

# Réunion ANR ECINADS du 5 mai 2011, UM2

Bruno Koobus, Carine Moussaed

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier



# Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique
- 3 Mise en oeuvre du cas test du cylindre circulaire à Reynolds 20000 avec l'approche VMS-LES dynamique

# Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique
- 3 Mise en oeuvre du cas test du cylindre circulaire à Reynolds 20000 avec l'approche VMS-LES dynamique

## Solveur linéaire : option de base

On cherche à résoudre  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  où  $A$  est la matrice de discrétisation implicite des équations de Navier-Stokes.

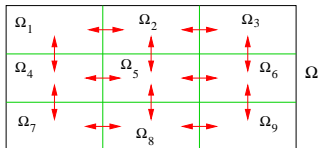
(par la suite  $D = \text{diagonale}(A)$ )

Option de base dans AIRONUM : après mise à l'échelle

(préconditionnement à gauche par  $D^{-1}$ ), **GMRES** preconditionné à droite par **Schwarz additif** avec résolution des problèmes locaux par **ILU(0)** :

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{f}$$

avec  $\mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T ((\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})|_{\Omega_i})^{-1} \mathbf{R}_i$  et  $((\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})|_{\Omega_i})^{-1} = (\mathbf{L}_i \mathbf{U}_i)^{-1}$



## Défaut, solutions considérées

- ⇒ **Mauvaise scalabilité** du solveur de base : dégradation du taux de convergence avec le nombre de sous-domaines
- ⇒ Introduire une ou plusieurs **grilles grossières**
- ⇒ Options considérées : preconditionnement par **déflation** ou **balancing**.

## Option A : Déflation

On cherche à résoudre  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Opérateurs de base :

- $\Phi_j$  = fonctions de base caractéristiques associées au sous-domaine  $\Omega_j$
- $\mathbf{Z}$  = opérateur de prolongement défini par  $\mathbf{Z}_{ij} = \Phi_j(\mathbf{x}_i)$
- $\mathbf{E} = \mathbf{Z}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z}$  = matrice grille grossière
- opérateurs de projection :
  - $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T$
  - $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$

Remarque pour preconditionnement à droite :

$$\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

# Option A : Déflation (precond. à droite)

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{u} + \mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{b} + \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{u}}$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}$$

$$\text{où } \mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T ((\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})_{|\Omega_i})^{-1} \mathbf{R}_i$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{v}} \text{ solution de } \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

## Option B : Balancing

On cherche à résoudre  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Opérateurs de base :

- $\Phi_j$  = fonctions de base caractéristique associée au sous-domaine  $\Omega_j$
- $\mathbf{Z}$  = opérateur de prolongement défini par  $\mathbf{Z}_{ij} = \Phi_j(\mathbf{x}_i)$
- $\mathbf{E} = \mathbf{Z}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z}$  = matrice grille grossière
- opérateurs de projection :
  - $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T$
  - $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$



## Option B : Balancing (precond. à droite)

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

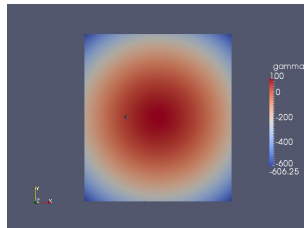
$$\Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{P}_B\mathbf{v}$$

$$\text{où } \mathbf{P}_B = \mathbf{Z}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Z}^T + \mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$$

$$\text{et } \mathbf{v} \text{ vérifie } \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_B\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

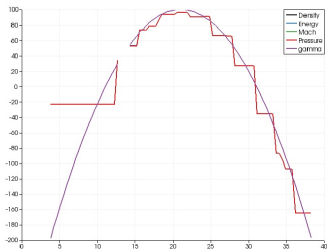
# Déflation et balancing : expériences

- Mise en oeuvre informatique des méthodes de déflation et balancing dans le code de calcul parallèle AIRONUM d'écoulements compressibles
- Expérimentation sur la résolution de  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  où  $\mathbf{A}$  est la matrice de discrétisation associée à un calcul turbulent (LES Smagorinsky) pour un temps donné et pour différents CFL (20, 100 et 1000) . Le second membre  $\mathbf{b}$  est choisi de sorte que la solution  $\mathbf{u}$  est un parabololoïde :

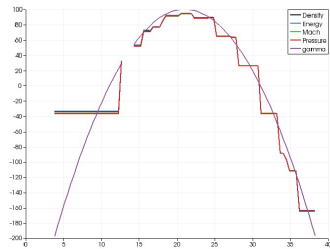


## Déflation et balancing : expériences

Solution  $\mathbf{u}_H$  du problème grossier (64 sous-domaines) :  
 $\mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{u}_H = \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$



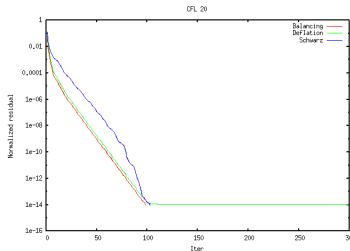
Coupe, CFL=20



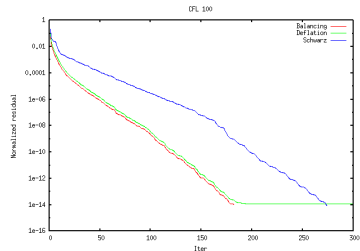
Coupe, CFL=1000

# Déflation et balancing : expériences

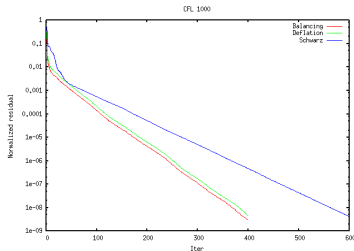
Convergence Schwarz additif, déflation et balancing (CFL 20, 100 et 1000) :



212,210, 9,36590e-08



202,726, 1,61824e-12



251,790, 1,22733e-06

# Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique**
- 3 Mise en oeuvre du cas test du cylindre circulaire à Reynolds 20000 avec l'approche VMS-LES dynamique

# Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique

- Développement d'une version VMS-LES (et LES) dynamique efficace en non structuré pour les modèles de sous-maille de Smagorinsky et WALE.
- Mise en oeuvre informatique de ces modèles dynamiques dans le logiciel de calcul parallèle AIRONUM d'écoulements compressibles en non structuré.
- Premières expérimentations et validations pour le cas test du cylindre circulaire à Reynolds 20000.
- Option "dynamique" utilisable dans l'approche hybride RANS/VMS-LES.

# L'approche VMS-LES dans AIRONUM

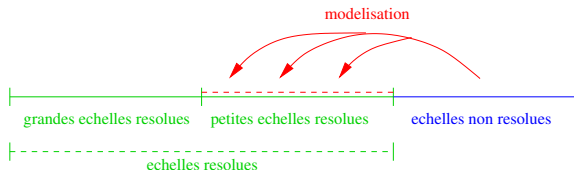
Extension du travail de Hughes et al. (2000, 2001, écoulements incompressibles + méthodes spectrales + turbulence homogène isotrope) pour pouvoir prendre en compte :

- les équations de **Navier-Stokes compressibles 3D**,
- des maillages **non structurés**,
- un modèle de discrétisation mixte **EF/VF**,
- des écoulements avec **détachements tourbillonnaires**.

(Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2004 et 2006.)

# Principales caractéristiques de l'approche VMS-LES

- **Construction** du modèle qui **repose sur la méthode de discrétisation spatiale** utilisée,
- Approche basée sur des **projections variationnelles** des équations de Navier-Stokes  $\Rightarrow$  **équations régissant des échelles différentes de la solution** (grandes échelles résolues, petites échelles résolues, et échelles non résolues),
- **Effets des échelles non résolues modélisés** dans les équations régissant les **petites échelles résolues, mais pas** dans les équations associées aux **grandes échelles résolues** :





## Version dynamique

**Motivation** : améliorer la prédiction du modèle VMS-LES (et LES) tout en préservant l'efficacité en non structuré.

Constante du modèle de sous-maille qui varie en temps et en espace (voir annexe pour les détails) :

- Smagorinsky :

- $\mu_{SGS}^{VMS} = \bar{\rho}(c_s \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) |S'|$

- $\mu_{SGS}^{LES} = \rho(c_s \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) |S|$

- WALE :

- $\mu_{SGS}^{VMS} = \bar{\rho}(c_w \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(S', S'^d)$

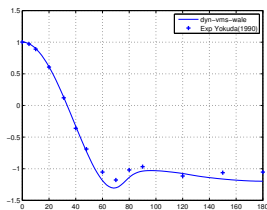
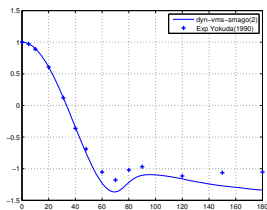
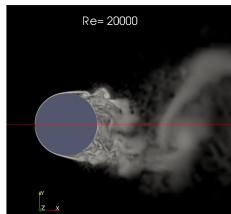
- $\mu_{SGS}^{LES} = \rho(c_w \Delta^2)(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(S, S^d)$

+ modification de la constante dynamique du modèle WALE afin de retrouver le comportement asymptotique correcte du modèle original à la paroi (Baya Toda *et al.*).

# Plan

- 1 Préconditionnement par déflation et balancing
- 2 Modélisation de la turbulence : VMS-LES dynamique
- 3 Mise en oeuvre du cas test du cylindre circulaire à Reynolds 20000 avec l'approche VMS-LES dynamique

# Cylindre Reynolds 20000



Maillage : 1.8 M de noeuds

# Cylindre Reynolds 20000

Simulation	$\overline{C_d}$	$C_{Lrms}$	$l_r$	$-\overline{Cp_b}$	$\theta_{sep}$	St
dyn. VMS Smagorinsky	1.296	0.563	0.852	1.336	86.24	0.186
dyn. VMS Wale	1.20	0.44	1.0733	1.197	84	0.191
Vms-LES-Wale (Computer & Fluids 2011)	1.27	0.60	0.80	1.09	86	0.19
Experiments (Norberg 2003,Basu 1985,Yokuda 1990)	[1.10-1.20]	[0.4-0.6]	-	[1.03-1.09]	-	0.194
LES (Salvatici 2003)	[0.94-1.28]	[0.17-0.65]	[0.7-1.4]	[0.83-1.38]	-	-

## Annexe : WALE dynamique

Notations :  $\bar{\mathbf{u}}$  = filtre de grille et  $\tilde{\mathbf{u}} = \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$  = filtre de Favre.

**Filtre de grille :**

Soit  $M_{ij} = \overline{\rho\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j} - \bar{\rho}u_i\tilde{u}_j$  le tenseur des contraintes de sous-maille.

On a :

$$M_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3}M_{pq}\delta_{ij} + \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij} = T_{ij} + \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij}$$

où le dernier terme est négligé à faible nombre de Mach,  $M_{ij} \approx T_{ij}$ .

On a  $M_{ij} \approx T_{ij} = -\mu_{SGS}\tilde{P}_{ij}$  avec

$$\tilde{P}_{ij} = -\frac{2}{3}\tilde{S}_{kk}S_{ij} + 2\tilde{S}_{ij}$$

où :

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

et où :

$$\mu_{SGS} = \bar{\rho}(c_W\Delta)^2 g(\tilde{\mathbf{u}}) \quad ; \quad g(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{(\tilde{S}_{ij}^d \tilde{S}_{ij}^d)^{\frac{3}{2}}}{(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{\frac{5}{2}} + (\tilde{S}_{ij}^d \tilde{S}_{ij}^d)^{\frac{5}{4}}}$$

avec :

$$\tilde{S}_{ij}^d = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{ij}^2 + \tilde{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3}\tilde{g}_{kk}^2 \quad ; \quad \tilde{g}_{ij}^2 = \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{kj} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{ij} = \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} .$$

## Annexe : WALE dynamique

**Filtre test :**

On pose :

$$M_{ij}^{test} = \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}} - (\hat{\rho})^{-1} \left( \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i}} \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_j}} \right) = -c \hat{\Delta}^2 \hat{\rho} g(\hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{P}}_{ij} .$$

On note que  $c = c_W^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij} &= M_{ij}^{test} - \hat{M}_{ij} = \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i \tilde{\mathbf{u}}_j}} - (\hat{\rho})^{-1} \left( \widehat{\overline{\rho \tilde{\mathbf{u}}_i}} \widehat{\overline{\rho \tilde{\mathbf{u}}_j}} \right) \\ L_{ij} &= \mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{L}_{kk} \delta_{ij} = (c \Delta^2) B_{ij} \end{aligned}$$

avec

$$B_{ij} = \widehat{\overline{\rho g(\tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{P}}_{ij}}} - \left( \frac{\hat{\Delta}}{\Delta} \right)^2 \hat{\rho} g(\hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{P}}_{ij}$$

L'inconnue est  $(c \Delta^2)$  qui doit satisfaire  $L_{ij} = (c \Delta^2) B_{ij}$ . Ce système de 6 equations a une inconnue est "résolu" par moindres carrés :

$$\begin{aligned} (c \Delta^2) \text{ minimise } Q &= (L_{ij} - (c \Delta^2) B_{ij})^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial (c \Delta^2)} = 0 &\Rightarrow (c \Delta^2) = \frac{L_{ij} B_{ij}}{B_{pq} B_{pq}} . \end{aligned}$$

N.B. Le "filtre test" choisi permet de déterminer  $\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}$ .

## Annexe : WALE dynamique

- Exemple de “filtre test” :

On définit pour une fonction  $\psi$  définie aux noeuds sa test-filtrée  $\hat{\psi}$  au noeud  $k$  par :

$$\hat{\psi}_k = \frac{\sum_{T, k \in T} V(T)/4 (\psi_{T,1} + \psi_{T,2} + \psi_{T,3} + \psi_{T,4})}{\sum_{T, k \in T} V(T)} .$$

où  $T, i$  est le  $i$ -ième sommet du tétraèdre  $T$ .

Dans ce cas,  $\hat{\Delta}/\Delta$  est évalué à  $(N_i)^{\frac{1}{3}}$  où  $N_i$  est le nombre de tétraèdres ayant pour sommet  $i$ .

- Lissage locale + clipping appliqué à  $c\Delta^2$ .