux bord:

$$\begin{aligned} p(i, j; x) &= 0 && \text{si } r_i > c_j \\ p(i, j; X) &= \mathbb{P}\{M = i\} \mathbb{P}\{C = j\} && \text{si } r_i < c_j \end{aligned}$$

et si $X = +\infty$, $\alpha_i = 0$ si $\Re(z_i) > 0$.

La file MMPP/GI/1

En considérant le processus inclus au moment des fins de service, on généralise l'analyse de la file $M/GI/1$ (Neuts).

Il s'agit de trouver les probas stationnaires d'une matrice de la forme:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} B_0(x) & B_1(x) & \dots & \dots \\ A_0(x) & A_1(x) & A_2(x) & \dots \\ 0 & A_0(x) & A_1(x) & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot$$

Les $A_i(x)$ s'expriment en fonction de la distribution $H(\cdot)$ du temps de service.

MMPP/GI/1 – Workload

Soit

$$W(i; x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{W(t) \leq x, X(t) = i\}$$

la distribution stationnaire jointe de l'état de $\{X(t), t \geq 0\}$ et de la quantité de travail en attente. La transformée de Laplace vérifie l'équation vectorielle:

$$\mathbf{W}^*(s) = s(\mathbf{1} - \rho) \mathbf{g} [s\mathbf{1} + \mathbf{Q} - (1 - H^*(s))\mathbf{A}]^{-1},$$

où

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}\mathbf{G}$$

et

$$\mathbf{G} = \int_0^\infty \exp((\mathbf{Q} - \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{G})x) dH(x).$$

Mais on peut également appliquer la *méthode du noyau*!

Diagonalisons la matrice

$$\mathbf{A}(s) = s\mathbf{I} + \mathbf{Q} - (1 - H^*(s))\mathbf{A}$$

Il existe $\mathbf{\Omega}(s) = \text{diag}(\omega_k(s))$, $\mathbf{R}(s)$ et $\mathbf{S}(s)$ inversibles tq $\mathbf{R}(s)\mathbf{S}(s) = \mathbf{I}$ et

$$\mathbf{A}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{\Omega}(s)\mathbf{S}(s).$$

On obtient le *développement spectral*:

$$\mathbf{W}^*(s) = s(1 - \rho)\mathbf{g} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\omega_k(s)} \mathbf{R}_k(s) \mathbf{S}_k(s).$$

Faisons l'analyse de singularités dans

$$W^*(s) = s(1 - \rho) \mathbf{g} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\omega_k(s)} \mathbf{R}_k(s) \mathbf{S}_k(s).$$

qui est défini pour tout $s > 0$.

Pour chaque $k > 0$, il se trouve qu'il existe $s_k > 0$ tq $\omega_k(s_k) = 0$.

Alors nécessairement, $\mathbf{g} \mathbf{R}_k(s_k) \mathbf{S}_k(s_k) = \mathbf{0}$ d'où:

$$\forall k > 1, \quad \mathbf{g} \mathbf{R}_k(s_k) = \mathbf{0}.$$

Comme de plus $\mathbf{g} \mathbf{1} = 1$, on obtient \mathbf{g} comme solution de

$\mathbf{g} \Xi = (1, 0, \dots, 0).$

Applications

Modèles de transmission vidéo: Biersack, Jean-Marie et Nain (en cours!).

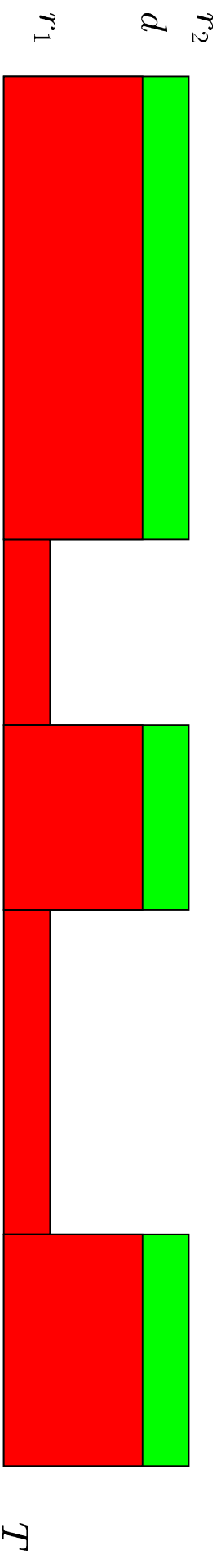
On considère une transmission de vidéo à débit constant (CBR) sur un lien de capacité *variable* modélisée par un processus On/Off (pour commencer).

On veut transmettre un bloc en T unités de temps.

- à quel débit envoyer pour une proba de retard donnée ϵ ?
- à quelle vitesse pré-envoyer étant donné le comportement de l'utilisateur (avance rapide, retour, pause...).

Le processus du débit disponible alterne entre deux valeurs $r_1 < r_2$.

Soit $C_T(d)$ la quantité transmise à la date T avec un débit d , $r_1 < d < r_2$.



On se ramène à un processus On/Off avec débit crête = 1 :

$$C_T(d) = r_1 T + (d - r_1) N(T) .$$

Calcul des transformées de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} \int_0^\infty e^{-sT} \mathbb{P}\{N(T) > x\} dT dx$$
$$= \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ \frac{m_2}{s(s + \theta)} + \frac{\theta(1 - G_1^*(s))(1 - G_2^*(s + \theta))}{s^2(s + \theta)^2(1 - G_1^*(s)G_2^*(s + \theta))} \right\}.$$

m_1, m_2 : moyennes des périodes On et Off.

S'obtient aussi par l'utilisation de processus de renouvellement alternés (Cox & Miller).

Peut s'obtenir également avec le calcul matriciel des MMRP, qui se généralise au cas de plusieurs états du canal.

→ calcul de moments,

$$\text{Var}(C_T) = T^2 \frac{m_1^2 v_2 + m_2^2 v_1}{(m_1 + m_2)^3} + O(T).$$

→ calcul de débits équivalents: pour $q \in [0, 1)$ donné, trouver γ tel que

$$\mathbb{P}\{C(d) \geq \gamma T\} \geq q.$$

Bibliographie

Modèles fluides

- D. Anick, D. Mitra, and M.M. Sondhi. Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources. *Bell Sys. Tech. J.*, 61:1871–1894, October 1982.
- D. Mitra. Stochastic theory of a fluid models of producers and consumers coupled by a buffer. *Adv. Appl. Prob.*, 20:646–676, 1988.
- T.E. Stern and A.I. Elwalid. Analysis of separable Markov-modulated rate models for information-handling systems. *Adv. Appl. Prob.*, 23:105–139, 1991.
- A.I. Elwalid, D. Mitra, and T.E. Stern. Statistical multiplexing of Markov modulated sources: theory and computational algorithms. In A. Jensen and V.B. Iversen, editors, *Proc. 13th International Teletraffic Congress*, pages 495–500, Copenhagen, 1991. Elsevier Science.

- A.I. Elwalid, D. Mitra, and T.E. Stern. A theory of statistical multiplexing of Markov modulated sources: Spectral expansions and algorithms. In W.J. Stewart, editor, *Numerical solution of Markov Chains*, 1991.
- A.I. Elwalid and D. Mitra. Statistical multiplexing with loss priorities in rate-based congestion control of high speed networks. *IEEE Trans. Comm.*, 42(11):2989–3002, November 1994.
- A.I. Elwalid and D. Mitra. Markovian arrival and service communication systems: Spectral expansions, separability and Kronecker-product forms. In W.J. Stewart, editor, *Computations in the Markov Chains*, pages 507–546. Kluwer, 1995.
- MMPP, MAP, BMAP...**
- M.F. Neuts. The fundamental period of a queue with Markov-modulated arrivals. In *Probability, Statistics and Mathematics: papers in honour of Samuel Karlin*. Academic Press, NY, 1989.
- W. Fischer and K. Meier-Hellstern. The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook. *Performance Evaluation*, 18:149–171, 1992.
- D.M. Lucantoni, G.L. Choudhury, and W. Whitt. The transient *BMAP/G/1* queue. *Commun.*

Statist.-Stochastic Models, 10(1):145–182, 1994.

A. Jean-Marie, Z. Liu, P. Nain and D. Towsley, “Computational Aspects of the Workload Distribution in the MMPP/GI/1 Queue”. *JSAC*, 1999.

Asymptotiques, bornes et bande passante équivalente

W. Whitt. Tail probabilities with statistical multiplexing and effective bandwidth. *Telecommun. Syst.*, 3:71–107.

D. Artiges and P. Nain. Upper and lower bounds for the multiplexing of multiclass Markovian on/off sources. *Performance Evaluation*, 27&28, pp. 673–698, 1996.

V.G. Kulkarni. Effective bandwidth for Markov regenerative sources. *Queueing Systems*, 24, pp. 137–153, 1996.

Z. Liu, P. Nain, and D. Towsley. Exponential bounds with applications to call admission. *JACM*, 44(2):366–394, 1997.