Des Petites Étiquettes pour Vérifier la Connexité dans des Classes de Graphes de Largeur de Clique Non Bornée

Mamadou Moustapha Kanté

LaBRI, Université Bordeaux 1, CNRS.

06 Novembre 2008
JGA 2008 (Nice)

INTRODUCTION

- Dans certains réseaux, par exemple Internet, chaque noeud peut être amené à vérifier, localement, s'il existe un chemin entre lui et un autre noeud.
- Localement = A partir de sa connaissance du réseau.
- Une solution consiste à stocker tout le réseau dans chaque noeud.
- Mais cette dernière n'est pas satisfaisante:
  - Les réseaux sont en général de grande taille et pour des raisons d'espace on ne peut pas stocker tout le graphe dans chaque noeud.
  - Le nombre de requêtes est en général important et nous voulons chaque réponse rapidement.

INTRODUCTION

- Dans certains réseaux, par exemple Internet, chaque noeud peut être amené à vérifier, localement, s'il existe un chemin entre lui et un autre noeud.
- Localement = A partir de sa connaissance du réseau.
- Une solution consiste à stocker tout le réseau dans chaque noeud.
- Mais cette dernière n'est pas satisfaisante:
  - Les réseaux sont en général de grande taille et pour des raisons d'espace on ne peut pas stocker tout le graphe dans chaque noeud.
  - Le nombre de requêtes est en général important et nous voulons chaque réponse rapidement.
- Solution Assigner à chaque noeud une étiquette, aussi petite que possible, et vérifier l'existence de chemins entre deux noeuds en regardant seulement leurs étiquettes.

INTRODUCTION

- Si le graphe est statique, chaque noeud garde le numéro de sa composante connexe.
- Chaque étiquette est de taille logarithmique (le nombre de bits qu'il faut pour représenter un nombre).
- Vérifier si deux noeuds sont reliés par un chemin se fait en comparant leurs étiquettes. Cette vérification se fait en temps logarithmique.
- Malheureusement, les réseaux dans la vie réelle ne sont pas statiques.
- On peut perdre des noeuds et/ou des liens et des noeuds et/ou des liens peuvent être ajoutés au réseau et ce à tout moment.
- Nous nous intéressons au cas où on peut seulement perdre des noeuds et des liens.

Plan

PLAN

f-étiquetage

Soient G un graphe avec n sommets et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante. Un *f-étiquetage* de G est une fonction injective $J : V_G \to \{0, 1\}^*$ tel que $|J(x)| \leq f(n)$.
Soient $\mathcal{C}$ une famille de graphes et $P(x_1, \ldots, x_m, Y_1, \ldots, Y_q)$ une propriété de graphes. Un *f-étiquetage pour P sur $\mathcal{C}$* est couple d'algorithmes $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$:

- $\mathcal{A}$ construit un f-étiquetage J_G pour tout G dans $\mathcal{C}$.
- Pour tous sommets $a_1, \ldots, a_m$ et tous sous-ensembles de sommets $W_1, \ldots, W_q$, $\mathcal{B}$ vérifie si $P(a_1, \ldots, a_m, W_1, \ldots, W_q)$ est vrai dans G en utilisant que $J_G(a_1), \ldots, J_G(a_m)$ et $J_G(W_1), \ldots, J_G(W_q)$.

Requête de connexité

Requête de connexité

Soit G un graphe et soient x et y deux sommets de G. Si X est un sous-ensemble de $V_G - \{x, y\}$ et F un sous-ensemble de E_G, nous notons $Conn_G(x, y, X, F)$ la propriété qui exprime si x et y sont connectés par un chemin dans $(G \backslash X) - F$.

Objectif

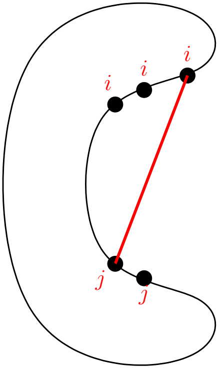
Nous voulons un log-étiquetage pour $Conn(x, y, X) = Conn(x, y, X, \emptyset)$.

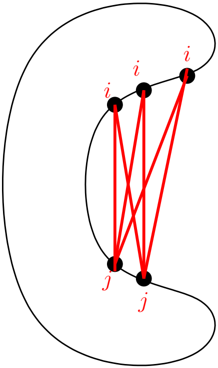
Largeur de clique

- La largeur de clique est définie à partir d'opérations de graphes.
- Les graphes sont orientés ou non.
- Un k-graphe = chaque sommet a une et une seule couleur dans $\{1, \ldots, k\}$.
- Plusieurs sommets peuvent avoir la même couleur.
- Une seule opération binaire: $\oplus$ = union disjointe de k-graphes.
- $G \oplus G \neq G$.

Largeur de clique (Opérations unaires)

- *$add_{i,j}(G)$* est le k-graphe obtenu à partir de G en ajoutant des arêtes entre les sommets colorés i et les sommets colorés j.

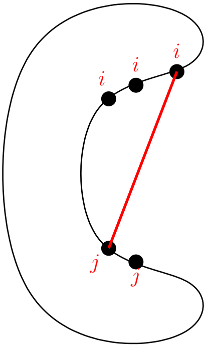




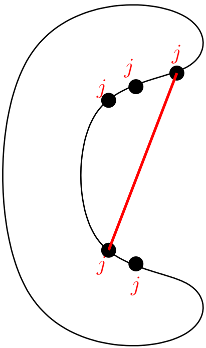
G $\qquad\qquad$ $H = add_{i,j}(G)$

Largeur de Clique (Opérations Unaires)

- $add_{i,j}(G)$ est le k-graphe obtenu à partir de G en ajoutant des arêtes entre les sommets colorés i et les sommets colorés j.
- $ren_{i\to j}(G)$ est le k-graphe obtenu à partir de G en renommant la couleur i en j. Il n'y a plus de sommets étiquetés i dans $ren_{i\to j}(G)$.



G



$H = ren_{i\to j}(G)$

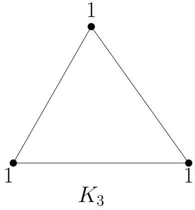
LARGEUR DE CLIQUE (OPÉRATIONS UNAIRES)

- $add_{i,j}(G)$ est le k-graphe obtenu à partir de G en ajoutant des arêtes entre les sommets colorés i et les sommets colorés j.
- $ren_{i \to j}(G)$ est le k-graphe obtenu à partir de G en renommant la couleur i en j. Il n'y a plus de sommets étiquetés i dans $ren_{i \to j}(G)$.
- k-Basic graphes sont les k-graphes avec un seul sommet: (**i** for $i \in [k]$).

DÉFINITION

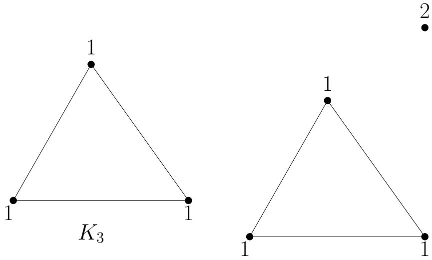
La largeur de clique d'un graphe G, que l'on note $cwd(G)$, est le plus petit k tel que G est construit à partir des k-basic graphes en utilisant les opérations $\oplus$, $add_{i,j}$ et $ren_{i \to j}$, $i, j \in [k]$.

- Les cliques ont une largeur de clique égale à 2:



EXEMPLES

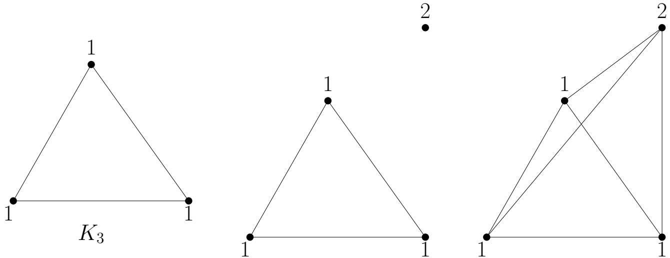
- Les cliques ont une largeur de clique égale à 2:



K_3 $\qquad$ $K_3 \oplus \mathbf{2}$

Exemples

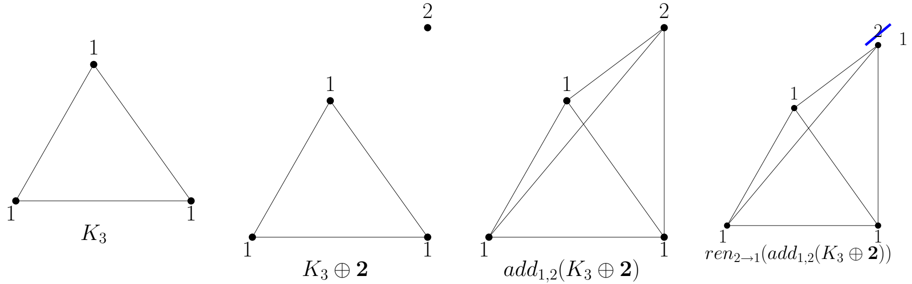
- Les cliques ont une largeur de clique égale à 2:



K_3 $\quad$ $K_3 \oplus \mathbf{2}$ $\quad$ $add_{1,2}(K_3 \oplus \mathbf{2})$

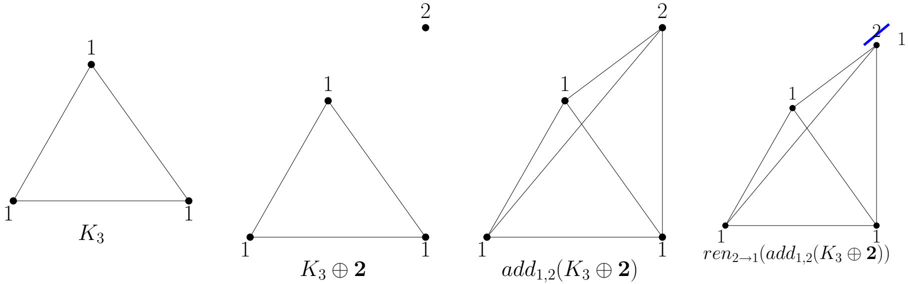
EXEMPLES

- Les cliques ont une largeur de clique égale à 2:



Exemples

- Les cliques ont une largeur de clique égale à 2:



- Les graphes distance héréditaires ont une largeur de clique ≤ 3.
- $cwd(G) \leq 3 \cdot 2^{twd(G)-1}$.

RAPPELS

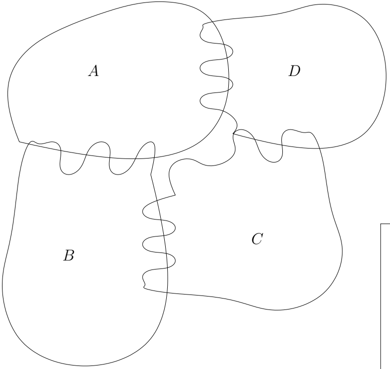
- Courcelle et Vanicat ont montré que si P est définissable en MSOL alors elle admet un log-étiquetage dans les classes de graphes qui ont une largeur de clique bornée.
- Mais beaucoup de graphes n'ont pas une largeur de clique bornée: les graphes planaires, les graphes d'intervalle par exemple.
- Si P est une propriété définissable en FOL alors elle admet un log-étiquetage dans les classes de graphes localement cwd-décomposable (Courcelle-Gavoille-Kanté).
- Localement cwd-décomposable = on peut couvrir en temps polynomial le graphe avec des sous-graphes qui ont une largeur de clique bornée et se touchent sur peu de sommets.
- On peut citer les graphes planaires ou les graphes d'intervalle unitaire comme classes de graphes localement cwd-décomposable.

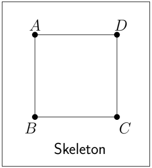
RAPPELS

- La requête de connexité n'est pas définissable en FOL, donc le résultat sur localement cwd-décomposable ne peut être utilisée.
- Courcelle et al. ont montré qu'il existe un log-étiquetage pour la requête de connexité dans les planaires.
- Nous allons montrer comment l'étendre à d'autres classes de graphes = celles obtenues par combinaisons planaires de graphes de largeur de clique bornée.

Motivation: Réseaux construits en combinant plusieurs types de graphes

- A,B,C,D ont une largeur de clique $\leq k$.
- Un skeleton planaire
- Un skeleton de degré borné (intersections limitées).
- Nous voulons combiner les log-étiquetages de A,B,C,D et du skeleton.
- Concrètement ...





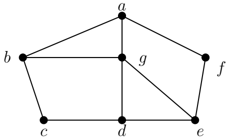
Plan

$\mathcal{H}$-E-DÉCOMPOSITION

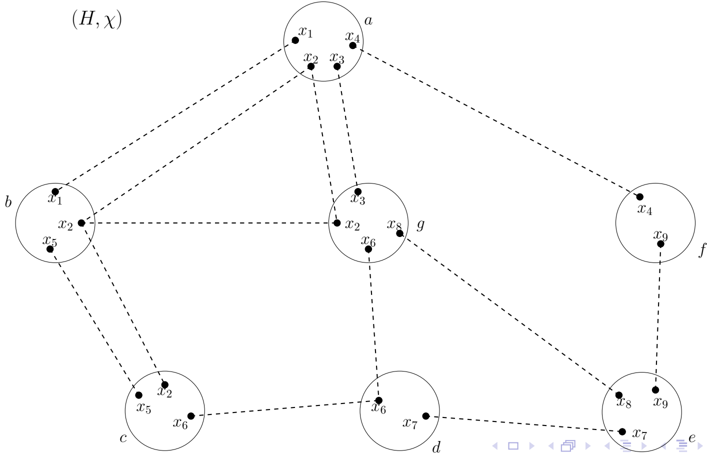
Soit $\mathcal{H}$ une classe de graphes. Une $\mathcal{H}$-e-décomposition d'un graphe G est un couple (H, χ):

- $H \in \mathcal{H}$ et $\chi : 2^{V_G} \rightarrow V_H$.
- $\bigcup_{u \in V_H} \chi(u) = V_G$.
- $G[\chi(u)]$ est un sous-graphe connexe de G.
- Si uv est une arête de H alors $\chi(u) \cap \chi(v) = \emptyset$.
- Pour toute arête xy de G alors il existe u, un sommet de H, tel que $x, y \in \chi(u)$.
- Pour tout sommet x de G le sous-graphe $H[\{u \mid x \in \chi(u)\}]$ est connexe.

EXEMPLE DE $\mathcal{H}$-E-DÉCOMPOSITION

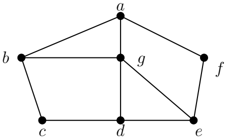


(H, χ)

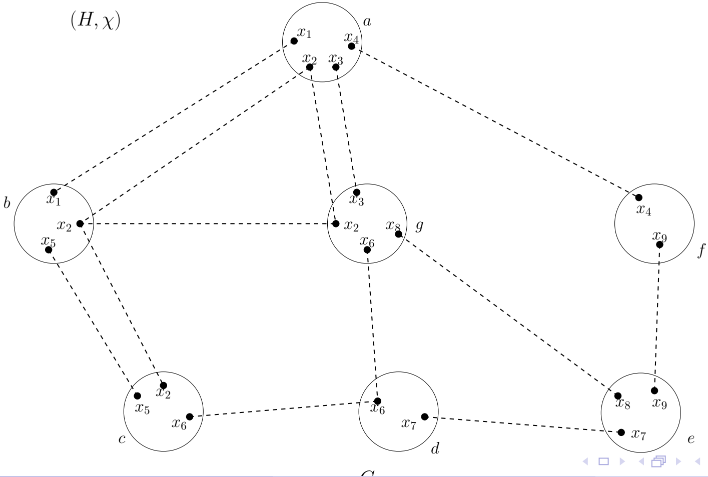


- Pour tout $u \in V_H$ on note $sh(u) := \left| \chi(u) \cap \left(\bigcup_{v \in V_H, v \neq u} \chi(v) \right) \right|$.

$\mathcal{H}$-E-WIDTH



(H, χ)



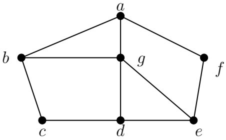
$\mathcal{H}$-E-WIDTH

- Pour tout $u \in V_H$ on note *sh*$(u) := \left| \chi(u) \cap \left(\bigcup_{v \in V_H, v \neq u} \chi(v) \right) \right|$.
- La $\mathcal{H}$-e-séparation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max\{sh(u) \mid u \in V_H\}$.

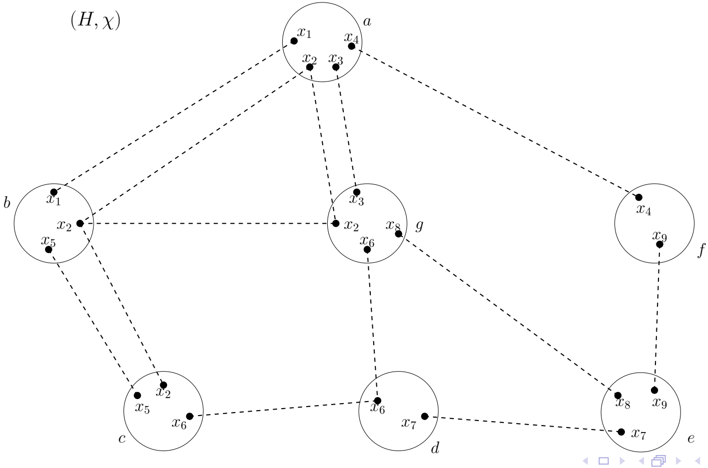
$\mathcal{H}$-E-WIDTH

- Pour tout $u \in V_H$ on note $sh(u) := \left|\chi(u) \cap \left(\bigcup_{v \in V_H, v \neq u} \chi(v)\right)\right|$.
- La $\mathcal{H}$-e-séparation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max\{sh(u) \mid u \in V_H\}$.
- La $\mathcal{H}$-e-propagation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max_{x \in V_G} \left|\{u \in V_H \mid x \in \chi(u)\}\right|$.

$\mathcal{H}$-E-WIDTH



(H, χ)



G

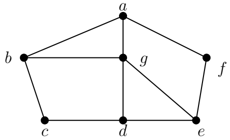
$\mathcal{H}$-E-WIDTH

- Pour tout $u \in V_H$ on note $sh(u) := \left|\chi(u) \cap \left(\bigcup_{v \in V_H, v \neq u} \chi(v)\right)\right|$.
- La $\mathcal{H}$-e-séparation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max\{sh(u) \mid u \in V_H\}$.
- La $\mathcal{H}$-e-propagation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max_{x \in V_G} \left|\{u \in V_H \mid x \in \chi(u)\}\right|$.
- La $\mathcal{H}$-e-largeur d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition est le maximum entre la $\mathcal{H}$-e-propagation et la $\mathcal{H}$-e-séparation.

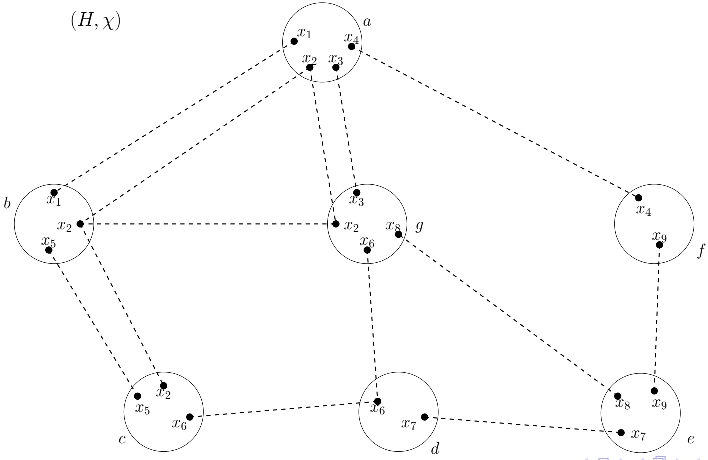
$\mathcal{H}$-E-WIDTH

- Pour tout $u \in V_H$ on note $sh(u) := \left|\chi(u) \cap \left(\bigcup_{v \in V_H, v \neq u} \chi(v)\right)\right|$.
- La $\mathcal{H}$-e-séparation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max\{sh(u) \mid u \in V_H\}$.
- La $\mathcal{H}$-e-propagation d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) est $\max_{x \in V_G} \left|\{u \in V_H \mid x \in \chi(u)\}\right|$.
- La $\mathcal{H}$-e-largeur d'une $\mathcal{H}$-e-décomposition est le maximum entre la $\mathcal{H}$-e-propagation et la $\mathcal{H}$-e-séparation.
- La $\mathcal{H}$-e-largeur d'un graphe G est le minimum $\mathcal{H}$-e-largeur sur toutes les $\mathcal{H}$-e-décompositions.

$\mathcal{H}$-E-WIDTH

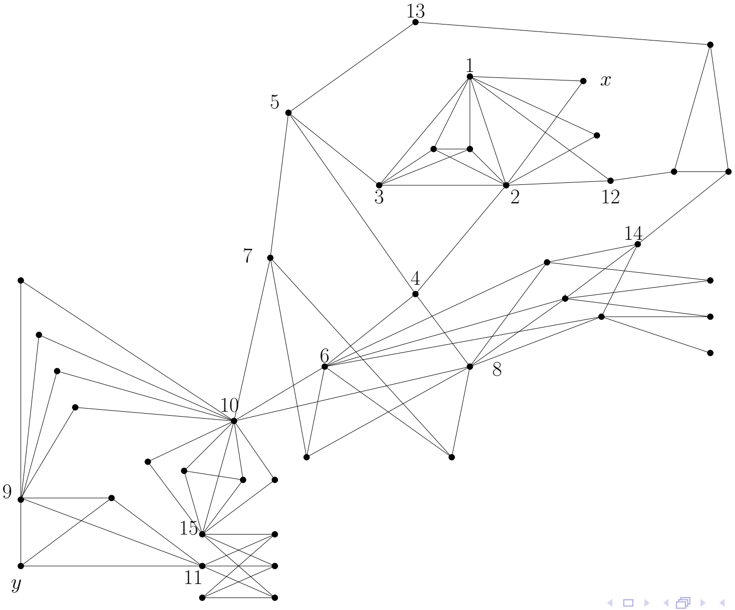


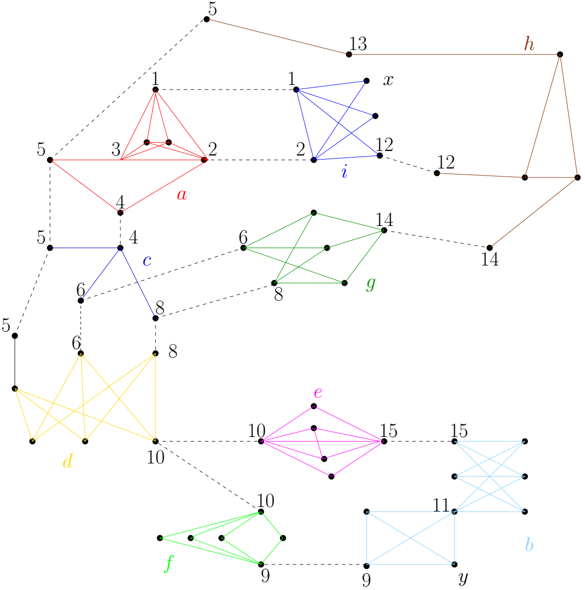
(H, χ)



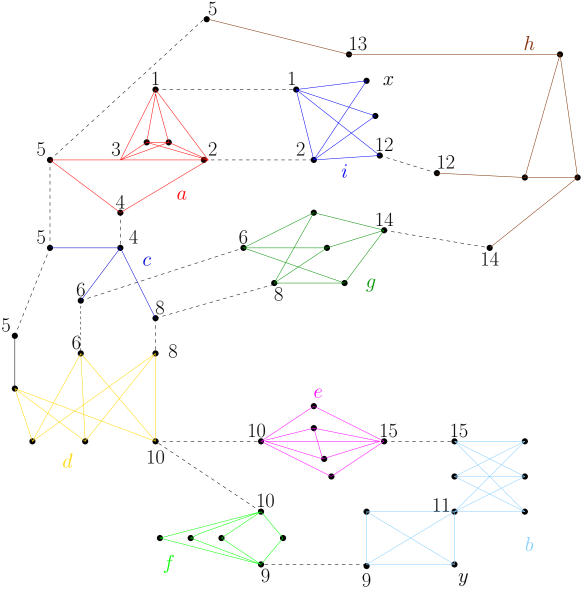
- On construit un graphe $eSkl_{(H,\chi)}$ à partir de (H, χ).
- Le graphe consiste à remplacer chaque noeud de H par une étoile avec comme feuilles les sommets partagés.
- Pour garder la planarité, les sommets partagés sont dupliqués autant que nécessaires.
- Concrètement:
  - Pour tout noeud u de H on note $C(u)$ l'ensemble $\bigcup_{v \in N_H(u)} \{c_1(u,v), \ldots, c_{sh(u,v)}(u,v)\}$.
  - L'ensemble des sommets de $eSkl_{(H,\chi)}$ est l'ensemble $\bigcup_{u \in V_H} (\{u\} \cup C(u))$.
  - Si uv est une arête de H, alors on met une arête entre $c_i(u,v)$ et $c_j(v,u)$ si $c_i(u,v)$ et $c_j(v,u)$ représentent le même sommet de G.
  - On met une arête entre u et les $c_i(u,v)$.
  - Par l'exemple . . .

eSKELETON

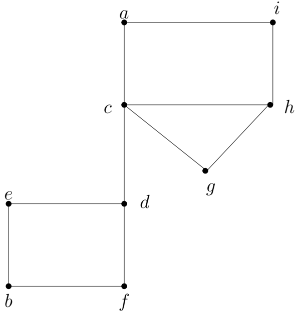



5
13
h
1
1
x
5
3
2
2
12
12
i
a
4
5
4
14
6
c
14
g
6
8
8
5
6
8
e
10
15
15
d
10
10
11
b
f
9
9
y

ESKELETON

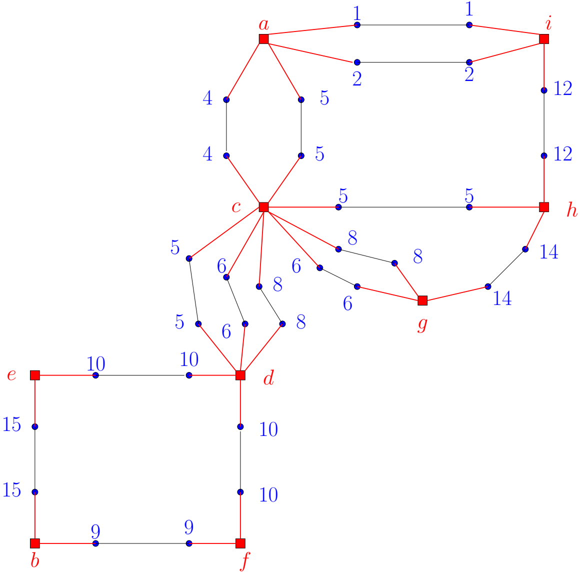


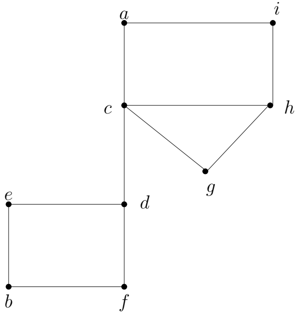
5
13
h
1
1
x
5
3
2
2
12
12
i
a
4
5
4
6
14
c
14
6
g
8
8
5
6
8
e
10
15
15
d
10
10
11
b
f
9
9
y



a
i
c
h
g
e
d
b
f

ESkeleton


a
1
1
i
2
2
4
5
12
4
5
12
c
5
5
h
5
6
8
6
8
14
8
6
14
5
6
8
g
e
10
10
d
15
10
15
10
9
9
b
f


a
i
c
h
e
d
g
b
f

Quelques Propriétés

- Si H est planaire alors $eSkl_{(H,\chi)}$ l'est aussi.
- Si la $\mathcal{H}$-e-largeur de G est au plus ℓ alors H est de degré max au plus ℓ^2.
- Le nombre de sommets du graphe $eSkl_{(H,\chi)}$ est borné par $\ell^3 \cdot n$.

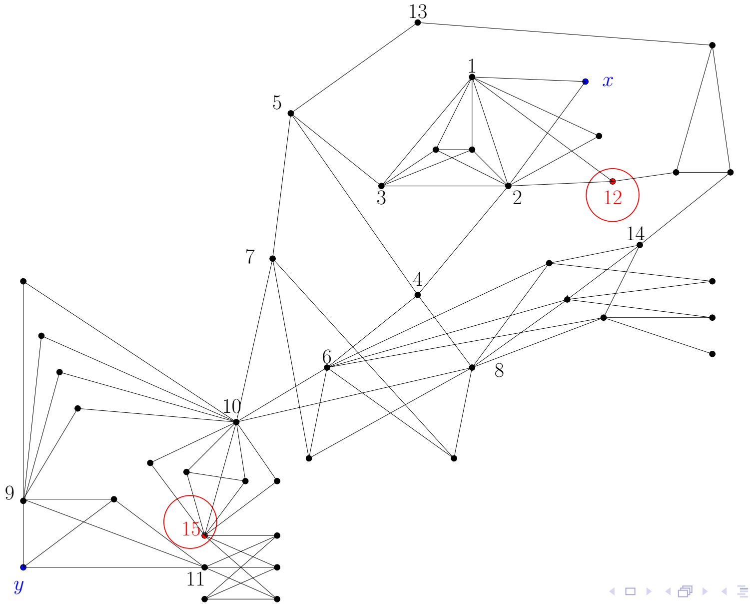
Plan

1. Définitions
2. $\mathcal{H}$-e-Décomposition
3. log-Étiquetage

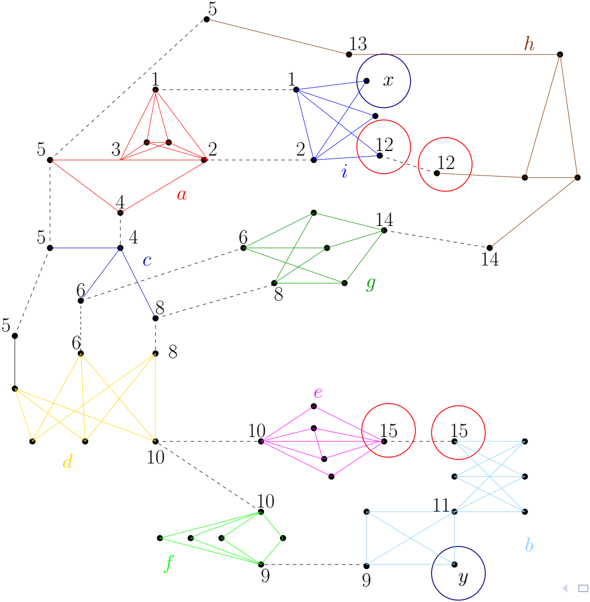
log-ÉTIQUETAGE POUR $\mathcal{H}$-E-LARGEUR BORNÉ

- Supposons que (H, χ) est une $\mathcal{H}$-e-décomposition d'un graphe G avec les contraintes suivantes:
  - Pour tout noeud u dans H on a $cwd(G[\chi(u)]) \leq k$.
  - H est planaire.
  - (H, χ) est de $\mathcal{H}$-e-largeur au plus ℓ.
- Alors G admet un log-étiquetage pour $Conn(x, y, X)$ (la requête de connexité avec possibilité de suppressions de sommets).
- Nous allons combiner les log-étiquetage des graphes de largeur de clique bornée et des planaires.
- L'idée principale c'est pour tout couple de sommets (x, y) et tout ensemble de sommets X, construire un graphe $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$ tel que:
  - le nombre de sommets de $eSkl_{(H,\chi)}$ est borné par $|X|$.
  - x et y sont reliés par un chemin dans $G \backslash X$ si et seulement si x et y sont connectés par un chemin dans $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$.
- Les étiquettes doivent permettre de construire ce graphe.

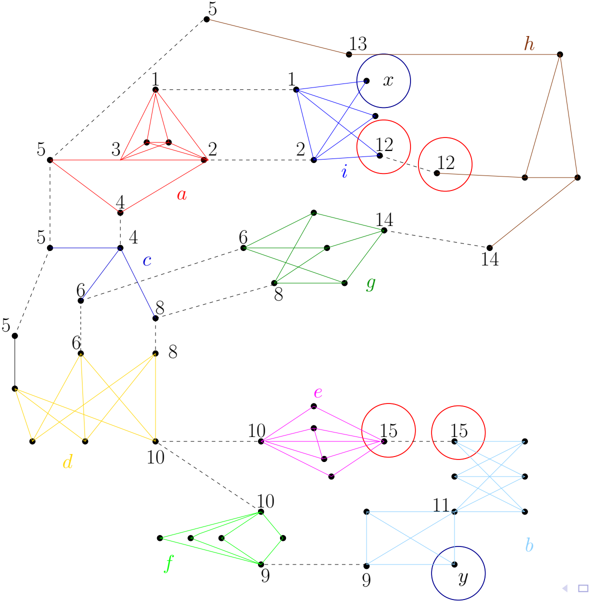
Le graphe $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: Par un exemple

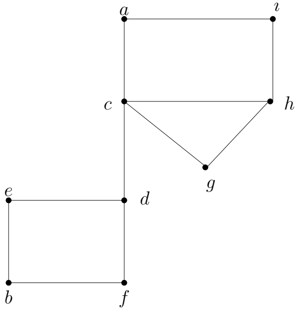


LE GRAPHE $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: PAR UN EXEMPLE

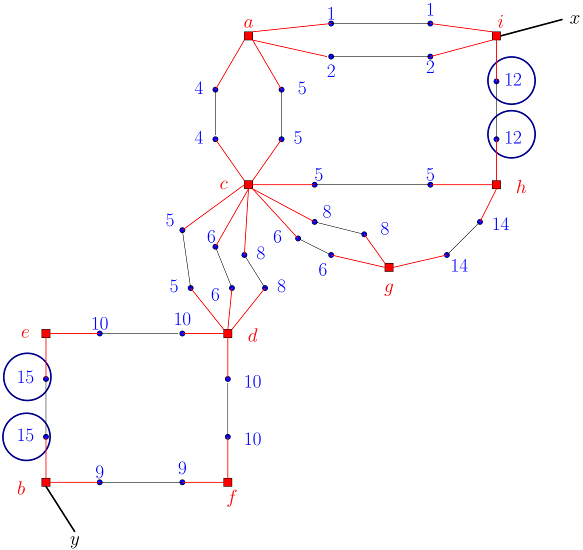


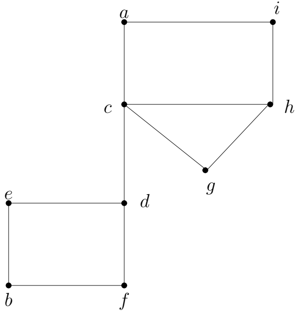
LE GRAPHE $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: PAR UN EXEMPLE





LE GRAPHE $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: PAR UN EXEMPLE





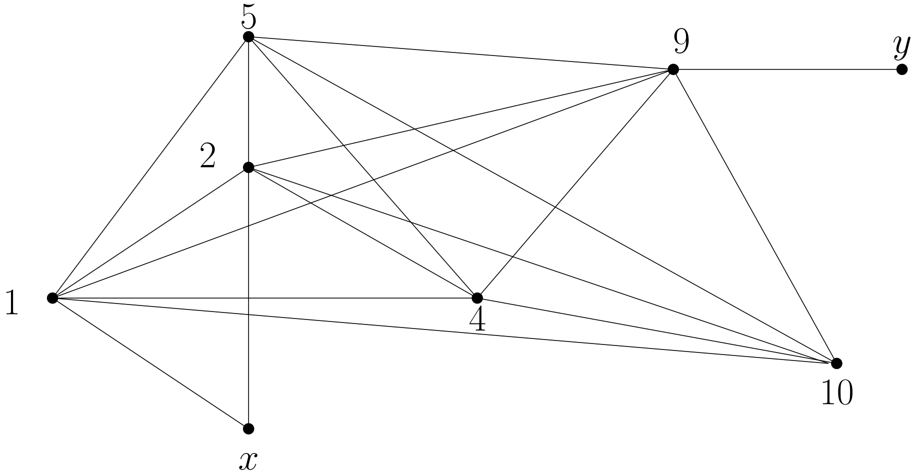
LE GRAPHE $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: PAR UN EXEMPLE

- Les sommets partagés sont appelés sommets d'articulation. Le bloc i a $1, 2$ et 12 comme sommets d'articulation.
- Un bloc est problématique pour X s'il intersecte X.
- Les sommets de $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$ sont les sommets d'articulation des blocs problématiques pour $X \cup \{x, y\}$ ainsi que les sommets d'articulation des blocs qui intersectent les blocs problématiques.
- Dans notre exemple, les sommets sont: $x, 1, 2, 5, 4, y, 9$ et 10.

LE GRAPHE $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: PAR UN EXEMPLE

- Les sommets partagés sont appelés sommets d'articulation. Le bloc i a $1, 2$ et 12 comme sommets d'articulation.
- Un bloc est problématique pour X s'il intersecte X.
- Les sommets de $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$ sont les sommets d'articulation des blocs problématiques pour $X \cup \{x, y\}$ ainsi que les sommets d'articulation des blocs qui intersectent les blocs problématiques.
- Dans notre exemple, les sommets sont: $x, 1, 2, 5, 4, y, 9$ et 10.
- On a 3 types d'arêtes:
  - Les arêtes entre x et les sommets d'articulation dans $G[\chi(u)]\backslash X$ si $x \in \chi(u)$. De même pour y. Une telle arête signifie l'existence de chemins entre x et ces derniers dans $G[\chi(u)]\backslash X$.
  - Les arêtes entre deux sommets d'articulations z et t dans $G[\chi(u)]\backslash X$ si z et t sont dans $G[\chi(u)]$. Ces arêtes signifient l'existence de chemins entre z et t dans $G[\chi(u)]\backslash X$.
  - les arêtes entre deux sommets d'articulation dans $eSlk_{(H,\chi)}\backslash X$. Ces arêtes signifient qu'il y a un chemin entre deux sommets d'articulation qui ne passent pas par un bloc problématique.

LE GRAPHE $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$: PAR UN EXEMPLE



log-ÉTIQUETAGE

- Pour construire le graphe, nous avons besoin:
  - des sommets d'articulation des blocs problématiques,
  - mais aussi des sommets d'articulation des blocs qui intersectent les blocs problématiques,
  - nous devons aussi pouvoir vérifier l'existence de chemins dans $eSkl_{(H,\chi)}$ et aussi dans chaque bloc.

log-ÉTIQUETAGE

- Pour construire le graphe, nous avons besoin:
  - des sommets d'articulation des blocs problématiques,
  - mais aussi des sommets d'articulation des blocs qui intersectent les blocs problématiques,
  - nous devons aussi pouvoir vérifier l'existence de chemins dans $eSkl_{(H,\chi)}$ et aussi dans chaque bloc.
- Notre étiquetage consiste à combiner 2 étiquetages:
  - On construit un log-étiquetage J_u dans chaque bloc u. Ceci est possible car chaque bloc a une largeur de clique bornée.
  - On construit un log-étiquetage K pour le graphe $eSkl_{(H,\chi)}$, qui est planaire (Courcelle et al.).

log-ÉTIQUETAGE

- Pour construire le graphe, nous avons besoin:
  - des sommets d'articulation des blocs problématiques,
  - mais aussi des sommets d'articulation des blocs qui intersectent les blocs problématiques,
  - nous devons aussi pouvoir vérifier l'existence de chemins dans $eSkl_{(H,\chi)}$ et aussi dans chaque bloc.
- Notre étiquetage consiste à combiner 2 étiquetages:
  - On construit un log-étiquetage J_u dans chaque bloc u. Ceci est possible car chaque bloc a une largeur de clique bornée.
  - On construit un log-étiquetage K pour le graphe $eSkl_{(H,\chi)}$, qui est planaire (Courcelle et al.).
- Pour chaque sommet x on lui donne les étiquettes suivantes:
  - toutes les étiquettes $J_u(x)$ tel que x est dans $\chi(u)$ ainsi que les étiquettes des sommets d'articulation dans u.
  - Je lui donne également les étiquettes des sommets d'articulations des blocs qui intersectent u.
- On peut vérifier que l'on peut construire le graphe $eSkl_{(H,\chi)}(x, y, X)$ à partir des étiquettes de x, y et de X.

$K_{3,3}$-MINOR FREE GRAPHS

- Si G est $K_{3,3}$-minor, il existe un ensemble d'arêtes M tel:
  - $|M| \leq \frac{2}{3}(n-2)$.
  - La contraction des arêtes donne un graphe planaire $G(M)$.
- Si G est de degré au plus d, on peut transformer $G(M)$ en une $\mathcal{H}$-e-décomposition (H, χ) telle que:
  - Chaque bloc a au plus 4 sommets.
  - La $\mathcal{H}$-e-propagation de (H, χ) est au plus $2d$.
- Donc nous avons un log-étiquetage pour $Conn(x, y, X)$ dans les $K_{3,3}$-minor free de degré borné.

PERSPECTIVES

- Mieux comprendre ces décompositions et exhiber des classes de graphes qui ont une $\mathcal{P}$-e-décomposition de $\mathcal{P}$-e-largeur bornée.
- Nous notons que les H-minor free graphes ont une $\mathcal{P}$-e-décomposition avec une $\mathcal{P}$-e-séparation bornée mais pas la $\mathcal{P}$-e-propagation (Wood-Telle 07).
- Regarder d'autres propriétés.

Perspectives

- Mieux comprendre ces décompositions et exhiber des classes de graphes qui ont une $\mathcal{P}$-e-décomposition de $\mathcal{P}$-e-largeur bornée.
- Nous notons que les H-minor free graphes ont une $\mathcal{P}$-e-décomposition avec une $\mathcal{P}$-e-séparation bornée mais pas la $\mathcal{P}$-e-propagation (Wood-Telle 07).
- Regarder d'autres propriétés.

Questions ?