Quelques variations du jeu de domination sur les chemins

Adrien Guignard

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

Novembre 2008

Plan de l'exposé

1. Présentation du jeu de domination
   - Enoncé et propriétés de base
   - Un exemple simple
2. Etude du jeu de domination classique sur tous les chemins
3. Quelques variantes du jeu initial
   - Définitions
   - Etude et résolution
   - Tableau récapitulatif des résultats
   - Exemples
4. Conclusion, perspectives et références

Enoncé du jeu de domination

Marquage des nœuds d'un graphe par deux joueurs

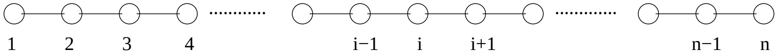
1. Jeu combinatoire impartial à deux joueurs (mêmes règles pour les 2 joueurs A et B, jeu à tour de rôle, pas de hasard)
2. Un coup consiste à choisir un sommet et le supprimer ainsi que ses voisins ;
3. Le premier joueur ne pouvant plus jouer est déclaré perdant.

On en déduit que les **options** de G sont des sous-graphes de G :

$$O(G) = \{G[V(G) \backslash N_G^+(x)] \ , \ x \in V(G)\}$$

Nous nous limiterons à l'étude des chemins P_n. On a :

$$O(P_n) = \{P_{n-2}, P_{n-3}, P_i \cup P_j \ , \ i + j = n - 3\}$$



Le chemin P_n

Un exemple simple : P_{10}

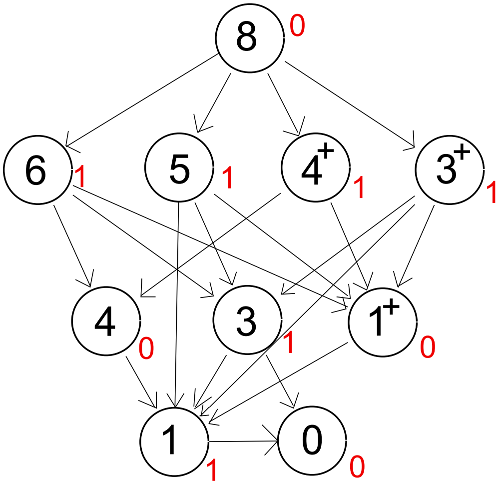
1. Alice peut-elle gagner sur P_{10} ?
2. Quelle stratégie doit-elle adopter pour y arriver ?

On ecrit l'expression des options du chemin considéré :

$$O(P_{10}) = \{P_8, P_7, P_6 \cup P_1, P_5 \cup P_2, P_4 \cup P_3\}$$

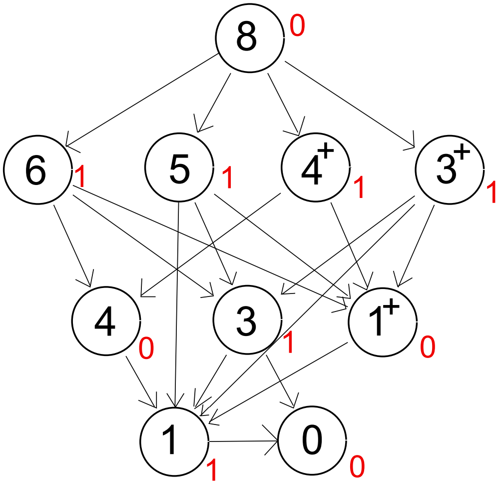
et on y recherche un graphe perdant.
Regardons par exemple si P_8 est perdant en dessinant son **graphe des configurations**.

Un exemple simple : P_{10}



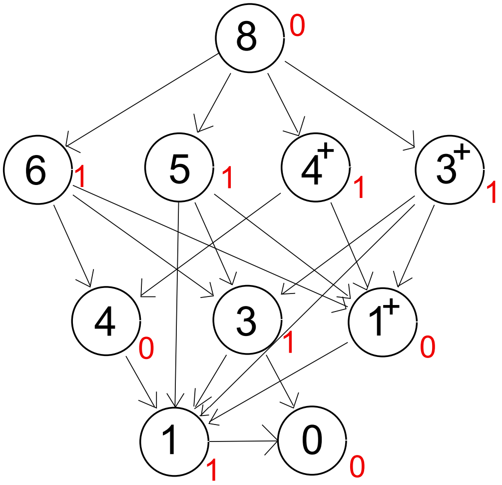
On place un arc de G vers H si H est une option de G.

Un exemple simple : P_{10}



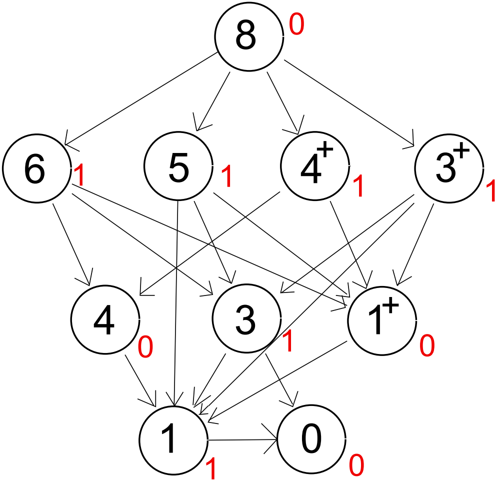
On note n^+ le graphe $P_n \cup P_1$, et on remplace 2 par 1 car se sont des cliques (équivalence sur le jeu de domination).

Un exemple simple : P_{10}



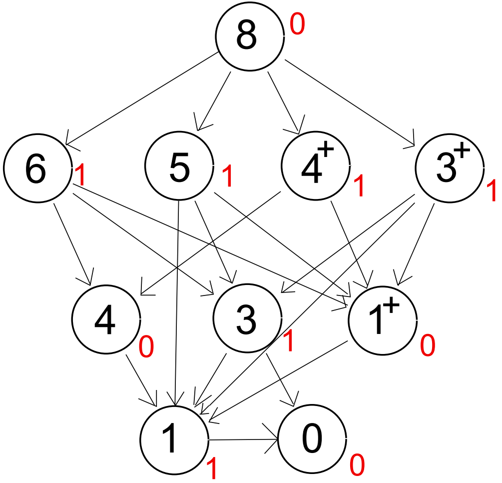
On pondère les sommets par un booléen (on place 0 ssi G est perdant), en commençant par mettre 0 sur le graphe vide.

Un exemple simple : P_{10}



On observe que P_8 est une chaîne perdante car elle n'a que des options gagnantes.

Un exemple simple : P_{10}



on en conclut que P_{10} est gagnante pour Alice si elle joue sur une extrémité.

Fonction de Grundy

notée $\rho(J)$

- Associe à tout jeu combinatoire J un entier positif ou nul
- Vérifie $\rho(J) = 0 \Leftrightarrow$ Le 1^{er} joueur perd sur le jeu J
- Se calcule récursivement, à l'aide des options de J :
  - Le jeu vide (équivalent à une situation finale) vérifie $\rho(\emptyset) = 0$
  - $\rho(J) = mex\{\rho(J'), J' \in Opt(J)\}$, où $mex(E)$ représente le plus petit entier positif n'apparaissant pas dans l'ensemble E
- Complexité exponentielle (pour un graphe de taille n)
- Stratégie gagnante : choisir une option J' telle que $\rho(J') = 0$, ainsi l'adversaire est dans une position perdante.

Additivité et périodicité des jeux combinatoires

1. Soient J et J' deux jeux combinatoires. On note $J + J'$ la **somme** des deux jeux J et J', où chaque joueur a le choix de jouer soit sur J soit sur J', et où la partie est terminée si elle l'est sur les 2 jeux.

Proposition :

$\rho(J + J') = \rho(J) \oplus \rho(J')$.

Où $\oplus$ est le *ou exclusif* ou XOR.
Pour notre jeu sur les graphes, il suffira donc de calculer les valeurs de Grundy des graphes connexes pour connaître ceux de tous les graphes.

2. La séquence de Grundy est la suite $\rho(P_0)\rho(P_1)\ldots\rho(P_n)$.
3. Dès qu'une sous-séquence apparaît trois fois consécutivement dans la séquence de Grundy, alors elle l'est à l'infini. On dit que le jeu est périodique.

Résolution du jeu sur les chemins

1. On déduit de la proposition précédente :

   $$\rho(P_n) = mex\{\rho(P_{n-2}), \rho(P_{n-3}), \rho(P_i) \oplus \rho(P_j)\ ,\ i+j=n-3\}$$

2. Algorithme en $\mathcal{O}(n^2)$ pour calculer $\rho(P_n)$.
3. On découvre une période valant 34, avec les valeurs de Grundy suivantes :
   0112031103322 4**0**5**22**330113021104 5**2**74 (de 0 à 33)
   0112031103322445 5**2**3301130211045374 (de 34 à 67)
   $\dot{8}11203110332244559330113021104537\dot{4}$ (de 68 à 101)
   La troisième ligne est la séquence répétée à l'infini.
4. On sait donc quels jeux sont perdants.
5. Pour obtenir les stratégies gagnantes, on cherche une option de grundy nul, en utilisant ces valeurs et la formule de récurrence.

Quelques variantes du jeu initial

1. On peut modifier les règles du jeu sur les composantes connexes :
   - Jeu sur toutes les composantes, noté A (pour "all")
   - Jeu sur tout ou une partie des composantes, noté S ("some")
   - Jeu sur une seule composante, noté O (pour "one")
   - Jeu sur **la** composante C qui maximise la valeur d'une fonction $f(C)$, par exemple $diam(C)$, $-diam(C)$, $|V(C)|$, $dmm(C)$,...
   - Jeu sur plusieurs composantes $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ où

$$\forall C \notin \mathcal{C} \ , \ f(C) \leq min_{1 \leq i \leq k} f(C_i)$$

2. On peut changer les règles de terminaison :
   - Le premier joueur ne pouvant jouer perd, noté $+$.
   - Le dernier joueur qui peut jouer perd, noté $-$ (misère).
3. On peut terminer la partie :
   - dès qu'une composante est terminée, noté r.
   - lorsque toutes les composantes sont terminées, noté l.

Exemple : Le jeu initial est le jeu O_l^+.

Etude des variantes

Comme pour le jeu initial avec la fonction de Grundy, nécéssité de disposer d'une **Fonction de jeu** $\gamma : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{D}$ vérifiant :

a) **Additivité :** $\exists \phi \ : \ \mathcal{D} \times \mathcal{D} \ \mapsto \ \mathcal{D}$ telle que $\forall G \in \mathcal{G}, \ \forall H \in \mathcal{G}, \ \gamma(G \cup H) = \phi\big(\gamma(G), \gamma(H)\big)$.

b) **Jouabilité :** $\exists \sigma \ : \ \mathcal{D} \ \mapsto \ \{0, 1\}$ telle que $\forall G \in \mathcal{G}, \ \sigma(\gamma(G)) = 0 \ \Leftrightarrow \ G$ est perdant.

c) **Connaissance :** $\exists \delta \ : \ \mathcal{D} \ \mapsto \ \mathbb{N}$ telle que si $\sigma(\gamma(G)) = 1$ alors le jeu (dans G) sur $\delta(\gamma(G))$ est une stratégie gagnante.

Remarque : Les deux premiers points sont indispensables pour réaliser l'étude des chemins en temps polynômial ; Le troisième donne les stratégies.

Exemple : Dans le jeu initial sur les chaînes, il s'agit d'un couple :

$$\gamma(P_n) = \big(\rho(P_n), n \bmod 34\big).$$

Les 12 variantes de J. Conway

Jeu	Fonction	Période	Préperiode	Complexité
O_l^+	ρ	34	68	$\mathcal{O}(1)$
O_l^-	?	?	?	$\mathcal{O}(e^n)$
O_r^+	F^+	80	245	$\mathcal{O}(1)$
O_r^-	F^-	?	?	$\mathcal{O}(n^2)$
A_l^+	ω^+	2^n+5	0	$\mathcal{O}(1)$
A_l^-	ω^-	2^n+7	0	$\mathcal{O}(1)$
A_r^+	R^+	1	11	$\mathcal{O}(1)$
A_r^-	R^-	1	3	$\mathcal{O}(1)$
S_l^+	σ^+	5	0	$\mathcal{O}(1)$
S_l^-	?	5	15	$\mathcal{O}(1)$
S_r^+	σ^+	5	0	$\mathcal{O}(1)$
S_r^-	σ^-	7	0	$\mathcal{O}(1)$

On remarque que la version la plus difficile à résoudre est O_l^-, très largement étudiée : il s'agit de l'octal game misère $0 \bullet 137$.

Illustration : Le jeu A_l^+ sur les chaînes

1. On joue simultanément sur toutes les composantes, où le jeu se termine si toutes les composantes le sont.
2. On se limitera à la recherche des chaînes perdantes.
3. Soit $\omega(G)$ le **temps minimum de jeu** défini par :
   a) $\omega(\emptyset) = 0$.
   b) Si $\exists H \in Opt(G)$ tel que $\omega(H) \equiv 0[2]$, alors :
   $$\omega(G) = min\{\omega(H) + 1, H \in Opt(G) \text{ et } \omega(H) \text{ pair }\}.$$
   c) Sinon $\omega(G) = min\{\omega(H) + 1, H \in Opt(G)\}$.
4. On a $\omega(G \cup H) = max\{\omega(G), \omega(H)\}$
5. Les chaînes perdantes pour A_l^+ étant celles dont le temps de jeu est pair, on observe que :

Proposition :

Soit $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des longueurs des chaînes perdantes. On a :

$$\mathcal{L} = \left\{5(2^n - 1),\ n \geq 0\right\} \cup \left\{5(2^n - 1) - 1,\ n > 0\right\}.$$

Illustration : Le jeu A_l^+ sur les chaînes

Preuve : Par induction sur n. Notons $z_n = 5(2^n - 1)$

- Vérifié pour $n \leq 2$
- Soit $z_n < k < z_{n+1} - 1$. On a $P_{z_n} \cup P_{k-z_n-3} \in O(P_k)$. Or $k - z_n - 3 \leq z_{n+1} - z_n - 5 = z_n$. On en conclut que $\omega(P_{z_n} \cup P_{k-z_n-3}) = \omega(P_{z_n}) \equiv 0[2]$, donc que P_k est gagnante.
- Si $k = z_{n+1}$, soit $P_i \cup P_j \in O(P_k)$ avec $i \leq j$. On a : $j \geq \lfloor \frac{z_{n+1}-3}{2} \rfloor > z_n$, soit $\omega(P_i \cup P_j) = \omega(P_j) \equiv 1[2]$. On en conclut que $P_{z_{n+1}}$ est perdant.
- De même pour $k = z_{n+1} - 1$.

On remarque que la preuve donne également la stratégie à adopter.

Le jeu sur la composante ayant le plus petit diamètre d_l

1. Le jeu se termine si toutes les composantes le sont.
2. On pose $\sigma(G) = 0$ ssi G est perdant.
3. Si $n \geq 7$ les 2 versions sont identiques :

Proposition :

- Si $i_5 + i_3 = 0$ alors $\sigma^+(G) = \sigma^-(G) = \overline{i_1 + i_6 + 1}$
- Sinon $\sigma^+(G) = \sigma^-(G) = \overline{i_1 + 1}$. (où $\bar{i} = i \mod 2$)

4. Montrons que $\forall n \geq 7$, $\sigma^+(P_n) = \sigma^-(P_n) = 1$:
   - On vérifie la propriété pour $n \leq 10$
   - comme $O(P_{n-4} \cup P_1) = \{P_{n-4}\}$, $P_{n-4} \cup P_1$ est perdant par induction. Or c'est une option de P_n. Donc P_n est gagnant.
5. On déduit les stratégies pour toutes les réunions de chaînes :
   - Tant que G n'est pas connexe on applique à la plus petite chaîne une stratégie "misère".
   - Lorsque on atteint la dernière chaîne, on y applique la stratégie de la version jouée.
6. A peut perdre lorsqu'il ne peut obtenir une plus courte chaîne possédant une stratégie "misère" ; d'ou la proposition.

Résumé

Etant donné un ensemble de règles appliquées à un jeu de domination sur les chemins, nous devons

1. Découvrir une fonction de jeu F vérifiant l'additivité et la jouabilité (éventuellement la connaissance des stratégies).
2. Rechercher une période à l'aide d'un algorithme en $\mathcal{O}(n^2)$ issu de l'additivité de F (sans celle-ci il devient exponentiel).
3. Poursuivre les calculs jusqu'à $2q + p$ (Théorème de Périodicité le plus souvent applicable). Mais ces calculs peuvent être fastidieux car certains jeux ont des périodes très grandes ($> 10^9$) [Flammenkamp, 04'], ou n'ont peut-être pas de période...

Quelques perspectives

1. Jeu à k couleurs, où l'on effectue une coloration propre
2. Jeu à trois joueurs ou plus
3. D'autres variantes que celles déjà énoncées, comme l'obligation de jouer exactement sur p composantes connexes si le graphe en contient au moins p, et sur toutes sinon
4. Jeu où chaque joueur joue k fois de suite
5. Jeu "partisan" (règles différentes suivant les joueurs)
6. Jeu où chaque joueur a ses propres couleurs
7. Etude de familles plus générales (étoiles à k branches, graphes planaires extérieurs, graphes de degré borné, ...)
8. Jeu sur les graphes orientés

Références

- Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K.Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, 2nde édition, A. K. Peters, 2001 (1ère édition 1982).
- John H. Conway, *On numbers and games*, 2nde édition, A.K. Peters, 2001 (1ère édition 1975).
- E. Duchêne, *Jeux Combinatoires sur les Graphes*, thèse, 2006
- Achim Flammenkamp, *Sprague-Grundy values of some octal games*, *www.homes.uni-bielefeld.de/achim/octal.html*
- D. T. Allemang. Generalized genus sequences for misère octal games. Int. J. Game Theory, 30, 2001.