TD OFI. Logique - Ensembles Dénombrables. Année 1997.

1 Calcul propositionnel

exercice 1:

Montrer la règle du *modus ponens* : $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

- A l'aide des tables de vérité

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

- par résolution à l'aide des règles suivantes qui transforment:
  (1)$p \Rightarrow q$ en $\neg p \vee q$
  (2) $p \wedge Vrai$ en p
  (3) $p \vee \neg p$ en $Vrai$
  (4) $p \vee (q \wedge r)$ en $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  (5) $\neg(p \wedge q)$ en $\neg p \vee \neg q$
  (6) $\neg(p \vee q)$ en $\neg p \wedge \neg q$
  (7) $\neg\neg p$ en p

2 calcul des prédicats du premier ordre

exercice 2

- A t-on $\exists x \forall y R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$?
- A t-on $\forall y \exists x R(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y R(x,y)$?

Soit une famille d'ensembles A_i, pour $i \in [1..n]$, n fixé.
Soit R(x,i) la relation qui exprime $x \in A_i$

- Définir l'ensemble des éléments satisfaisant $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- Définir l'ensemble des éléments ne satisfaisant pas $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- Définir l'ensemble des éléments satisfaisant $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$
- Définir l'ensemble des éléments satisfaisant $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Montrer que $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Remarque: négation d'un prédicat sous forme prenexe
Un prédicat est dit sous forme prenexe s'il est de la forme $Q_1 x1 Q_2 x2 ... Q_n xn G(x1, ..., xn)$
avec $Q_i = \exists$ ou $\forall$, et G, formule sans combinateur.
La négation de ce prédicat donne : $Q'_1 x1 Q'_2 x2 ... Q'_n xn \neg G(x1, ..., xn)$
avec $Q'_i = \forall (resp \exists)$ si $Q_i = \exists (resp \forall)$

exercice 3
Soient H(x), M(x), A(x) des prédicats qui expriment respectivement "x est un homme", "x est mortel", "x est un ange".
Comment exprimer à l'aide du calcul des prédicats:
"Tous les hommes sont mortels"
"Tout homme mortel n'est pas un ange"
Que signifie le prédicat suivant
$\forall x, (H(x) \wedge \neg M(x)) \Rightarrow A(x)$

3 Ensembles dénombrables

exercice 4
Un ensemble est dénonbrable s'il existe une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des entiers $\mathcal{N}$.
Montrer en étudiant la fonction $f(x,y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ que $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ est dénombrable.

exercice 5
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini.

- Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.
  Supposons que $f : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{P}(\mathcal{E})$ est bijective.
  Déterminer l'ensemble des éléments de f qui n'appartiennent pas à leur ensemble image.
  Montrer que f n'est pas surjectif sur cet ensemble.
- Montrer que $\mid \mathcal{E} \mid < \mid \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid$
- $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ est-il dénombrable ?

exercice 1
Montrer la règle du *modus ponens* : $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

- A l'aide des tables de vérité

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1

- A l'aide de règles de décompositions
  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
  (1) donne $\neg[p \wedge (p \Rightarrow q)] \vee q$
  (1) donne $\neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee q$
  (5) donne $[\neg p \vee \neg(\neg p \vee q)] \vee q$
  (6) donne $[\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q$
  (4) donne $[(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$
  (3) et (2) donnent $\neg p \vee \neg q \vee q = True$

exercice 2

- Premier cas
  Si $\exists x \forall y R(x,y)$, On a pour un x_0, $\forall y R(x_0, y)$,
  ce qui implique forcément $\forall y \exists x R(x,y)$ en choisissant $x = x0$ quelque soit y.

- Deuxième cas Contre-exemple
  Dx=a,b, Dy=a,b R(a,a)=Vrai, R(a,b)=faux, R(b,a)=faux, R(b,b)=vrai
- Définir l'ensemble des éléments satisfaisant $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \,:\, x, \forall x \exists i R(x,i)$
- Définir l'ensemble des éléments ne satisfaisant pas $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \,:\, x, \neg\forall x \exists i R(x,i)$
- Définir l'ensemble des éléments satisfaisant $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \,:\, x, \neg\exists x \exists i R(x,i)$
- Définir l'ensemble des éléments satisfaisant $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \,:\, x, \forall x \forall i \neg R(x,i)$

exercice 3
"Tous les hommes sont mortels" : $\forall x H(x) \Rightarrow M(x)$
"Tout homme mortel n'est pas un ange" : $\forall x (H(x) \wedge M(x)) \Rightarrow \neg A(x)$
$\forall x, (H(x) \wedge \neg M(x)) \Rightarrow A(x)$: " Tout homme non mortel est un ange"

exercice 4
On montre que c'est une bijection. $f(x,y) = x + \sum_1^{x+y} i$
$\forall n, \exists$ un unique a tel que $\sum_1^a i \leq n < \sum_1^{a+1} i$
$x = n - \sum_1^{a+1} i$
y = a-x
exercice 5
Déterminer l'ensemble des éléments de f qui n'appartiennent pas à leur ensemble image : $A = \{x \mid x \notin f(x)\}$
$\exists a \in \mathcal{E}, f(a) = A$,
$f(a) \in A \Rightarrow a \in A$ et $a \notin f(a) = A$ contradiction.
f non surjective dont non bijective.

$f(x) = \{x\}$ injection et $\mid \mathcal{E} \mid < \mid \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid$

$\mathcal{N}$ dénombrable, il n'existe pas de bijections entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ n'est pas dénombrable.