

Décomposition de domaines : Neumann-Neumann avec solveur grossier

Marina Vidrascu



le 27 novembre 2010

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann
- 2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann
 - Un peu d'histoire
 - Un problème modèle
 - Neumann-Neumann
 - Bilan des résultats de convergence
- 3 Conclusions

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann
- 2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann
 - Un peu d'histoire
 - Un problème modèle
 - Neumann-Neumann
 - Bilan des résultats de convergence
- 3 Conclusions

Décomposition de données

- en calcul parallèle **distribuer** les données
- utiliser le même algorithme que pour un calcul séquentiel

Décomposition de domaines homogène

- une **nouvelle méthode de résolution** pour des systèmes linéaires de grande taille
- bien adaptée aux ordinateurs parallèles (méthodes a gros grain)
- **principe** résoudre *séparément* sur chaque sous domaine (décomposition avec ou sans recouvrement) et *recoller* les solutions

Décomposition de domaine hétérogène

- séparation du domaine physique en régions
- utiliser des **modèles** différents dans chaque région
- recoller les solutions aux interfaces

Algorithme **robuste**, **efficace** et **extensible (scalable)** utilisable dans un contexte industriel

- Géométries **complexes**,
- Coefficients fortement **hétérogènes**
- Maillages **arbitraires** (non structurés, incompatibles)

Généralisations :

- Considérer des opérateurs non-symétriques (advection-diffusion, contact avec frottement)
- Robustesse industrielle du solveur grossier
 - construction **automatique**
 - **efficacité** en termes de **choix** et de taille

Pourquoi faut-il un solveur grossier?

Un algorithme à deux niveaux est **indispensable** pour l'**extensibilité**.

Comment construire un solveur grossier?

- **Neumann-Neumann généralisé** (deux niveaux) (**Balanced Neumann-Neumann**) : se ramener à la résolution dans des espaces réguliers en imposant l'orthogonalité à un espace grossier **bien choisi**.
- Analyse : continuité uniforme pour des normes de l'énergie pondérées

$$\|v\|_i^2 = \int_{\Omega_i} E_{jklm} v_{j,k} v_{l,m} + \frac{1}{H_i^2} |v|^2.$$

Comment choisir un espace grossier ?

Clé du succès!

Les choix pour la décomposition de domaines avec préconditionneur Neumann-Neumann.

1 Introduction

- Motivation
- Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann

2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann

- Un peu d'histoire
- Un problème modèle
- Neumann-Neumann
- Bilan des résultats de convergence

3 Conclusions

Le préconditionneur Neumann-Neumann généralisé

Cas particulier algorithme Schwarz additif appliqué au problème d'interface (Complément de Shur primal)

- Décomposer le domaine en petits sous-domaines **disjoints**
- Introduire la **matrice de rigidité** locale

$$(\mathbf{K}_i)_{lm} = \int_{\Omega} E \varepsilon(\phi_l) : \varepsilon(\phi_m) dx$$

- Décomposer chaque matrice en blocs en distinguant les d.l **internes** et les d.l **d'interface**

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^1 & 0 & \cdot & 0 & \mathbf{B}^1 \mathbf{R}^1 \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}^2 & \cdot & 0 & \mathbf{B}^2 \mathbf{R}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \tilde{\mathbf{K}}^N & \mathbf{B}^N \mathbf{R}^N \\ \mathbf{R}^{1t} \mathbf{B}^{1t} & \mathbf{R}^{2t} \mathbf{B}^{2t} & \cdot & \mathbf{R}^{Nt} \mathbf{B}^{Nt} & \sum_i \mathbf{R}^{it} \tilde{\mathbf{K}}^i \mathbf{R}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^1 \\ \tilde{\mathbf{X}}^2 \\ \cdot \\ \tilde{\mathbf{X}}^N \\ \tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^1 \\ \tilde{\mathbf{F}}^2 \\ \cdot \\ \tilde{\mathbf{F}}^N \\ \tilde{\mathbf{F}} \end{pmatrix}$$

- Eliminer les **variables** internes

$$\mathbf{S}^i = \tilde{\mathbf{K}}_i - \mathbf{B}^{it} (\tilde{\mathbf{K}}^i)^{-1} \mathbf{B}^i \quad \left(\sum_i \mathbf{R}^{it} \mathbf{S}^i \mathbf{R}^i \right) \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{F}}$$

- Résoudre par **GC** ou **GMRES** (**bon** préconditionneur).

Algorithme de Schwarz additif: $(\sum_i \mathbf{R}^{it} \mathbf{S}^i \mathbf{R}^i) \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}}$

Définir:

- $\mathbf{V} = \{\bar{v} = Tr v|_{\Gamma}, v \in \mathbb{H}(\Omega)\}$ espace des valeurs sur l'interface
- une partition de l'unité $\mathbf{D}^i : Tr \mathbf{V}|_{\Gamma_i} \rightarrow \mathbf{V}$
- un opérateur local approché $\tilde{\mathbf{S}}^i$ t.q. $\tilde{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{R}^{it} \tilde{\mathbf{S}}^i \mathbf{R}^i$.
- $\tilde{\mathbf{S}}^i$ la décomposition $Tr \mathbf{V}|_{\Gamma_i} = \mathbf{V}_i \oplus \mathbf{Z}_i$.

Neumann-Neumann : Schwarz additif (résoudre S dans V)

- $\mathbf{V}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{D}^i \mathbf{Z}_i \subset \mathbf{V}$, (produit scalaire $\tilde{\mathbf{S}}$), espace grossier
- \mathbf{V}_i (produit scalaire $\mathbf{B}_i = \tilde{\mathbf{S}}^i$) espaces locaux
- $I_i = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{D}^i$ \mathbf{P} la $\tilde{\mathbf{S}}$ proj. orthogonale $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_0$. extensions

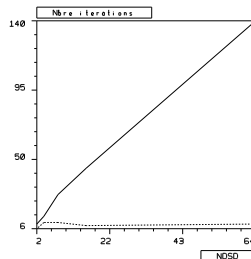
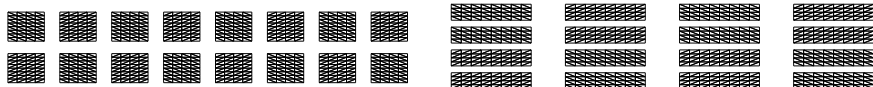
Le préconditionneur : $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}) (\sum_i \mathbf{D}^i \tilde{\mathbf{S}}_i^{-1} \mathbf{D}^{it}) (\mathbf{I} - \mathbf{P})^t \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}}$

Remarques

- l'espace grossier contient les singularités locales (modes rigides....)
- Neumann-Neumann standard: \mathbf{S} opérateur de Schur exact sur l'interface

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})^t \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}}.$$

Un exemple



NB SD	Neumann	Coarse
2	9	6
4	14	10
8	28	10
16 (4*4)	65	21
16 (8*2)	45	8
16 (irregular)	70	17
64	140	9

- Extension au maillages incompatibles

- ★ démarrer avec un maillage conforme issu d'outils automatiques
- ★ raffiner uniquement certains sous-domaines
- ★ définir le préconditionneur sur la décomposition initiale et introduire des éléments de contact

- Extension à l'élasticité non linéaire

- ★ utiliser un algorithme de **Newton avec continuation** et résoudre le problème tangent par DD
- ★ résoudre le problème d'interface par GMRES (plus robuste : les problèmes locaux peuvent perdre l'ellipticité)
- ★ construire le préconditionneur a la première itération et l'utiliser pour plusieurs itérations

- Extension au calcul des basses fréquences pour un problème de vibrations

- ★ résoudre $K - \omega^2 M = F$
- ★ utiliser le préconditionneur de K
- ★ résoudre le problème d'interface par GMRES

- Extension au maillages incompatibles

- ★ démarrer avec un maillage conforme issu d'outils automatiques
- ★ raffiner uniquement certains sous-domaines
- ★ définir le préconditionneur sur la décomposition initiale et introduire des éléments de contact

- Extension à l'élasticité non linéaire

- ★ utiliser un algorithme de **Newton avec continuation** et résoudre le problème tangent par DD
- ★ résoudre le problème d'interface par GMRES (plus robuste : les problèmes locaux peuvent perdre l'ellipticité)
- ★ construire le préconditionneur a la première itération et l'utiliser pour plusieurs itérations

- Extension au calcul des basses fréquences pour un problème de vibrations

- ★ résoudre $K - \omega^2 M = F$
- ★ utiliser le préconditionneur de K
- ★ résoudre le problème d'interface par GMRES

- Extension au maillages incompatibles

- ★ démarrer avec un maillage conforme issu d'outils automatiques
- ★ raffiner uniquement certains sous-domaines
- ★ définir le préconditionneur sur la décomposition initiale et introduire des éléments de contact

- Extension à l'élasticité non linéaire

- ★ utiliser un algorithme de **Newton avec continuation** et résoudre le problème tangent par DD
- ★ résoudre le problème d'interface par GMRES (plus robuste : les problèmes locaux peuvent perdre l'ellipticité)
- ★ construire le préconditionneur a la première itération et l'utiliser pour plusieurs itérations

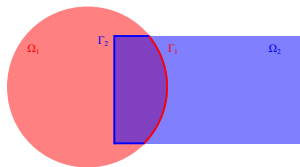
- Extension au calcul des basses fréquences pour un problème de vibrations

- ★ résoudre $K - \omega^2 M = F$
- ★ utiliser le préconditionneur de K
- ★ résoudre le problème d'interface par GMRES

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann
- 2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann
 - Un peu d'histoire
 - Un problème modèle
 - Neumann-Neumann
 - Bilan des résultats de convergence
- 3 Conclusions

Schwarz alterné

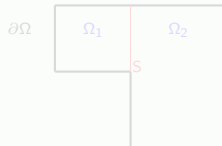
- décomposition avec recouvrement
- calcul **analytique** de fonctions harmoniques



Sous-structuration

Numérotation : premier sous-domaine, deuxième, la frontière S

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1S} \\ 0 & A_{22} & A_{2S} \\ A_{1S}^T & A_{2S}^T & A_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_S \end{bmatrix}$$

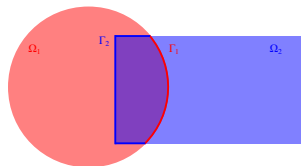


$$X_i = A_{ii}^{-1} (B_i - A_{iS} X_S)$$

$$\underbrace{\left(A_{SS} - \sum_{i=1}^2 A_{iS}^T A_{ii}^{-1} A_{iS} \right)}_{S(\text{Shur complement})} X_S = B_S - \sum_{i=1}^2 A_{iS}^T A_{ii}^{-1} B_i$$

Schwarz alterné

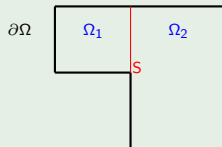
- décomposition avec recouvrement
- calcul **analytique** de fonctions harmoniques



Sous-structuration

Numérotation : premier sous-domaine, deuxième, la frontière S

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1S} \\ 0 & A_{22} & A_{2S} \\ A_{1S}^T & A_{2S}^T & A_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_S \end{bmatrix}$$



$$X_i = A_{ii}^{-1} (B_i - A_{iS} X_S)$$

$$\underbrace{\left(A_{SS} - \sum_{i=1}^2 A_{iS}^T A_{ii}^{-1} A_{iS} \right)}_{S(\text{Shur complement})} X_S = B_S - \sum_{i=1}^2 A_{iS}^T A_{ii}^{-1} B_i$$

Sous-structuration

- **Motivation** : gros problèmes avec peu de MC
- **Algorithmes** : frontale astucieuse sur matrice de Shur
- **Avantages et inconvénients**
 - manipulations matricielles
 - nombre de sous-domaines réduit
 - la matrice de Shur grande, chère, pas de structure

★ résoudre le problème d'interface (plus petit que l'initial)

$$SX_S = B_{new}$$

avec **S**: $S = A_{SS} - \sum_{i=1}^2 A_{iS}^T A_{ii}^{-1} A_{iS} = \sum_{i=1}^2 S_i$

★ calculer X_i en parallèle

$$X_i = A_{ii}^{-1} (B_i - A_{iS} X_S)$$

$$\kappa(\mathbf{S}) \leq \frac{C}{H^2} \left[1 + \max_i \frac{H_i}{h_i} \right]$$

Sous-structuration

- **Motivation** : gros problèmes avec peu de MC
- **Algorithmes** : frontale astucieuse sur matrice de Shur
- **Avantages et inconvénients**
 - manipulations matricielles
 - nombre de sous-domaines réduit
 - la matrice de Shur grande, chère, pas de structure

★ résoudre le problème d'interface (plus petit que l'initial)

$$SX_S = B_{new}$$

avec **S**: $S = A_{SS} - \sum_{i=1}^2 A_{iS}^T A_{ii}^{-1} A_{iS} = \sum_{i=1}^2 S_i$

★ calculer X_i en parallèle

$$X_i = A_{ii}^{-1} (B_i - A_{iS} X_S)$$

$$\kappa(\mathbf{S}) \leq \frac{C}{H^2} \left[1 + \max_i \frac{H_i}{h_i} \right]$$

Décomposition de domaines *moderne*

● *Débuts*

- **Motivation** : parallélisme
- **Algorithmes** :
 - **Avec recouvrement** : Schwarz mult, Schwarz additif
 - **Sans recouvrement** : Stecklov-Poincaré (cont), Shur
- **Avantages et inconvénients**
 - formulations continues, analyse mathématique
 - méthodes itératives performantes **bon préconditionneur**
 - maillages incompatibles **mortar**

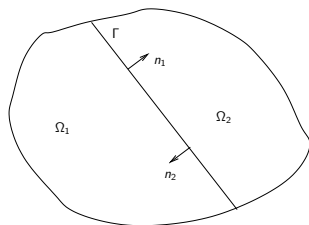
● *Très peu après...*

- **Motivation** : parallélisme mais plus encore!
 - très robustes pour pb de grande **et moyenne!** taille
 - **couplage** de méth. de résolution et/ou de discrétisation
- **Algorithmes** : Neumann-Neumann, FETI analysées (Schwarz additif)
- **Avantages** : Analyse, nombreuses extensions

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann
- 2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann
 - Un peu d'histoire
 - **Un problème modèle**
 - Neumann-Neumann
 - Bilan des résultats de convergence
- 3 Conclusions

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1 = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ -\Delta u_2 = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$



Méthode de résolution

Résoudre **indépendamment** sur chaque sous-domaine, **coller les solutions** sur l'interface

$$(P) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ -\Delta u_2 = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \\ u_1 = u_2 = \lambda & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1(u_1, \lambda) = 0 \\ \mathcal{P}_2(u_2, \lambda) = 0 \\ \mathcal{I}(u_1, u_2) = 0 \end{cases}$$

Problème : résoudre le problème **d'interface** \rightarrow trouver λ

Dirichlet-Neumann

supposer λ connu

calculer u_1 solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \\ u_1 = \lambda & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

calculer u_2 solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial n_1} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

poser $\lambda = \omega \lambda + (1 - \omega) Tr u_2$

Opérateur de Steklov Poincaré

λ donné sur l'interface, calculer u_i solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f & \text{dans } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \setminus \Gamma \\ u_i = \lambda & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

définir S_i opérateur de Steklov Poincaré $S_i \lambda = \frac{\partial u_i}{\partial n_i}$

$$r = (S_1 + S_2) \lambda \text{ résidu}$$

La condition de compatibilité sur l'interface ($r = 0$) $\Rightarrow (S_1 + S_2) \lambda = 0$

Remarques

- résoudre par un algorithme de gradient conjugué
- S_i appelé opérateur **Dirichlet vers Neumann** ; S_i^{-1} : opérateur **Neumann vers Dirichlet**
- $M = S_1^{-1}$ alg (**Dirichlet-Neumann**) $M = (\alpha_1 S_1^{-1} + \alpha_2 S_2^{-1})$ (**Neumann-Neumann**)

$$\kappa(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}) \leq \frac{C(\alpha_i)}{H^2} \left[1 + \ln \frac{H_i}{h_i}\right]^2,$$

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann
- 2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann
 - Un peu d'histoire
 - Un problème modèle
 - **Neumann-Neumann**
 - Bilan des résultats de convergence
- 3 Conclusions

1. Sous-structuration

Décomposition sans recouvrement. Bon *aspect ratio*

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$$

utiliser une méthode itérative PGC ou GMRES pour résoudre l'opérateur d'interface

$$Res = \sum_i \mathbf{R}^{it} Res^i = \left(\sum_i \mathbf{R}^{it} \mathbf{S}^i \mathbf{R}^i \right) \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{L}}$$

les inconnues $\bar{\mathbf{X}} \in V$ déplacements (formulation primale)

- $\bar{\mathbf{X}}^i = \mathbf{R}^i \bar{\mathbf{X}}$ trace locale sur $\partial\Omega_i$,
- $\mathbf{S}^i = \bar{\mathbf{K}}^i - \mathbf{B}^{it} (\hat{\mathbf{K}}^i)^{-1} \mathbf{B}^i$ matrice du complément de Shur local (obtenue par élimination de Gauss des inconnues internes)
- $\hat{\mathbf{K}}^i$ matrice des problèmes de Dirichlet locaux.

2. Le préconditionneur.

- **Répartir** le résidu aux sous-domaines voisins (partition de l'unité)

$$\bar{L}^i = \mathbf{D}^{it} Res.$$

- **Résoudre en //** pb de Neumann locaux (aux modes rigides près $z^i \in \mathbf{Z}_i \approx \text{Ker}\mathbf{K}^i$)

$$\begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{K}}^i & \mathbf{B}^i \\ \mathbf{B}^{it} & \bar{\mathbf{K}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathring{G}^i \\ d\bar{G}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}^{it} Res \end{bmatrix}, \quad dG^i \in H(\Omega_i)/\mathbf{Z}_i$$

$$d\bar{G}^i = (\mathbf{S}^i)^{-1} \mathbf{D}^{it} Res.$$

- **Corriger** $d\bar{G}^i$ à l'aide des **modes rigides** $\bar{z}^i \in \mathbf{Z}_i$ pour équilibrer le résidu. **balance** (projection sur $(\text{Ker}\mathbf{K}^i)^\perp$).

$$\bar{z}^i = \sum_i \mathbf{D}^i d\bar{G}^i + \sum_{i,\alpha} b_\alpha^i \mathbf{D}^i \bar{z}_\alpha^i$$

avec b_α^i solution du **problème grossier**

$$\sum_{i,\alpha} b_\alpha^i \langle \mathbf{S}\mathbf{D}^i \bar{z}_\alpha^i, \mathbf{D}^j \bar{z}_\beta^j \rangle + \langle \sum_i \mathbf{D}^i d\bar{G}^i, \mathbf{S}\mathbf{D}^j \bar{z}_\beta^j \rangle - \langle Res, \mathbf{D}^j \bar{z}_\beta^j \rangle = 0, \forall j, \forall \beta.$$

Misa à jour

- Direction de descente

$$d\bar{X} = \sum_i \mathbf{D}^i (d\bar{G}^i + \bar{z}^i).$$

Le préconditionneur

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{S}_o^{-1} + \sum_i (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{D}^i \mathbf{S}_i^{-1} \mathbf{D}^{it} (\mathbf{I} - \mathbf{P})^t.$$

Résultats de convergence pour le cas symétrique
(Dryja-Widlund, Mandel-Brezyna, P. Le Tallec.)

$$\kappa(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}) \leq \frac{C}{\alpha_i^2} \left[1 + \ln \max_i \frac{H_i}{h_i} \right]^2,$$

avec C independant de *l'aspect ratios* α_i , des coefficient *discontinuité* ρ_i ,
des diamètres H_i , *pas de discrétisation* h_i .

La forme bilinéaire

L'ellipticité locale **nécessaire**. Exemple **advection diffusion** après discrétisation, la **forme bilinéaire stabilisée locale** $a_i(u, v)$ donnée par

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \left\{ \nu \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \nabla u) v - \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \nabla v) u \right. \\ & \left. + (c - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\vec{a})) u v \right\} + \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} \frac{1}{2} \vec{a} \cdot n_i u v \\ & + \sum_{T_l \subset \Omega_i} \int_{T_l} \tau_e(h_l) \left(\text{résidu } u \right) \left(-\operatorname{div}(\nu \nabla v) + \vec{a} \cdot \nabla v + cv \right), \end{aligned}$$

associée à l'**opérateur local** $-\operatorname{div}(\nu \nabla w) + \vec{a} \cdot \nabla w + cw$
avec des **c.l Robin** sur l'interface

$$\nu \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{2} \vec{a} \cdot n_i w = F_i \text{ sur } \Gamma_i.$$

Choix générique de l'espace grossier

La projection $(I - \mathbf{P})$ doit **tuer** les **méchants**!

les fonctions dont les extensions ont une grande énergie

- Elasticité 3D

$$\mathbf{Z}_i = \ker \tilde{\mathbf{S}}^i = \text{mouvements rigides locaux}$$

- Plaques et coques

$$\mathbf{V}_i^\perp = \{v \in \mathbf{V}_i, v = 0 \text{ au coins}\}$$

(extensions des singularités au coins ont de grandes énergies)

$$\mathbf{Z}_i = \{v \in \mathbf{V}_i, v \text{ arbitraires au coins}, \langle \tilde{\mathbf{S}}^i v, w \rangle = 0, \forall w \in \mathbf{V}_i^\perp\}$$

- Advection-diffusion, **ctes locales de l'opérateur dual**.

Commentaires

- très efficace (3D, plaques, coques, advection-diffusion...)
- peut être analysé dans le cadre Schwarz additif (Dryja-Widlund, Le Tallec-Mandel-Vidrascu)
- tel quel résultats décevants pour les problèmes de contact avec frottement (problèmes non-symétriques)

Idee : Re-visiter la construction de l'espace grossier dans le cadre Schwarz additif.

Interprétation de Neumann-Neumann

Neumann-Neumann est un alg de Schwarz additif pour résoudre $A = \mathbf{S}$ sur l'interface \mathbf{V} avec le préconditionneur $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{B}_0^{-1} + \sum_i \mathbf{I}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{I}_i^t$ with

- 1 **espace grossier** $\mathbf{V}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{D}^i \mathbf{Z}_i \subset \mathbf{V}$, $\mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{S}}$,
- 2 **espaces fins locaux** (orthogonaux à l'espace grossier)

$$\mathbf{V}_i^\perp = \{ \bar{\mathbf{v}}_f \in D_i \bar{\mathbf{V}}_i, \quad \langle \mathbf{S} \bar{\mathbf{v}}_f, \bar{\mathbf{v}}_G \rangle = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{v}}_G \in \bar{\mathbf{V}}_G \}$$

muni du produit scalaire $\mathbf{B}_i = \tilde{\mathbf{S}}^i$

- 3 **extensions** (**originalité de cette approche**) $\mathbf{I}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{D}^i$
avec $\mathbf{P} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_0$ la projection $\tilde{\mathbf{S}}$ orthogonale.

Opérateur de préconditionnement

$$\mathbf{M}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}_0^{-1} + \sum_i (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{D}^i \tilde{\mathbf{S}}_i^{-1} \mathbf{D}^{i^t} (\mathbf{I} - \mathbf{P})^t.$$

Ainsi le préconditionneur est **orthogonal à l'espace grossier** (image de $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$).

Propriétés requises :

L'espace grossier doit avoir un **orthogonal** (là où vit le préconditionneur) **sympathique** c'est à dire

- Les solutions des problèmes de Neumann w_i doivent être **invariants** dans la norme de l'énergie ce qui veut dire **mettre toutes les constantes à zéro** dans les sous-problèmes locaux,
- Les sous-problèmes de Neumann locaux doivent être **régularisés** en ajoutant des c.l (pour être bien posés).

Construction :

Imposer implicitement des c.l sur la solution w_i des problèmes de Neumann locaux

$$\begin{aligned}\langle w_i, B_{i\alpha} \rangle &= 0, \forall \alpha, \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{K}^i w_i, (\mathbf{K}^i)^{-T} B_{i\alpha} \rangle &= 0, \forall \alpha, \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{D}_i \mathbf{S} v, (\mathbf{K}^i)^{-T} B_{i\alpha} \rangle &= 0, \forall \alpha, v \in V_0^\perp \\ &(\text{construction de } w_i),\end{aligned}$$

Cette condition est vérifiée si v est orthogonal à $\mathbf{D}_i (\mathbf{K}^i)^{-T} B_{i\alpha}$, donc si l'espace grossier est défini par :

$$\mathbf{Z}_i = \text{vect} \left((\mathbf{K}^i)^{-T} B_{i\alpha} \right).$$

Construction pratique de l'espace grossier

- 1 Trouver la liste de d.l. $(P_{i\alpha})_{\alpha=1,N_i}$ qui définissent les N_i modes rigides du S.D i pour pb Neumann.
- 2 Introduire une matrice de rigidité régularisée

$$\langle \mathbf{K}_R^i \mathbf{v}^i, \hat{\mathbf{v}}^i \rangle = \langle \mathbf{K}^i \mathbf{v}^i, \hat{\mathbf{v}}^i \rangle + \sum_{\alpha,\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}^i \mathbf{v}^i(P_{i\alpha}) \hat{\mathbf{v}}^i(P_{i\beta}),$$

\mathbf{M}^i est une matrice arbitraire définie positive d'ordre N_i .

- 3 Calculer les modes rigides duaux $(v_{G\alpha}^i)_{\alpha=1,N_i}$ en résolvant sur chaque SD i le problème adjoint régularisé

$$\langle (\mathbf{K}_R^i)^T \mathbf{v}_{G\alpha}^i, \hat{\mathbf{v}}^i \rangle = \hat{\mathbf{v}}^i(P_{i\beta}), \forall \hat{\mathbf{v}}^i \in V_i, \mathbf{v}_{G\alpha}^i \in V_i.$$

Si il y a un doute sur l'invariance comme en advection-diffusion rajouter les constantes duales

$$\langle (\mathbf{K}_R^i)^T \mathbf{v}_G^i, \hat{\mathbf{v}}^i \rangle = \int_{\Omega_i} \hat{\mathbf{v}}^i, \forall \hat{\mathbf{v}}^i \in V_i, \mathbf{v}_G^i \in V_i.$$

- 4 L'espace grossier est engendré par ces modes duaux

Remarques

Par construction $w_i = \tilde{\mathbf{S}}_i^{-1} \mathbf{D}_i^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G)^t \bar{r}$ les solutions des pb locaux de Neumann satisfont

$$\begin{aligned} w_i(P_{i\alpha}) &= \langle (\mathbf{K}_R^i)^T v_{G\alpha}^i, w_i \rangle = \langle \mathbf{K}_R^i w_i, v_{G\alpha}^i \rangle \\ &= \langle \bar{r}, (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G) D_i v_{G\alpha}^i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc l'algorithme est indépendant **choix de la matrice de régularisation** $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}^i$.

Dans le cas symétrique rien n'a changé puisque $S = S^T$ donc les *modes rigides duaux* sont les modes rigides

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Présentation succincte de l'algorithme de Neumann-Neumann
- 2 Présentation détaillée de l'algorithme Neumann-Neumann
 - Un peu d'histoire
 - Un problème modèle
 - Neumann-Neumann
 - Bilan des résultats de convergence
- 3 Conclusions

Résolution du problème d'interface

Sans préconditionnement

$$\kappa(\mathbf{S}) \leq \frac{C}{H^2} \left[1 + \max_i \frac{H_i}{h_i} \right]$$

Neuman-Neumann

$$\kappa(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}) \leq \frac{C(\alpha_i)}{H^2} \left[1 + \ln \frac{H_i}{h_i} \right]^2,$$

Balanced Neuman-Neumann

$$\kappa(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}) \leq \frac{C}{\alpha_i^2} \left[1 + \ln \max_i \frac{H_i}{h_i} \right]^2,$$

Conclusions

- Les préconditionneurs Neumann-Neumann sont **robustes, d'une grande souplesse d'emploi** et peuvent traiter une grande variété de problèmes elliptiques.
- **Le cadre Schwarz additif** permet d'analyser ces différents algorithmes;
- D'un point de vue pratique la **définition des espaces grossiers** reste un challenge, en particulier **définir les degrés de liberté** qui caractèrisent les modes rigides (facile pour des problèmes académiques, difficile dans le cas général)
- La décomposition du domaine est aussi un **point clé** : **aspect ratio**