

# Quelques variations du jeu de domination sur les chemins

Adrien Guignard

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

Novembre 2008

- 1 Présentation du jeu de domination
  - Énoncé et propriétés de base
  - Un exemple simple
- 2 Etude du jeu de domination classique sur tous les chemins
- 3 Quelques variantes du jeu initial
  - Définitions
  - Etude et résolution
  - Tableau récapitulatif des résultats
  - Exemples
- 4 Conclusion, perspectives et références

# Énoncé du jeu de domination

Marquage des nœuds d'un graphe par deux joueurs

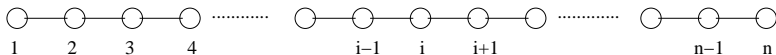
- 1 Jeu combinatoire impartial à deux joueurs (mêmes règles pour les 2 joueurs A et B, jeu à tour de rôle, pas de hasard)
- 2 Un coup consiste à choisir un sommet et le supprimer ainsi que ses voisins ;
- 3 Le premier joueur ne pouvant plus jouer est déclaré perdant.

On en déduit que les **options** de  $G$  sont des sous-graphes de  $G$  :

$$O(G) = \{G[V(G) \setminus N_G^+(x)] , x \in V(G)\}$$

Nous nous limiterons à l'étude des chemins  $P_n$ . On a :

$$O(P_n) = \{P_{n-2}, P_{n-3}, P_i \cup P_j , i + j = n - 3\}$$



Le chemin  $P_n$

# Un exemple simple : $P_{10}$

- 1 Alice peut-elle gagner sur  $P_{10}$  ?
- 2 Quelle stratégie doit-elle adopter pour y arriver ?

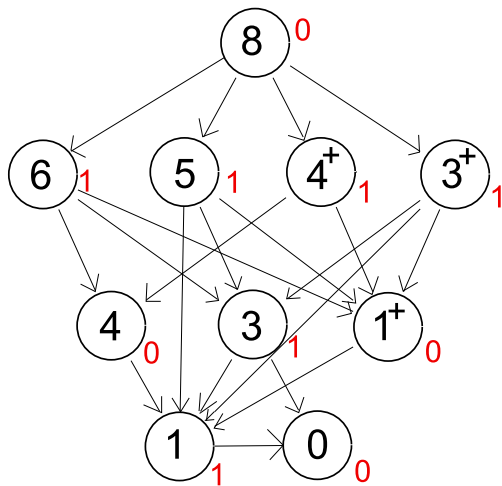
On écrit l'expression des options du chemin considéré :

$$O(P_{10}) = \{P_8, P_7, P_6 \cup P_1, P_5 \cup P_2, P_4 \cup P_3\}$$

et on y recherche un graphe perdant.

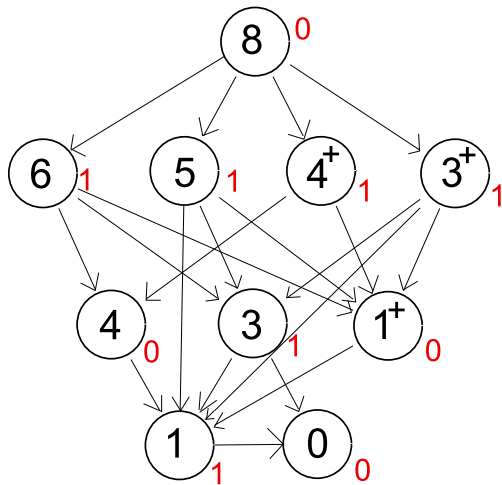
Regardons par exemple si  $P_8$  est perdant en dessinant son **graphe des configurations**.

# Un exemple simple : $P_{10}$



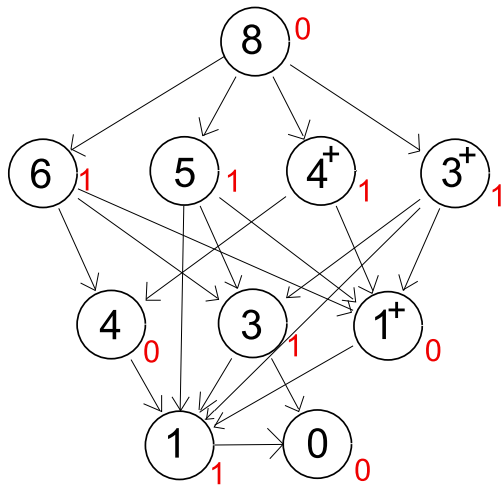
On place un arc de  $G$  vers  $H$  si  $H$  est une option de  $G$ .

# Un exemple simple : $P_{10}$



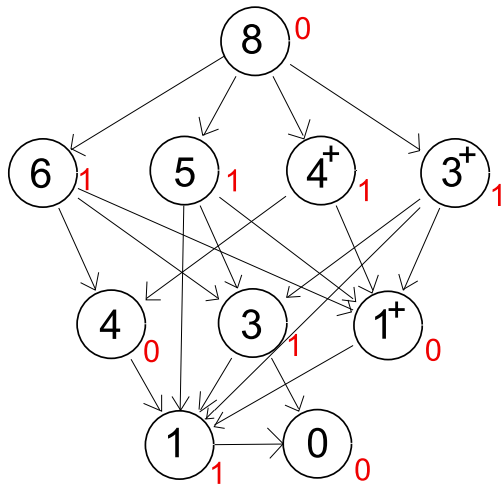
On note  $n^+$  le graphe  $P_n \cup P_1$ , et on remplace 2 par 1 car se sont des cliques (équivalence sur le jeu de domination).

# Un exemple simple : $P_{10}$



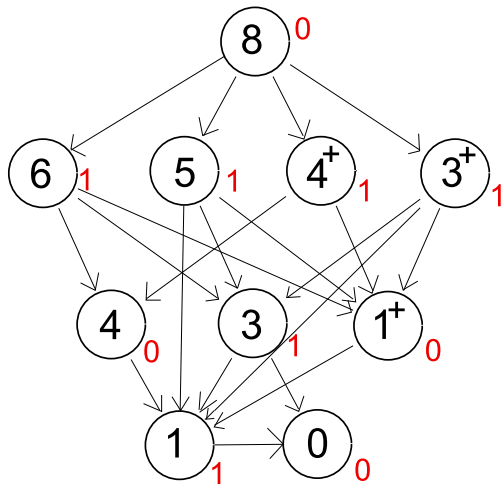
On pondère les sommets par un booléen (on place 0 ssi  $G$  est perdant), en commençant par mettre 0 sur le graphe vide.

# Un exemple simple : $P_{10}$



On observe que  $P_8$  est une chaîne perdante car elle n'a que des options gagnantes.

# Un exemple simple : $P_{10}$



on en conclut que  $P_{10}$  est gagnante pour Alice si elle joue sur une extrémité.

# Fonction de Grundy

notée  $\rho(J)$

- Associe à tout jeu combinatoire  $J$  un entier positif ou nul
- Vérifie  $\rho(J) = 0 \Leftrightarrow$  Le 1<sup>er</sup> joueur perd sur le jeu  $J$
- Se calcule récursivement, à l'aide des options de  $J$  :
  - Le jeu vide (équivalent à une situation finale) vérifie  $\rho(\emptyset) = 0$
  - $\rho(J) = \text{mex}\{\rho(J'), J' \in \text{Opt}(J)\}$ , où  $\text{mex}(E)$  représente le plus petit entier positif n'apparaissant pas dans l'ensemble  $E$
- Complexité exponentielle (pour un graphe de taille  $n$ )
- Stratégie gagnante : choisir une option  $J'$  telle que  $\rho(J') = 0$ , ainsi l'adversaire est dans une position perdante.

# Additivité et périodicité des jeux combinatoires

- 1 Soient  $J$  et  $J'$  deux jeux combinatoires. On note  $J + J'$  la **somme** des deux jeux  $J$  et  $J'$ , où chaque joueur a le choix de jouer soit sur  $J$  soit sur  $J'$ , et où la partie est terminée si elle l'est sur les 2 jeux.

Proposition :

$$\rho(J + J') = \rho(J) \oplus \rho(J').$$

Où  $\oplus$  est le *ou exclusif* ou XOR.

Pour notre jeu sur les graphes, il suffira donc de calculer les valeurs de Grundy des graphes connexes pour connaître ceux de tous les graphes.

- 2 La séquence de Grundy est la suite  $\rho(P_0)\rho(P_1)\dots\rho(P_n)$ .
- 3 Dès qu'une sous-séquence apparaît trois fois consécutivement dans la séquence de Grundy, alors elle l'est à l'infini. On dit que le jeu est périodique.

## Résolution du jeu sur les chemins

- 1 On déduit de la proposition précédente :

$$\rho(P_n) = \text{mex}\{\rho(P_{n-2}), \rho(P_{n-3}), \rho(P_i) \oplus \rho(P_j) \text{ , } i + j = n - 3\}$$

- 2 Algorithme en  $\mathcal{O}(n^2)$  pour calculer  $\rho(P_n)$ .
- 3 On découvre une période valant 34, avec les valeurs de Grundy suivantes :

**0**1120311033224**0522**3301130211045**274** (de 0 à 33)

**0**1120311033224455**2330**1130211045374 (de 34 à 67)

**8**11203110332244559330113021104537**4** (de 68 à 101)

La troisième ligne est la séquence répétée à l'infini.

- 4 On sait donc quels jeux sont perdants.
- 5 Pour obtenir les stratégies gagnantes, on cherche une option de Grundy nul, en utilisant ces valeurs et la formule de récurrence.

## Quelques variantes du jeu initial

- 1 On peut modifier les règles du jeu sur les composantes connexes :
  - Jeu sur toutes les composantes, noté  $A$  (pour "all")
  - Jeu sur tout ou une partie des composantes, noté  $S$  ("some")
  - Jeu sur une seule composante, noté  $O$  (pour "one")
  - Jeu sur **la** composante  $C$  qui maximise la valeur d'une fonction  $f(C)$ , par exemple  $diam(C)$ ,  $-diam(C)$ ,  $|V(C)|$ ,  $dmm(C)$ ,...
  - Jeu sur plusieurs composantes  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  où

$$\forall C \notin \mathcal{C}, f(C) \leq \min_{1 \leq i \leq k} f(C_i)$$

- 2 On peut changer les règles de terminaison :
  - Le premier joueur ne pouvant jouer perd, noté  $+$ .
  - Le dernier joueur qui peut jouer perd, noté  $-$  (misère).
- 3 On peut terminer la partie :
  - dès qu'une composante est terminée, noté  $r$ .
  - lorsque toutes les composantes sont terminées, noté  $l$ .

**Exemple :** Le jeu initial est le jeu  $O_l^+$ .

## Etude des variantes

Comme pour le jeu initial avec la fonction de Grundy, nécessité de disposer d'une **Fonction de jeu**  $\gamma : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{D}$  vérifiant :

- Additivité** :  $\exists \phi : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$  telle que  
 $\forall G \in \mathcal{G}, \forall H \in \mathcal{G}, \gamma(G \cup H) = \phi(\gamma(G), \gamma(H))$ .
- Jouabilité** :  $\exists \sigma : \mathcal{D} \mapsto \{0, 1\}$  telle que  
 $\forall G \in \mathcal{G}, \sigma(\gamma(G)) = 0 \Leftrightarrow G$  est perdant.
- Connaissance** :  $\exists \delta : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{N}$  telle que si  $\sigma(\gamma(G)) = 1$  alors le jeu (dans  $G$ ) sur  $\delta(\gamma(G))$  est une stratégie gagnante.

**Remarque** : Les deux premiers points sont indispensables pour réaliser l'étude des chemins en temps polynômial ; Le troisième donne les stratégies.

**Exemple** : Dans le jeu initial sur les chaînes, il s'agit d'un couple :

$$\gamma(P_n) = (\rho(P_n), n \bmod 34).$$

## Les 12 variantes de J. Conway

Jeu	Fonction	Période	Préperiode	Complexité
$O_l^+$	$\rho$	34	68	$\mathcal{O}(1)$
$O_l^-$	?	?	?	$\mathcal{O}(e^n)$
$O_r^+$	$F^+$	80	245	$\mathcal{O}(1)$
$O_r^-$	$F^-$	?	?	$\mathcal{O}(n^2)$
$A_l^+$	$\omega^+$	$2^n + 5$	0	$\mathcal{O}(1)$
$A_l^-$	$\omega^-$	$2^n + 7$	0	$\mathcal{O}(1)$
$A_r^+$	$R^+$	1	11	$\mathcal{O}(1)$
$A_r^-$	$R^-$	1	3	$\mathcal{O}(1)$
$S_l^+$	$\sigma^+$	5	0	$\mathcal{O}(1)$
$S_l^-$	?	5	15	$\mathcal{O}(1)$
$S_r^+$	$\sigma^+$	5	0	$\mathcal{O}(1)$
$S_r^-$	$\sigma^-$	7	0	$\mathcal{O}(1)$

On remarque que la version la plus difficile à résoudre est  $O_l^-$ , très largement étudiée : il s'agit de l'octal game misère  $0 \bullet 137$ .

# Illustration : Le jeu $A_j^+$ sur les chaînes

- 1 On joue simultanément sur toutes les composantes, où le jeu se termine si toutes les composantes le sont.
- 2 On se limitera à la recherche des chaînes perdantes.
- 3 Soit  $\omega(G)$  le **temps minimum de jeu** défini par :
  - a)  $\omega(\emptyset) = 0$ .
  - b) Si  $\exists H \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\omega(H) \equiv 0[2]$ , alors :
$$\omega(G) = \min\{\omega(H) + 1, H \in \text{Opt}(G) \text{ et } \omega(H) \text{ pair}\}.$$
  - c) Sinon  $\omega(G) = \min\{\omega(H) + 1, H \in \text{Opt}(G)\}$ .
- 4 On a  $\omega(G \cup H) = \max\{\omega(G), \omega(H)\}$
- 5 Les chaînes perdantes pour  $A_j^+$  étant celles dont le temps de jeu est pair, on observe que :

## Proposition :

Soit  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{N}$  l'ensemble des longueurs des chaînes perdantes. On a :

$$\mathcal{L} = \{5(2^n - 1), n \geq 0\} \cup \{5(2^n - 1) - 1, n > 0\}.$$

## Illustration : Le jeu $A_j^+$ sur les chaînes

**Preuve** : Par induction sur  $n$ . Notons  $z_n = 5(2^n - 1)$

- Vérifié pour  $n \leq 2$
- Soit  $z_n < k < z_{n+1} - 1$ . On a  $P_{z_n} \cup P_{k-z_n-3} \in O(P_k)$ .  
Or  $k - z_n - 3 \leq z_{n+1} - z_n - 5 = z_n$ . On en conclut que  $\omega(P_{z_n} \cup P_{k-z_n-3}) = \omega(P_{z_n}) \equiv 0[2]$ , donc que  $P_k$  est gagnante.
- Si  $k = z_{n+1}$ , soit  $P_i \cup P_j \in O(P_k)$  avec  $i \leq j$ . On a :  
 $j \geq \lfloor \frac{z_{n+1}-3}{2} \rfloor > z_n$ , soit  $\omega(P_i \cup P_j) = \omega(P_j) \equiv 1[2]$ .  
On en conclut que  $P_{z_{n+1}}$  est perdant.
- De même pour  $k = z_{n+1} - 1$ .

On remarque que la preuve donne également la stratégie à adopter.

# Le jeu sur la composante ayant le plus petit diamètre $d_i$

- 1 Le jeu se termine si toutes les composantes le sont.
- 2 On pose  $\sigma(G) = 0$  ssi  $G$  est perdant.
- 3 Si  $n \geq 7$  les 2 versions sont identiques :

## Proposition :

- Si  $i_5 + i_3 = 0$  alors  $\sigma^+(G) = \sigma^-(G) = \overline{i_1 + i_6 + 1}$
  - Sinon  $\sigma^+(G) = \sigma^-(G) = \overline{i_1 + 1}$ . (où  $\bar{i} = i \pmod{2}$ )
- 4 Montrons que  $\forall n \geq 7$ ,  $\sigma^+(P_n) = \sigma^-(P_n) = 1$  :
    - On vérifie la propriété pour  $n \leq 10$
    - comme  $O(P_{n-4} \cup P_1) = \{P_{n-4}\}$ ,  $P_{n-4} \cup P_1$  est perdant par induction. Or c'est une option de  $P_n$ . Donc  $P_n$  est gagnant.
  - 5 On déduit les stratégies pour toutes les réunions de chaînes :
    - Tant que  $G$  n'est pas connexe on applique à la plus petite chaîne une stratégie "misère".
    - Lorsque on atteint la dernière chaîne, on y applique la stratégie de la version jouée.
  - 6 A peut perdre lorsqu'il ne peut obtenir une plus courte chaîne possédant une stratégie "misère" ; d'où la proposition.

## Résumé

Etant donné un ensemble de règles appliquées à un jeu de domination sur les chemins, nous devons

- 1 Découvrir une fonction de jeu  $F$  vérifiant l'additivité et la jouabilité (éventuellement la connaissance des stratégies).
- 2 Rechercher une période à l'aide d'un algorithme en  $\mathcal{O}(n^2)$  issu de l'additivité de  $F$  (sans celle-ci il devient exponentiel).
- 3 Poursuivre les calculs jusqu'à  $2q + p$  (Théorème de Périodicité le plus souvent applicable). Mais ces calculs peuvent être fastidieux car certains jeux ont des périodes très grandes ( $> 10^9$ ) [Flammenkamp, 04'], ou n'ont peut-être pas de période...

## Quelques perspectives

- 1 Jeu à  $k$  couleurs, où l'on effectue une coloration propre
- 2 Jeu à trois joueurs ou plus
- 3 D'autres variantes que celles déjà énoncées, comme l'obligation de jouer exactement sur  $p$  composantes connexes si le graphe en contient au moins  $p$ , et sur toutes sinon
- 4 Jeu où chaque joueur joue  $k$  fois de suite
- 5 Jeu "partisan" (règles différentes suivant les joueurs)
- 6 Jeu où chaque joueur a ses propres couleurs
- 7 Etude de familles plus générales (étoiles à  $k$  branches, graphes planaires extérieurs, graphes de degré borné, ... )
- 8 Jeu sur les graphes orientés

## Références

- Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, 2<sup>de</sup> édition, A. K. Peters, 2001 (1<sup>ère</sup> édition 1982).
- John H. Conway, *On numbers and games*, 2<sup>de</sup> édition, A.K. Peters, 2001 (1<sup>ère</sup> édition 1975).
- E. Duchêne, *Jeux Combinatoires sur les Graphes*, thèse, 2006
- Achim Flammenkamp, *Sprague-Grundy values of some octal games*, [www.homes.uni-bielefeld.de/achim/octal.html](http://www.homes.uni-bielefeld.de/achim/octal.html)
- D. T. Allemang. Generalized genus sequences for misère octal games. *Int. J. Game Theory*, 30, 2001.