Jeu des gendarmes et du voleur

Nicolas Nisse[1] Karol Suchan[2]

[1] MASCOTTE, INRIA, I3S, CNRS, UNS, Sophia Antipolis, France

[2] Universidad Adolfo Ibáñez, Santiago, Chili

JGA, 6 Novembre 2008

Capturer un voleur dans un graphe

- $\mathcal{C}$ joue avec une équipe de gendarmes
- $\mathcal{R}$ joue avec un voleur

But des gendarmes :

- $\mathcal{C}$: Capturer le voleur avec peu de gendarmes ;
- minimum : indice d'évasion, **cn**(G).

But du voleur:

- $\mathcal{R}$: échapper à beaucoup de gendarmes ;
- maximum : $\mathbf{cn}(G) - 1$.

Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

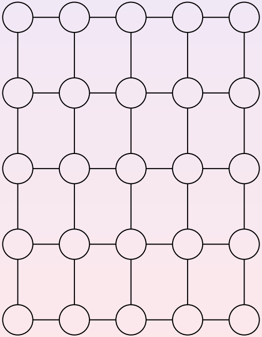
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

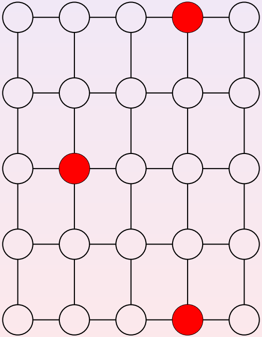
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

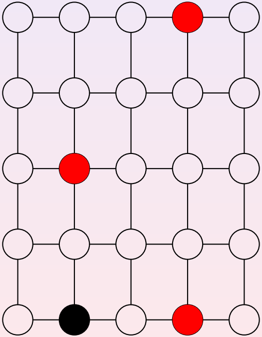
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

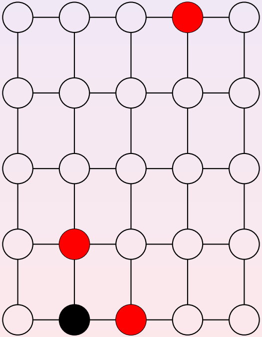
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

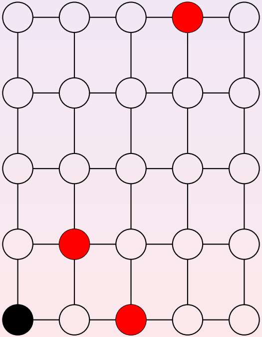
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

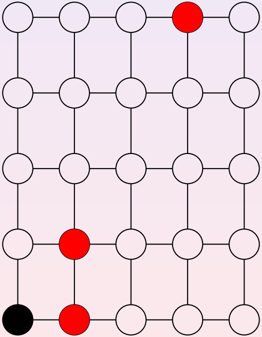
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Initialisation:

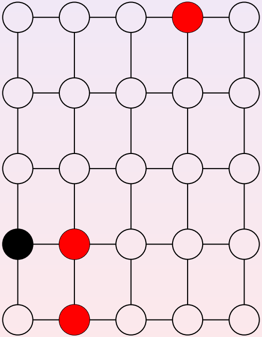
1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :

Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



Jeu des Gendarmes et du Voleur

[Nowakowski and Winkler; Quilliot, 83]

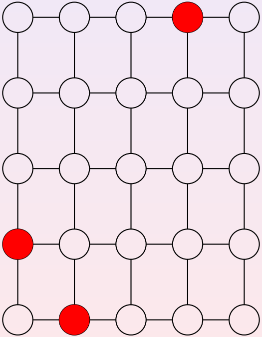
Initialisation:

1. $\mathcal{C}$ place les gendarmes;
2. $\mathcal{R}$ place le voleur.

Tour à tour:

- chaque gendarme traverse au plus 1 arête ;
- le voleur traverse au plus 1 arête.

Voleur capturé :
Lorsqu'un gendarme occupe le même sommet que le voleur.



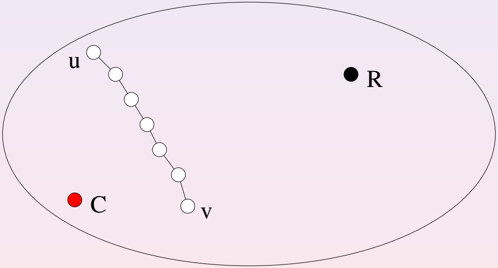
Etat de l'art

- **Characterisation** des graphes G tels que $\mathbf{cn}(G) = 1$.
  [Nowakowski & Winkler, 83; Quilliot, 83; Chepoi, 97]
- **Algorithmes :** $O(n^k)$ pour décider si $\mathbf{cn}(G) \leq k$.
  [Hahn & MacGillivray, 06]
- **Complexité :** Calculer l'indice d'évasion est EXPTIME-complet. [Goldstein & Reingold, 95]
- **Borne inférieure :** $\mathbf{cn}(G) \geq d^t$, avec
  $d + 1 =$ degré minimum, maille $\geq 8t - 3$. [Frankl, 87]
  ($\Rightarrow$ il existe des graphes G avec $\mathbf{cn}(G) \geq \Omega(\sqrt{n})$)
- **Graphes planaires** G : $\mathbf{cn}(G) \leq 3$.
  [Aigner & Fromme, 84]

Un outil important

Principe du plus court chemin

1 gendarme peut protéger 1 **plus court** chemin P.

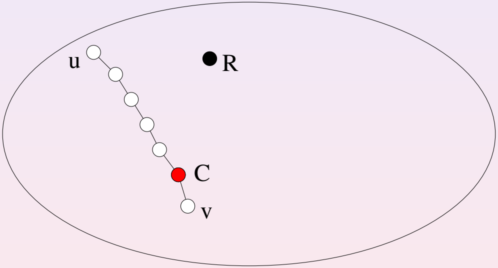


Après un nombre fini d'étapes, un gendarme protège l'ombre du voleur sur P.

Un outil important

Principe du plus court chemin

1 gendarme peut protéger 1 **plus court** chemin P.

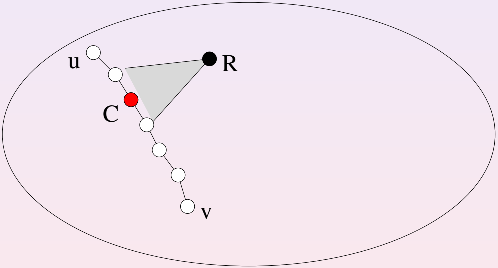


Après un nombre fini d'étapes, un gendarme protège l'ombre du voleur sur P.

Un outil important

Principe du plus court chemin

1 gendarme peut protéger 1 **plus court** chemin P.

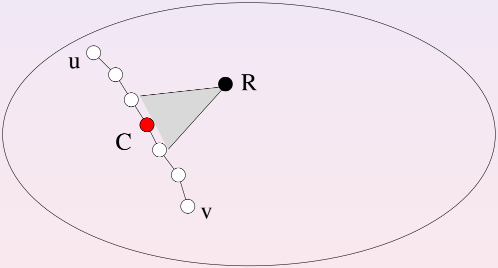


Après un nombre fini d'étapes, un gendarme protège l'ombre du voleur sur P.

Un outil important

Principe du plus court chemin

1 gendarme peut protéger 1 **plus court** chemin P.

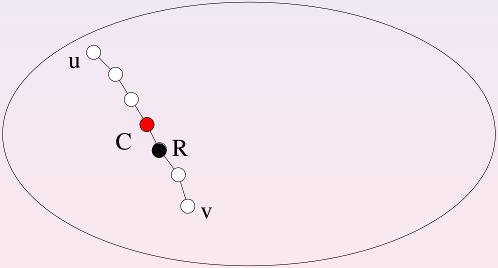


Après un nombre fini d'étapes, un gendarme protège l'ombre du voleur sur P.

Un outil important

Principe du plus court chemin

1 gendarme peut protéger 1 **plus court** chemin P.

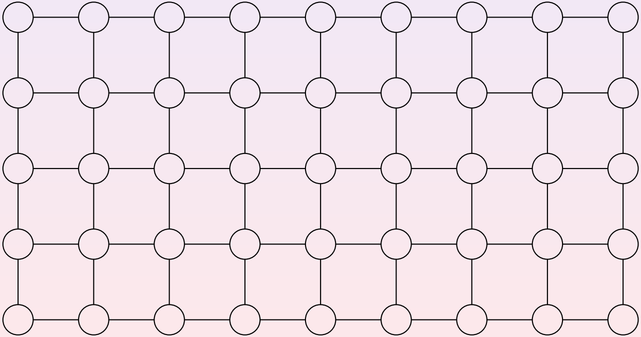


Après un nombre fini d'étapes, un gendarme protège l'ombre du voleur sur P.

Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

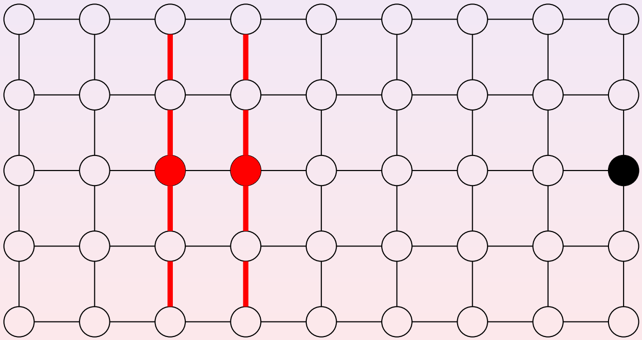
2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

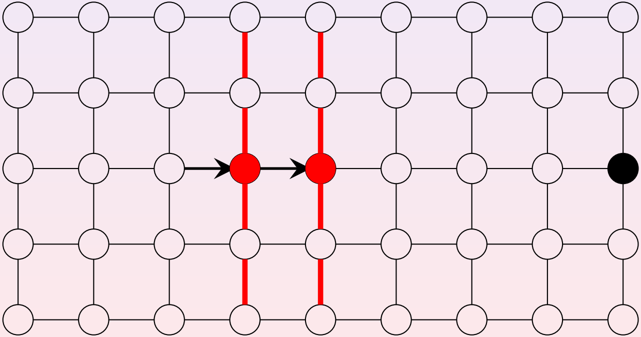
2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

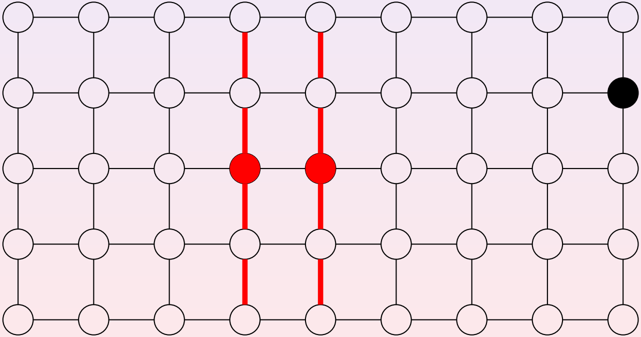
2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

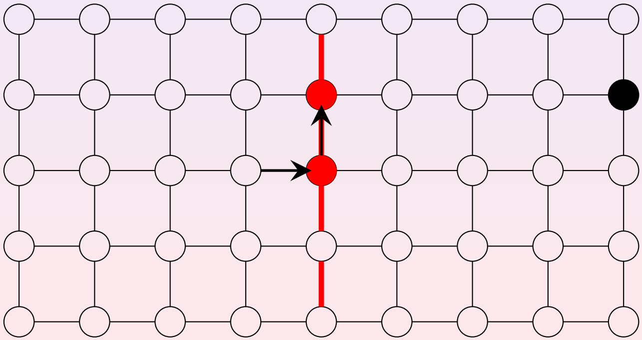
2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

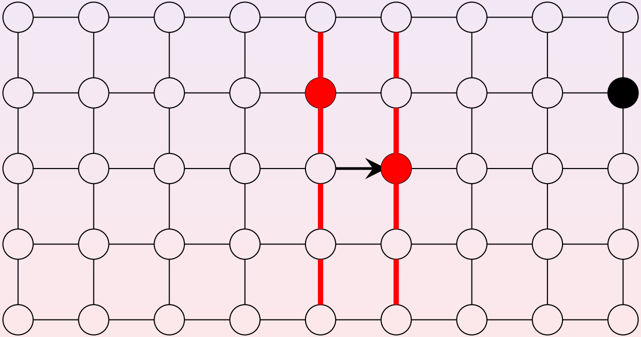
2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

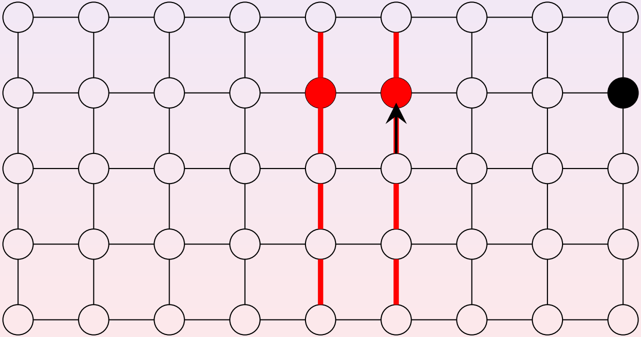
2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Graphes planaires [Aigner & Fromme, 84]

G planaire $\Rightarrow cn(G) \leq 3$; G grille $\Rightarrow cn(G) \leq 2$

2 plus courts chemins pour entourer, 3^{eme} pour réduire la zone.
Dans une grille, 1 plus court chemin suffisant pour entourer.



Applications du principe du plus court chemin

Graphes de genre borné

G de **genre** g: $cn(G) \leq \frac{3}{2}g + 3$ [Schröder, 01]

Graphes excluant un mineur

G **sans** H **comme mineur** : $cn(G) \leq |E(H \setminus \{x\})|$, avec x un sommet non isolé de H [Andreae, 86]

Borne supérieure générale

Pour tout graphe connexe G, $cn(G) \leq O(\frac{n}{\log n})$ [Chiniforooshan, 08]

Voleur rapide

Vitesses différentes

Vitesse = nombre maximum d'arêtes traversées en une étape.

$\textit{vitesse}_{\mathcal{R}} \geq \textit{vitesse}_{\mathcal{C}} = 1$

Complexité

Calculer **cn** pour toute $\textit{vitesse}_{\mathcal{R}} \geq 1$ est NP-difficile, et $W[2]$-difficile [Fomin, Golovach, Kratochvil, 2008]

Et dans les graphes planaires ?

Combien de gendarmes sont nécessaires pour capturer un voleur rapide dans une grille ?

Rappel : 2 suffisent si $\textit{vitesse}_{\mathcal{R}} = \textit{vitesse}_{\mathcal{C}}$.

Nos résultats ($vitesse_{\mathcal{R}} > vitesse_{\mathcal{C}}$) [WG'08]

Th : indice d'évasion non borné dans les graphes planaires

$\exists c > 0 \forall k \geq 1$: pour toute grille $f(k) \times f(k)$, $f(k) = c^{k^2}$, alors $\mathbf{cn}(Carre_{f(k)}) \geq k$.

Corollaire : $\mathbf{cn}(Carre_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$.
Gap : meilleure borne supérieure $\mathbf{cn}(Carre_n) = O(n)$.

Beaucoup de gendarmes pour un graphe planaire contenant une large grille ?

Théorème : Non...

$\exists H$ subdivision d'une grille arbitrairement grande : $\mathbf{cn}(H) = 2$.

Théorème : Mais...

$\forall H$ planaire avec $Carre_{2f(k)}$ sous-graphe induit, $\mathbf{cn}(H) \geq k$.

Nos résultats ($vitesse_{\mathcal{R}} > vitesse_{\mathcal{C}}$) [WG'08]

Th : indice d'évasion non borné dans les graphes planaires

$\exists c > 0 \forall k \geq 1$: pour toute grille $f(k) \times f(k)$, $f(k) = c^{k^2}$, alors $\mathbf{cn}(Carre_{f(k)}) \geq k$.

Corollaire : $\mathbf{cn}(Carre_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$.
Gap : meilleure borne supérieure $\mathbf{cn}(Carre_n) = O(n)$.
Beaucoup de gendarmes pour un graphe planaire contenant une large grille ?

Théorème : Non...

$\exists H$ subdivision d'une grille arbitrairement grande : $\mathbf{cn}(H) = 2$.

Théorème : Mais...

$\forall H$ planaire avec $Carre_{2f(k)}$ sous-graphe induit, $\mathbf{cn}(H) \geq k$.

Nos résultats ($vitesse_{\mathcal{R}} > vitesse_{\mathcal{C}}$) [WG'08]

Th : indice d'évasion non borné dans les graphes planaires

$\exists c > 0 \forall k \geq 1$: pour toute grille $f(k) \times f(k)$, $f(k) = c^{k^2}$, alors $\mathbf{cn}(Carre_{f(k)}) \geq k$.

Corollaire : $\mathbf{cn}(Carre_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$.
Gap : meilleure borne supérieure $\mathbf{cn}(Carre_n) = O(n)$.
Beaucoup de gendarmes pour un graphe planaire contenant une large grille ?

Théorème : Non...

$\exists H$ subdivision d'une grille arbitrairement grande : $\mathbf{cn}(H) = 2$.

Théorème : Mais...

$\forall H$ planaire avec $Carre_{2f(k)}$ sous-graphe induit, $\mathbf{cn}(H) \geq k$.

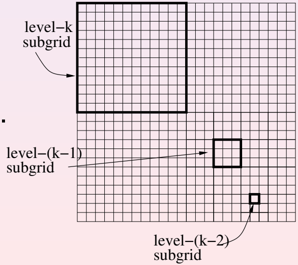
Idée de la preuve, $\mathbf{cn}(Carre_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$

Definition par induction (sur k) d'une stratégie pour le voleur contre k gendarmes : $c_1, c_2, \cdots, c_k$

Principale idée

$\forall i \leq k$, partition G en sous-grilles disjointes de taille $O(2^i)$
$\Rightarrow$ Dans une sous-grille de niveau i, prendre en compte uniquement $c_1, c_2, \cdots, c_i$

Dans une sous-grille de niveau i, une stratégie est un chemin de grilles de niveau $(i-1)$ évitant c_i.



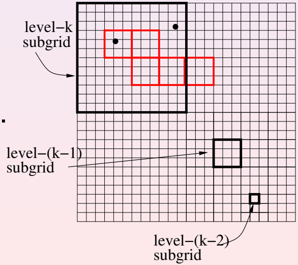
Idée de la preuve, $\mathbf{cn}(Carre_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$

Definition par induction (sur k) d'une stratégie pour le voleur contre k gendarmes : $c_1, c_2, \cdots, c_k$

Principale idée

$\forall i \leq k$, partition G en sous-grilles disjointes de taille $O(2^i)$
$\Rightarrow$ Dans une sous-grille de niveau i, prendre en compte uniquement $c_1, c_2, \cdots, c_i$

Dans une sous-grille de niveau i, une stratégie est un chemin de grilles de niveau $(i-1)$ évitant c_i.



Idée de la preuve, $\mathbf{cn}(Carre_n) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$

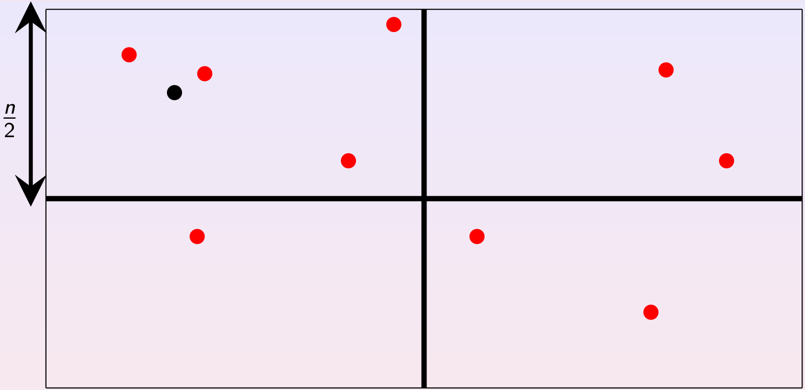
Definition par induction (sur k) d'une stratégie pour le voleur contre k gendarmes : $c_1, c_2, \cdots, c_k$

Principale idée

$\forall i \leq k$, partition G en sous-grilles disjointes de taille $O(2^i)$
$\Rightarrow$ Dans une sous-grille de niveau i, prendre en compte uniquement $c_1, c_2, \cdots, c_i$

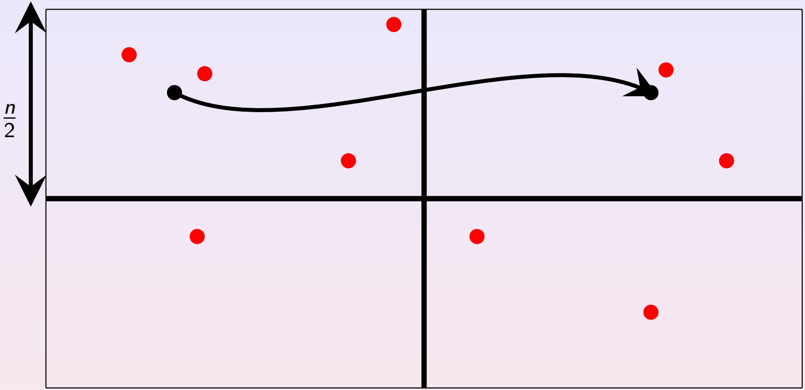
1. Description d'une stratégie
2. Constraintes sur n pour que cette stratégie soit valable.
3. si $n = f(k) = c^{k^2} \Rightarrow$ contraintes satisfaites.

Stratégie du voleur : vue d'ensemble



Grille de côté n divisée en 4 sous-grilles.

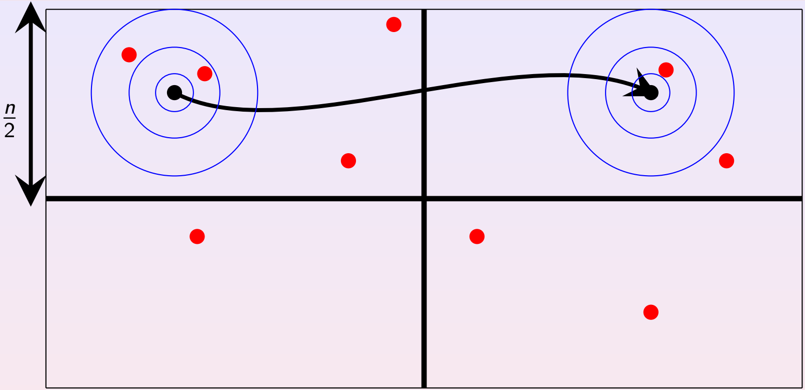
Stratégie du voleur : vue d'ensemble



Grille de côté n divisée en 4 sous-grilles.

Passer d'une position dans une sous-grille
à une position dans une sous-grille adjacente.

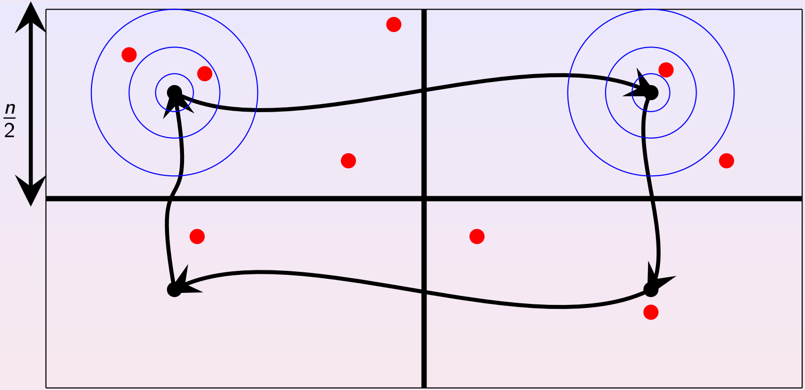
Stratégie du voleur : vue d'ensemble



Grille de côté n divisée en 4 sous-grilles.

Passer d'une position sûre dans une sous-grille
à une position sûre dans une sous-grille adjacente.

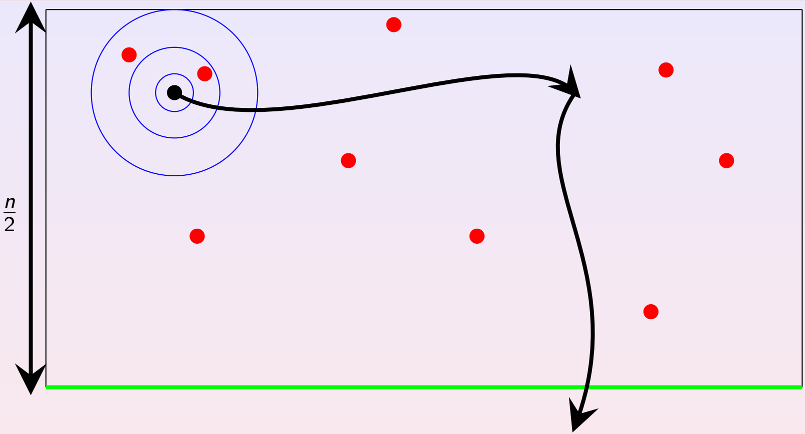
Stratégie du voleur : vue d'ensemble



Grille de côté n divisée en 4 sous-grilles.

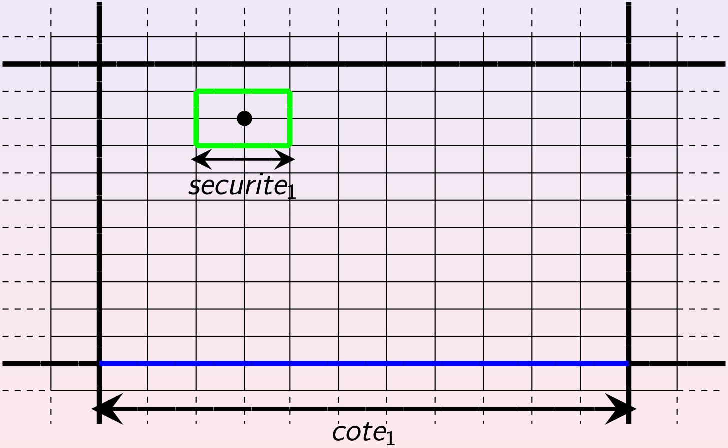
Passer d'une position sûre dans une sous-grille
à une position sûre dans une sous-grille adjacente.

Stratégie du voleur : principe



Commencer d'une position *sûre* dans une sous-grille
Aller vers *un côté* dans une position sûre.

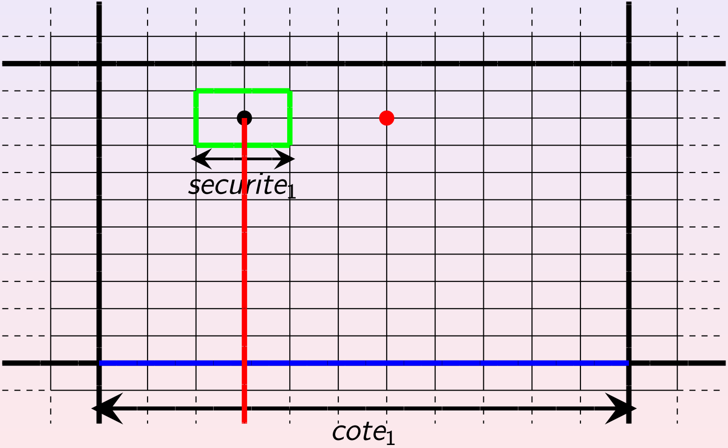
Stratégie du voleur : Induction $k = 1$



Stratégie pour aller d'une position sûre vers le côté bleu

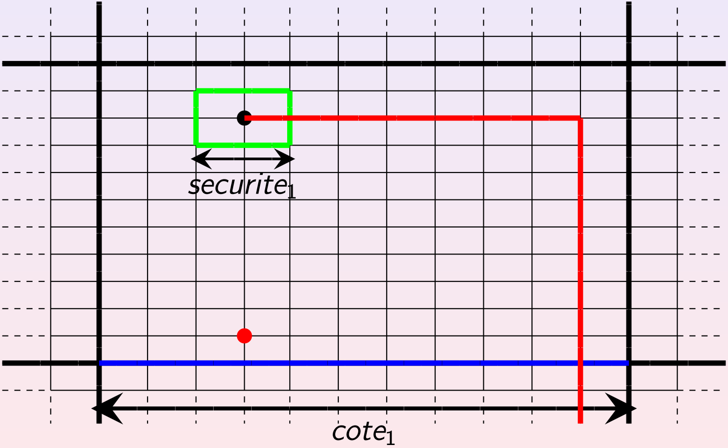
Stratégie du voleur : Induction $k = 1$

Cas 1 : foncer



Stratégie pour aller d'une position sûre vers le côté bleu

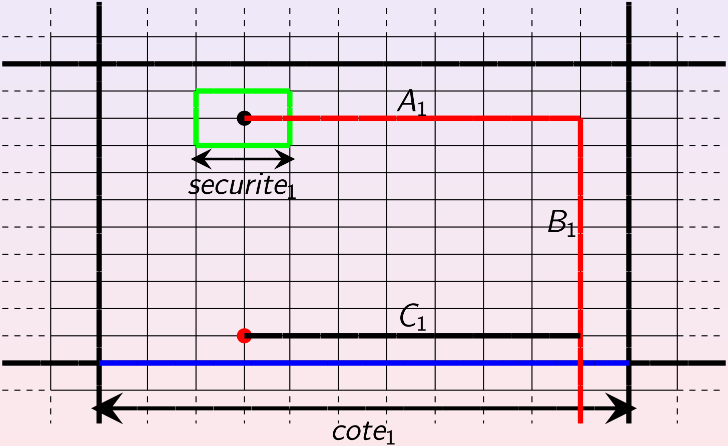
Case 2: detour



Stratégie pour aller d'une position sûre vers le côté bleu

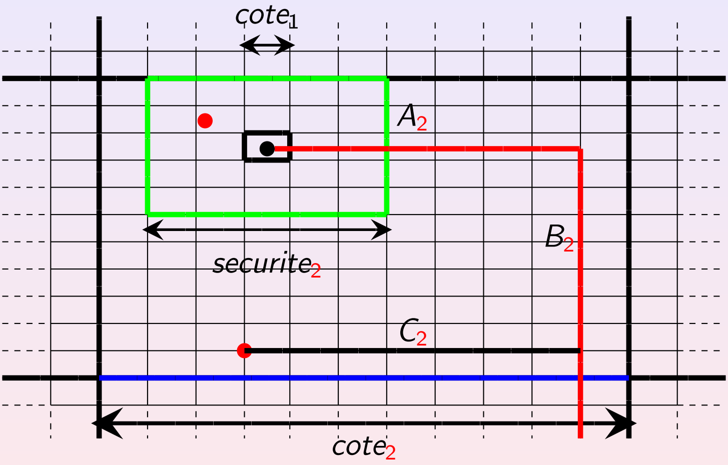
Stratégie du voleur : Induction $k = 1$

Case 2: detour



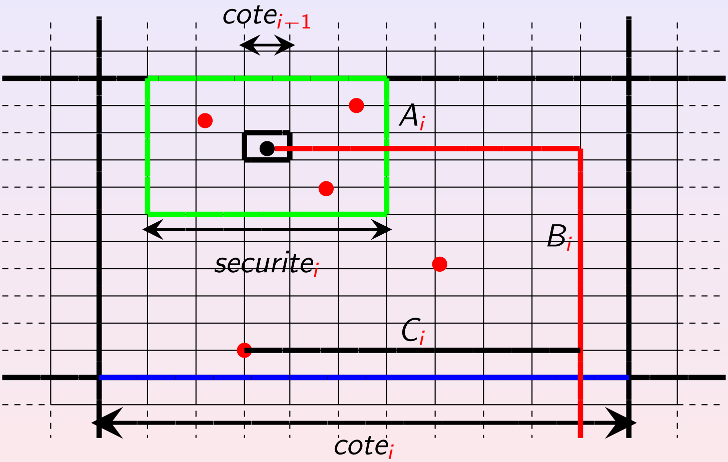
$$\frac{A_1+B_1}{vitesse_0} < C_1 - \frac{securite_1}{2} \ \& \ temps_1 = \frac{A_1+B_1}{vitesse_0}.$$

Stratégie du voleur : Induction $k = 2$



$$(A_2 + B_2)temps_1 < C_2 - \frac{securite_2}{2} \ \& \ temps_2 = temps_1(A_2 + B_2).$$

Stratégie du voleur : Induction $k = i$



$$(A_i + B_i)temps_{i-1} < C_i - \frac{securite_i}{2} \;\&\; temps_i = temps_{i-1}(A_i + B_i).$$

Constraintes imposées par la stratégie

3 variables: $cote_i$, $A_i + B_i \approx detour_i$ et $securite_i$

Soient $zoom_i = cote_i / cote_{i-1}$, $vitesse_i = cote_i / temps_i$, et $temps_i = (zoom_i + detour_i) temps_{i-1}$.

4 inegalités : $\forall i \in [1..k]$

$securite_i \geq \lceil \frac{4 + vitesse_{i-1}}{vitesse_{i-1} - 1} \rceil$

$detour_i/2 \geq \lceil \frac{(2 * securite_i + 2) vitesse_{i-1}}{vitesse_{i-1} - 1} \rceil$

$detour_i/2 + 2 * securite_i + 1 < zoom_i/2$

$vitesse_i > 1$

$\exists a, b > 0$, inegalités satisfaites pour $zoom_i = ab^i$

$\Rightarrow f(k) = cote_k = cote_0 * \prod_{1 \leq i \leq k} zoom_i = O(a^k * b^{k(k+1)/2})$

Relations d'ordre dans les graphes

Graph searching: vitesse arbitraire, Gendarmes et voleur bougent simultanément

Nécessité de "beaucoup" de gendarmes
$\Leftrightarrow$ "large" grille mineur.
[Robertson, Seymour, Thomas, 94]

Si un graphe planaire G *"contient"* une grille de côté n,
$\mathbf{cn}(G) \geq g(n)$?

Relations d'ordre dans les graphes

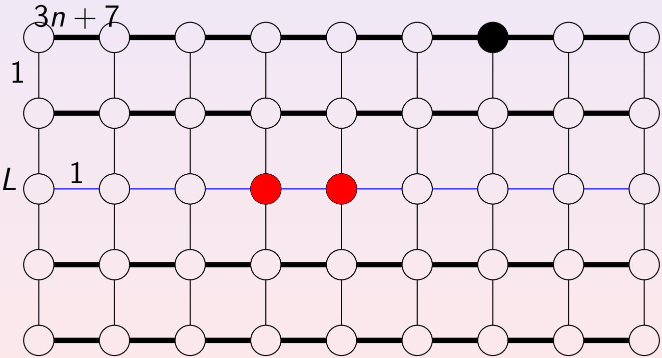
Graph searching: vitesse arbitraire, Gendarmes et voleur bougent simultanément

Nécessité de "beaucoup" de gendarmes
$\Leftrightarrow$ "large" grille mineur.
[Robertson, Seymour, Thomas, 94]

Si un graphe planaire G *"contient"* une grille de côté n,
$\mathbf{cn}(G) \geq g(n)$?

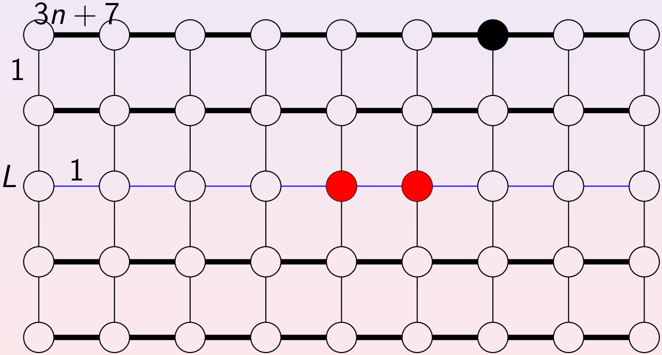
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = 2$



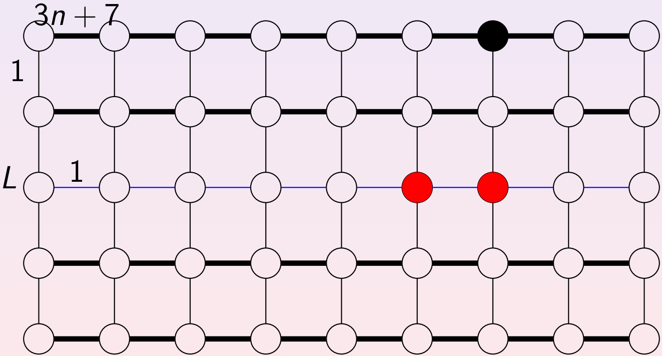
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = 2$



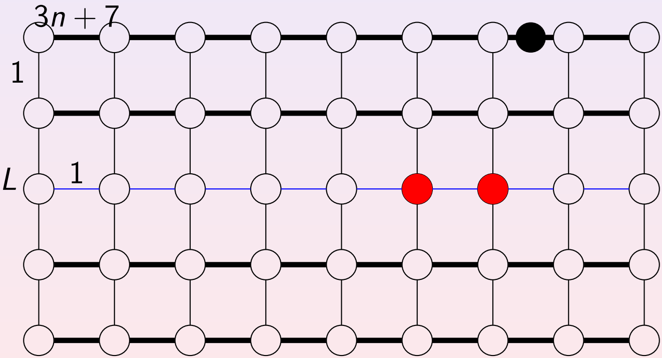
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = 2$



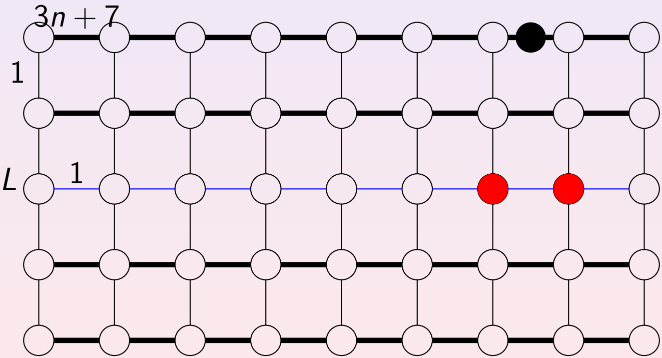
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = 2$



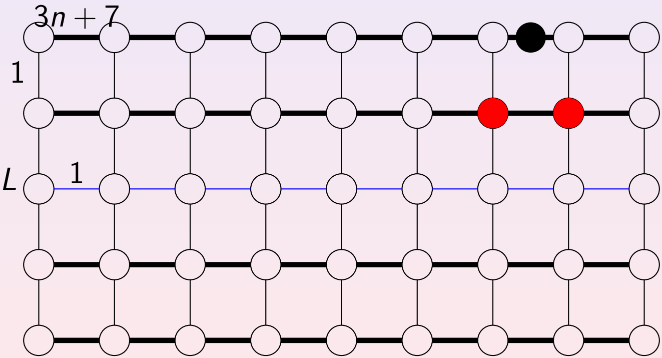
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = 2$



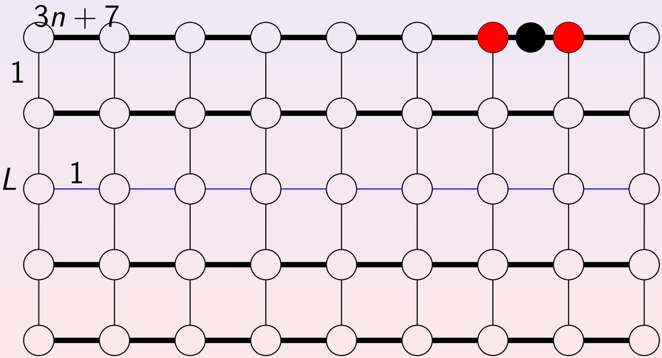
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H)=2$



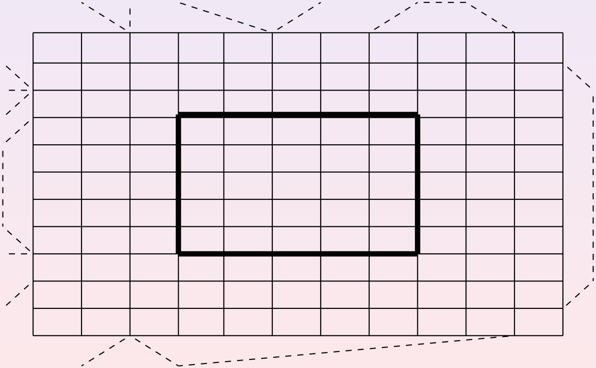
Subdivision peut diminuer l'indice d'évasion

Toute arête horizontale, sauf L, divisée en $3n+7$ arêtes. Les gendarmes utilisent L comme raccourci. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = 2$



Large grille comme sous-graphe induit

H planaire contient $Carre_{2n}$ comme sous-graphe induit. Le voleur reste sur $Carre_n$. $\Rightarrow$ $\mathbf{cn}(H) = \Omega(\sqrt{\log(n)})$



Perspectives

Si $vitesse_{\mathcal{R}} = vitesse_{\mathcal{C}} = 1$

- G de **genre** $g \Rightarrow \mathbf{cn}(G) \leq \frac{3}{2}g + 3$. [Schröder, 01]
  Conjecture: G de genre $g \Rightarrow \mathbf{cn}(G) \leq g + 3$.
- Borne supérieure générale cn ?
  pour tout graphe connexe G, $cn(G) \leq O(\frac{n}{\log n})$.
  [Chiniforooshan, 08]
  Conjecture: $cn(G) \leq O(\sqrt{n})$.
  Lien avec Δ (degré maximum)?

Si $vitesse_{\mathcal{R}} > vitesse_{\mathcal{C}}$

- $\Omega(\sqrt{\log(n)}) \leq \mathbf{cn}(Carre_n) \leq O(n)$.
  Valeur exacte ?
- Autres classes de graphes ?