

Réunion BSC/INRIA/I3M du 21 juillet 2011

Bruno Koobus, Carine Moussaed
(en collaboration avec l'INRIA + univ. Pise)

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier



Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique
- 3 Mise en oeuvre des cas-test du cylindre circulaire à $Re=20000$ et de la sphere à $Re=10000$ et $Re= 50000$ avec l'approche VMS-LES dynamique

Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique
- 3 Mise en oeuvre des cas-test du cylindre circulaire à $Re=20000$ et de la sphere à $Re=10000$ et $Re= 50000$ avec l'approche VMS-LES dynamique

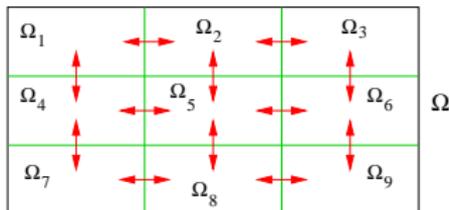
Solveur linéaire : option de base

On cherche à résoudre $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ où A est la matrice de discrétisation implicite des équations de Navier-Stokes.
(par la suite $D = \text{diagonale}(A)$)

Option de base dans AIRONUM : après mise à l'échelle (préconditionnement à gauche par D^{-1}), **GMRES** preconditionné à droite par **Schwarz additif** avec résolution des problèmes locaux par **ILU(0)** :

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

avec $\mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T ((\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})|_{\Omega_i})^{-1} \mathbf{R}_i$ et $((\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})|_{\Omega_i})^{-1} \simeq (\mathbf{L}_i \mathbf{U}_i)^{-1}$



Défaut, solutions considérées

- ⇒ **Mauvaise scalabilité** du solveur de base : dégradation du taux de convergence avec le nombre de sous-domaines
- ⇒ Introduire une ou plusieurs **grilles grossières**
- ⇒ Options considérées : preconditionnement par **déflation** ou **balancing**.

Option A : Déflation

On cherche à résoudre $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Opérateurs de base :

- Φ_j = fonctions de base caractéristiques associées au sous-domaine Ω_j ($\Phi_j(x_i) = 1$ si $x_i \in \Omega_j$, 0 sinon).
- \mathbf{Z} = opérateur de prolongement défini par $\mathbf{Z}_{ij} = \Phi_j(\mathbf{x}_i)$ ($i=1, \dots, NS$ et $j=1, \dots, N$, $NS = \text{nb noeuds}$, $N = \text{nb sous-domaines}$, $NS \gg N$).
- $\mathbf{E} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z}$ = matrice grille grossière
- opérateurs de projection :
 - $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T$
 - $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}$

Remarque pour preconditionnement à droite :

$$\mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

Option A : Déflation (precond. à droite)

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{u} + \mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{b} + \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{u}}$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}$$

$$\text{où } \mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T ((\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})|_{\Omega_i})^{-1} \mathbf{R}_i$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{v}} \text{ solution de } \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Option B : Balancing

On cherche à résoudre $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Opérateurs de base :

- Φ_j = fonctions de base caractéristique associée au sous-domaine Ω_j ($\Phi_j(x_i) = 1$ si $x_i \in \Omega_j$, 0 sinon).
- \mathbf{Z} = opérateur de prolongement défini par $\mathbf{Z}_{ij} = \Phi_j(\mathbf{x}_i)$ ($i=1, \dots, NS$ et $j=1, \dots, N$, $NS = \text{nb noeuds}$, $N = \text{nb sous-domaines}$, $NS \gg N$).
- $\mathbf{E} = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z}$ = matrice grille grossière
- opérateurs de projection :
 - $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T$
 - $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}$

Option B : Balancing (precond. à droite)

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

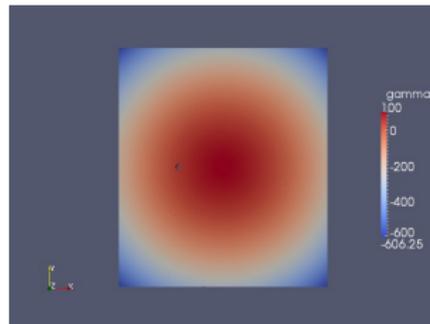
$$\Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{P}_B\mathbf{v}$$

$$\text{où } \mathbf{P}_B = \mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T + \mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$$

$$\text{et } \mathbf{v} \text{ vérifie } \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_B\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

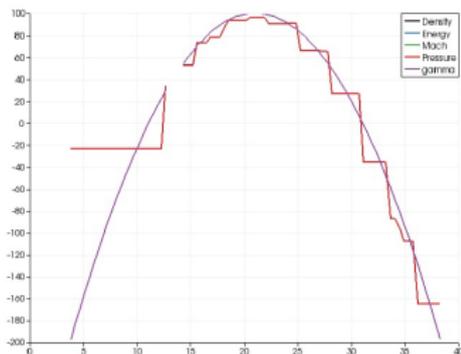
Déflation et balancing : expériences

- Mise en oeuvre informatique des méthodes de déflation et balancing dans le code de calcul parallèle AIRONUM d'écoulements compressibles
- Expérimentation sur la résolution de $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ où \mathbf{A} est la matrice de discrétisation associée à un calcul turbulent (LES Smagorinsky) pour un temps donné et pour différents CFL (20, 100 et 1000) . Le second membre \mathbf{b} est choisi de sorte que la solution \mathbf{u} est un parabolioïde :

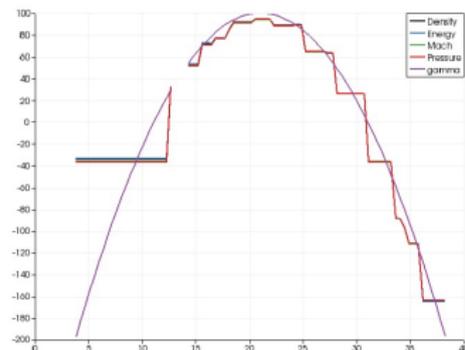


Déflation et balancing : expériences

Solution \mathbf{u}_H du problème grossier (64 sous-domaines) :
 $\mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{u}_H = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$



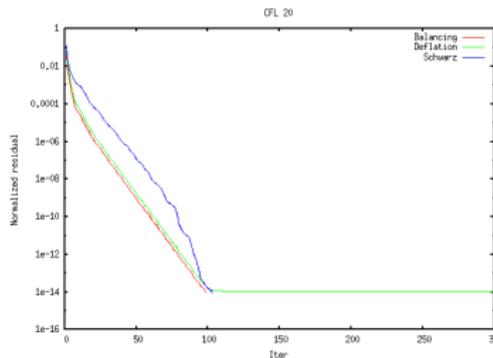
Coupe, CFL=20



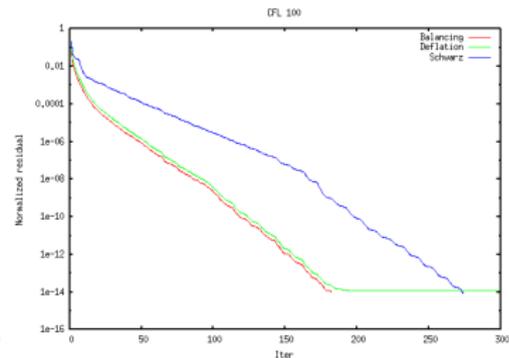
Coupe, CFL=1000

Déflation et balancing : expériences

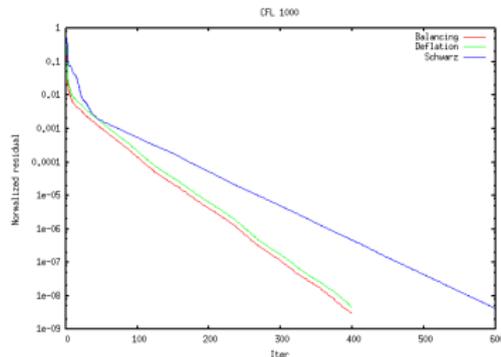
Convergence Schwarz additif, déflation et balancing (CFL 20, 100 et 1000) :



212.210, 9.36590e-08



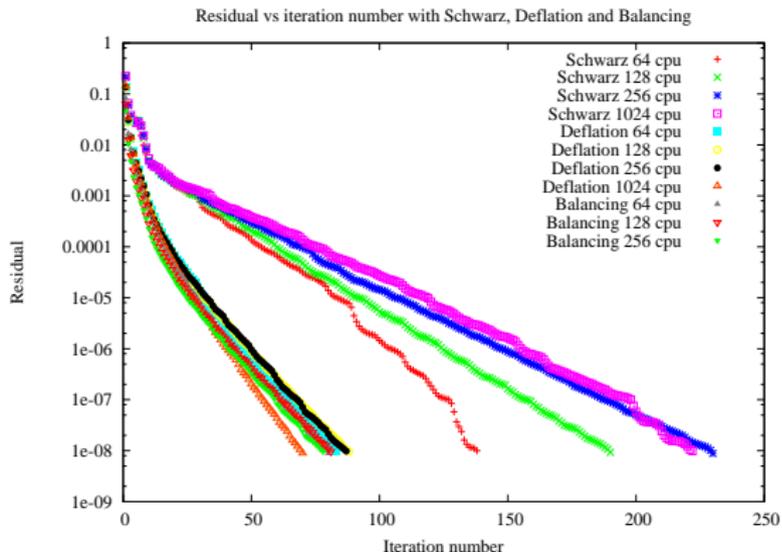
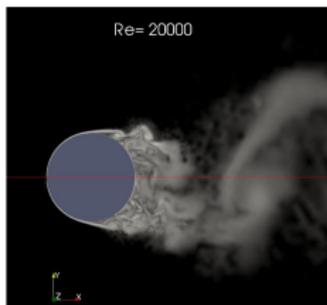
202.726, 1.61824e-12



251.790, 1.22733e-06

Déflation et balancing : expériences

LES compressible : convergence de Schwarz additif, déflation et balancing pour 1 pas de temps (CFL=100, cylindre circulaire, $Re=20000$, 1.8M noeuds, aspect ratio < 500 , 64-1024 cpu) :



Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique**
- 3 Mise en oeuvre des cas-test du cylindre circulaire à $Re=20000$ et de la sphere à $Re=10000$ et $Re= 50000$ avec l'approche VMS-LES dynamique

Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique

- Développement d'une version VMS-LES (et LES) dynamique efficace en non structuré pour les modèles de sous-maille de Smagorinsky et WALE.
- Mise en oeuvre informatique de ces modèles dynamiques dans le logiciel de calcul parallèle AIRONUM d'écoulements compressibles en non structuré.
- Premières expérimentations et validations pour le cas test du cylindre circulaire à Reynolds 20000.
- Option "dynamique" utilisable dans l'approche hybride RANS/VMS-LES.

L'approche VMS-LES dans AIRONUM

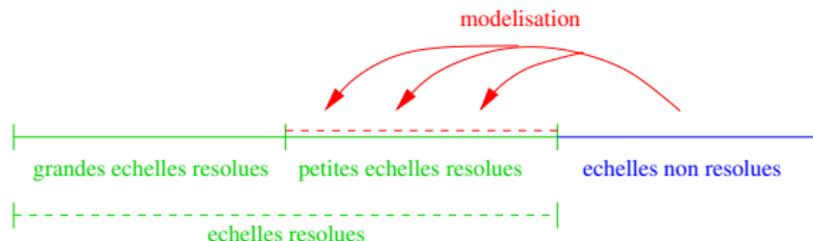
Extension du travail de Hughes et al. (2000, 2001, écoulements incompressibles + méthodes spectrales + turbulence homogène isotrope) pour pouvoir prendre en compte :

- les équations de **Navier-Stokes compressibles 3D**,
- des maillages **non structurés**,
- un modèle de discrétisation mixte **EF/VF**,
- des écoulements avec **détachements tourbillonnaires**.

(Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2004 et 2006.)

Principales caractéristiques de l'approche VMS-LES

- **Construction** du modèle qui **repose sur la méthode de discrétisation spatiale** utilisée,
- Approche basée sur des **projections variationnelles** des équations de Navier-Stokes \Rightarrow **équations régissant des échelles différentes de la solution** (grandes échelles résolues, petites échelles résolues, et échelles non résolues),
- **Effets des échelles non résolues modélisés** dans les équations régissant les **petites échelles résolues, mais pas** dans les équations associées aux **grandes échelles résolues** :



Version dynamique

Motivation : améliorer la prédiction du modèle VMS-LES (et LES) tout en préservant l'efficacité en non structuré.

Constante du modèle de sous-maille qui varie en temps et en espace (voir annexe pour les détails) :

- Smagorinsky :

- $\mu_{SGS}^{VMS} = \bar{\rho}(c_s \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) |S'|$

- $\mu_{SGS}^{LES} = \rho(c_s \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) |S|$

- WALE :

- $\mu_{SGS}^{VMS} = \bar{\rho}(c_w \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(S', S'^d)$

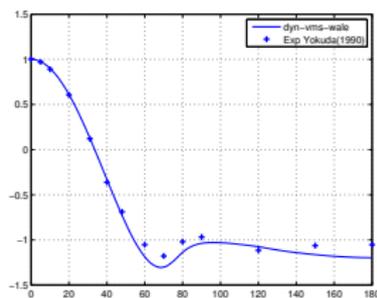
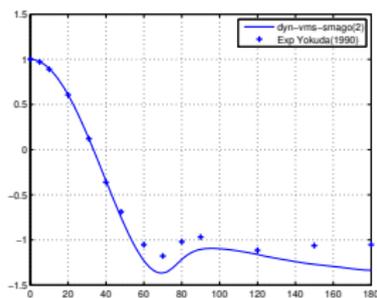
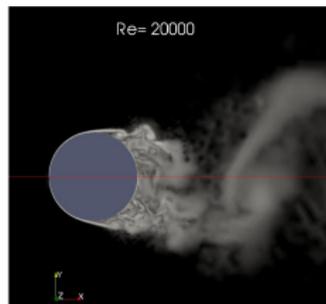
- $\mu_{SGS}^{LES} = \rho(c_w \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(S, S^d)$

+ modification de la constante dynamique du modèle WALE afin de retrouver le comportement asymptotique correcte du modèle original à la paroi (Baya Toda *et al.* 2010).

Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique
- 3 Mise en oeuvre des cas-test du cylindre circulaire à $Re=20000$ et de la sphere à $Re=10000$ et $Re= 50000$ avec l'approche VMS-LES dynamique

Cylindre Reynolds 20000

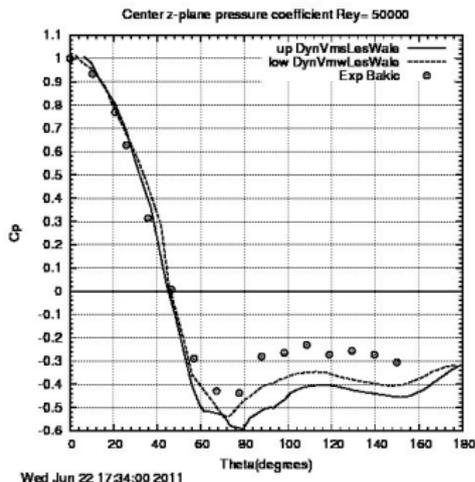
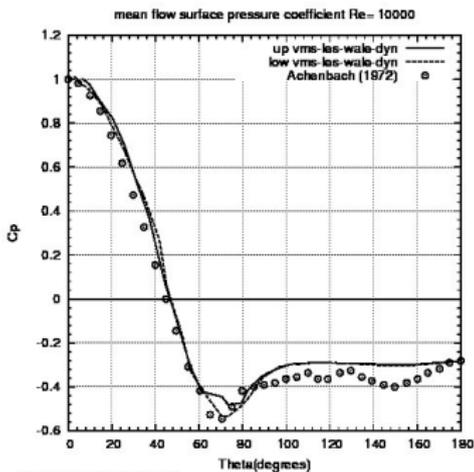


Maillage : 1.8 M de noeuds

Cylindre Reynolds 20000

Simulation	$\overline{C_d}$	C_{Lrms}	l_r	$-\overline{Cp_b}$	θ_{sep}	St
LES Smagorinsky (non-dyn)	1.295	0.574	0.779	1.3	86	.197
LES Smagorinsky dyn	1.24	0.44	0.9	1.24	84	0.19
LES WALE dyn	1.17	0.4	1.182	1.149	84	0.197
VMS-LES Smagorinsky dyn	1.296	0.563	0.852	1.336	86.24	0.186
VMS-LES Wale dyn	1.20	0.44	1.0733	1.197	84	0.191
Experiments (Norberg 2003, Basu 1985, Yokuda 1990)	[1.10-1.20]	[0.4-0.6]	–	[1.03-1.09]	–	0.194
LES (Salvatici 2003)	[0.94-1.28]	[0.17-0.65]	[0.7-1.4]	[0.83-1.38]	–	–
LES (Aradag 2009)	–	–	1.	[1.04-1.25]	–	–
Vms-LES Wale (Wornom 2011)	1.27	0.60	0.80	1.09	86	0.19

Sphere Reynolds 10000 et 50000



Sphere Reynolds 10000 et 50000

Reynolds 10000						
Simulation	$\overline{C_d}$	C_{Lrms}	l_r	$-\overline{Cp_b}$	θ_{sep}	St
VMS-LES WALE dyn	.43	.02	1.44	.28	82.5	–
Experiments (Achenbar 1972)	.4	–	–	–	82.5	.195

Reynolds 50000						
Simulation	$\overline{C_d}$	C_{Lrms}	l_r	$-\overline{Cp_b}$	θ_{sep}	St
VMS-LES WALE dyn	.50	.05	.83	.32	79	–
VMS-LES-Smagorinsky (Wornom, 2011)	.44	.04	1.08	.34	85	0.17
Experiments Bakic (2004)	–	–	.98-1.43	–	80-83	.18
Experiments Achenbach(1972), Maxworthy(1969)	.55 , 0.5	–	–	–	–	–

Annexe : WALE dynamique

Notations : $\bar{\mathbf{u}}$ =filtre de grille et $\tilde{\mathbf{u}} = \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$ = filtre de Favre.

Filtre de grille :

Soit $M_{ij} = \overline{\rho\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j} - \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}}_i\tilde{\mathbf{u}}_j$ le tenseur des contraintes de sous-maille.

On a :

$$M_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij} = T_{ij} + \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij}$$

On modélise T_{ij} par $T_{ij} = -\mu_{SGS}\tilde{P}_{ij}$ avec

$$\tilde{P}_{ij} = -\frac{2}{3}\tilde{S}_{kk}\delta_{ij} + 2\tilde{S}_{ij}$$

où :

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}_j}{\partial x_i} \right)$$

et où :

$$\mu_{SGS} = \bar{\rho}(c_W\Delta)^2 g(\tilde{\mathbf{u}}) \quad ; \quad g(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{(\tilde{S}_{ij}^d\tilde{S}_{ij}^d)^{\frac{3}{2}}}{(\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{\frac{5}{2}} + (\tilde{S}_{ij}^d\tilde{S}_{ij}^d)^{\frac{5}{4}}}$$

avec :

$$\tilde{S}_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\tilde{g}_{ij}^2 + \tilde{g}_{ji}^2 \right) - \frac{1}{3}\tilde{g}_{kk}^2 \quad ; \quad \tilde{g}_{ij}^2 = \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{kj} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{ij} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial x_j} .$$

Annexe : WALE dynamique

Filtre test (2ème niveau de filtre) :

On a le tenseur des contraintes de "subtest-scale" $M_{ij}^{test} = \widehat{\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j} - (\hat{\rho})^{-1} \left(\widehat{\rho \mathbf{u}_i} \widehat{\rho \mathbf{u}_j} \right)$

Comme précédemment avec T_{ij} , on modélise la partie déviatorique de M_{ij}^{test} par

$$M_{ij}^{test} - \frac{1}{3} M_{kk}^{test} \delta_{ij} = -c \hat{\Delta}^2 \hat{\rho} g(\hat{\mathbf{u}}) \hat{P}_{ij} \quad (c = c_W^2)$$

D'autre part on a $\mathcal{L}_{ij} = M_{ij}^{test} - \hat{M}_{ij} = \widehat{\rho \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_j} - (\hat{\rho})^{-1} \left(\widehat{\rho \tilde{\mathbf{u}}_i} \widehat{\rho \tilde{\mathbf{u}}_j} \right)$

On a aussi $L_{ij} = \mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{L}_{kk} \delta_{ij} = (c \Delta^2) B_{ij}$ avec

$$B_{ij} = \widehat{\rho g(\tilde{\mathbf{u}}) \tilde{P}_{ij}} - \left(\frac{\hat{\Delta}}{\Delta} \right)^2 \hat{\rho} g(\hat{\mathbf{u}}) \hat{P}_{ij}$$

L'inconnue est $(c \Delta^2)$ qui doit satisfaire $L_{ij} = (c \Delta^2) B_{ij}$. Ce système de 6 équations à une inconnue est "résolu" par moindres carrés :

$$(c \Delta^2) \text{ minimise } Q = (L_{ij} - (c \Delta^2) B_{ij})^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial (c \Delta^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (c \Delta^2) = \frac{L_{ij} B_{ij}}{B_{pq} B_{pq}}$$

N.B. Le "filtre test" choisi permet de déterminer $\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}$.

Annexe : WALE dynamique

- Exemple de “filtre test” :

On définit pour une fonction ψ définie aux noeuds sa test-filtrée $\hat{\psi}$ au noeud k par :

$$\hat{\psi}_k = \frac{\sum_{T, k \in T} V(T)/4 (\psi_{T,1} + \psi_{T,2} + \psi_{T,3} + \psi_{T,4})}{\sum_{T, k \in T} V(T)} .$$

où T, i est le i -ième sommet du tétraèdre T .

Dans ce cas, $\hat{\Delta}/\Delta$ est évalué à $(N_i)^{\frac{1}{3}}$ où N_i est le nombre de tétraèdres ayant pour sommet i .

- “Lissage local” + “clipping” appliqués à $c\Delta^2$.
- Option d’implémentation : minimisation des calculs $\Rightarrow c\Delta^2$ et les quantités $\hat{\psi}$ stockés par noeuds.