Une approche unifiée des colorations à distance deux dans les graphes planaires

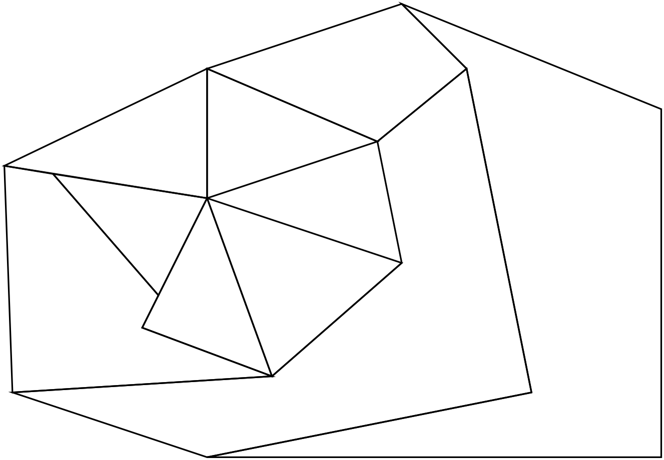
Omid Amini [§] - Louis Esperet [♯] - Jan van den Heuvel [♭]

[§] École Normale Supérieure, Paris, France
[♯] Université Charles, Prague, République Tchèque
[♭] London School of Economics and Political Science, Londres, Royaume-Uni

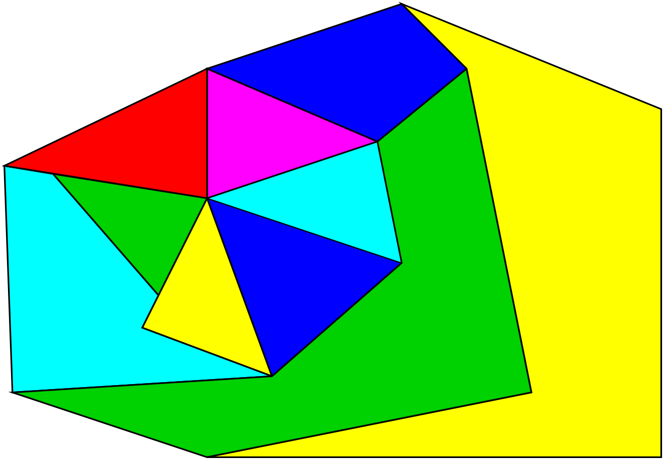
Journées Graphes et Algorithmes
INRIA Sophia-Antipolis
6 Novembre 2008

Introduction

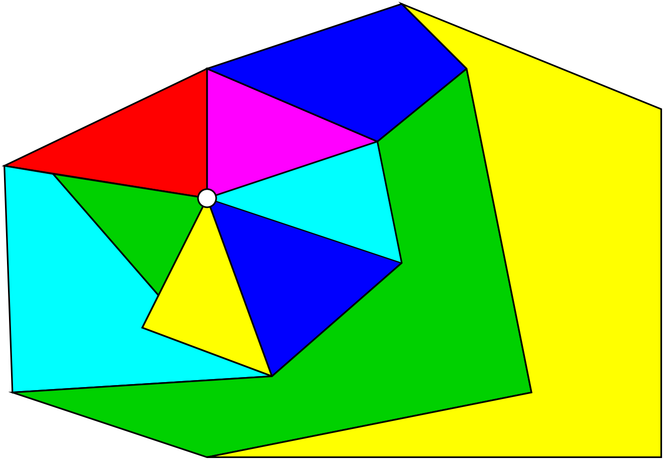
Introduction



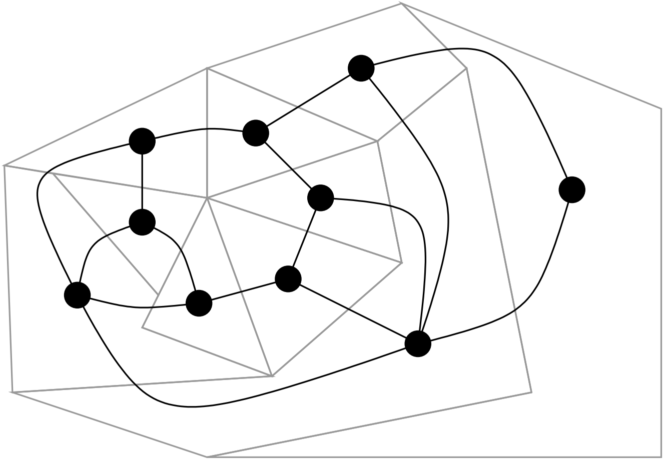
Introduction



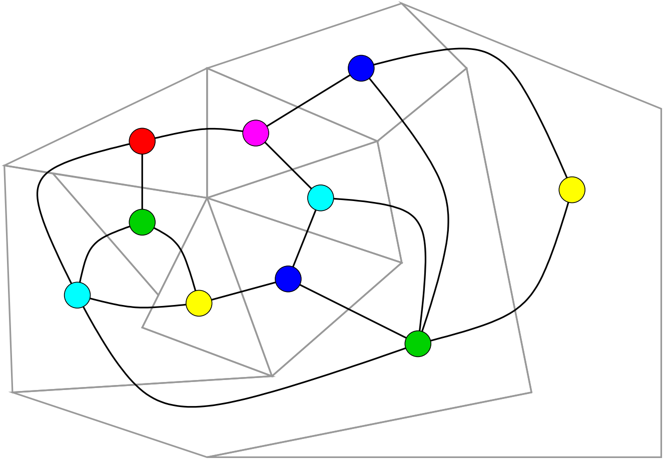
Introduction



Introduction



Introduction



Coloration cyclique

Définition (Ore et Plummer 1969)

Une coloration cyclique d'un graphe planaire G est une coloration des sommets de G telle que toute paire de sommets incidents à une même face recoivent des couleurs distinctes.

Coloration cyclique

Définition (Ore et Plummer 1969)

Une coloration cyclique d'un graphe planaire G est une coloration des sommets de G telle que toute paire de sommets incidents à une même face recoivent des couleurs distinctes.
Le nombre chromatique cyclique de G, noté $\chi^*(G)$, est le nombre minimal de couleurs dans une coloration cyclique de G.

Coloration cyclique

Définition (Ore et Plummer 1969)

Une coloration cyclique d'un graphe planaire G est une coloration des sommets de G telle que toute paire de sommets incidents à une même face recoivent des couleurs distinctes.
Le nombre chromatique cyclique de G, noté $\chi^*(G)$, est le nombre minimal de couleurs dans une coloration cyclique de G.

Pour tout graphe planaire G, on note $\Delta^*(G)$ la taille maximale d'une face de G.

Coloration cyclique

Définition (Ore et Plummer 1969)

Une coloration cyclique d'un graphe planaire G est une coloration des sommets de G telle que toute paire de sommets incidents à une même face recoivent des couleurs distinctes.
Le nombre chromatique cyclique de G, noté $\chi^*(G)$, est le nombre minimal de couleurs dans une coloration cyclique de G.

Pour tout graphe planaire G, on note $\Delta^*(G)$ la taille maximale d'une face de G.

Théorème (Ore et Plummer 1969)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq 2\Delta^*(G)$.

Coloration cyclique

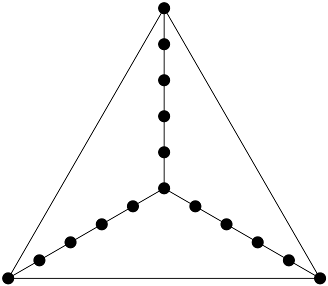
Conjecture (Borodin 1984)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

Coloration cyclique

Conjecture (Borodin 1984)

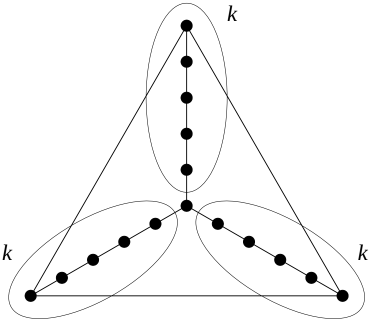
Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^*(G) \right\rfloor$.



Coloration cyclique

Conjecture (Borodin 1984)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

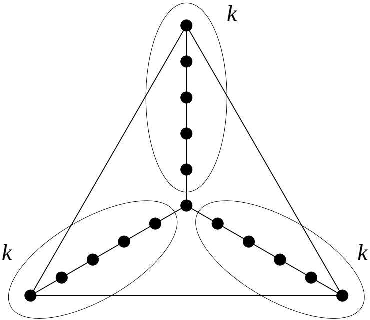


- $\Delta^* = 2k + 1$

Coloration cyclique

Conjecture (Borodin 1984)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^*(G) \right\rfloor$.



- $\Delta^* = 2k + 1$
- $n = 3k + 1 = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^* \right\rfloor$

Coloration cyclique

Conjecture (Borodin 1984)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

Théorème (Borodin, Sanders et Zhao 1999)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{9}{5}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

Coloration cyclique

Conjecture (Borodin 1984)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

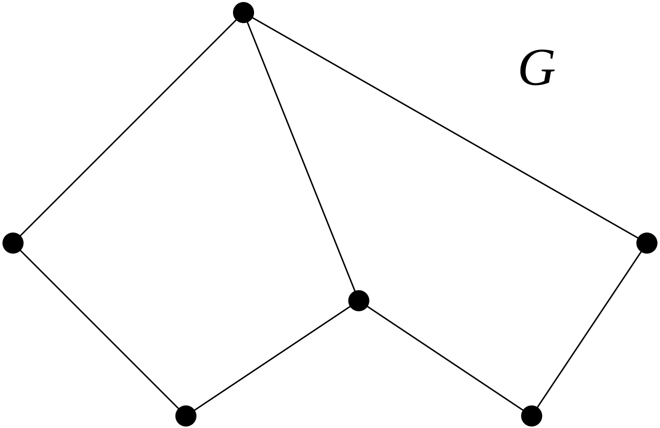
Théorème (Borodin, Sanders et Zhao 1999)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{9}{5}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

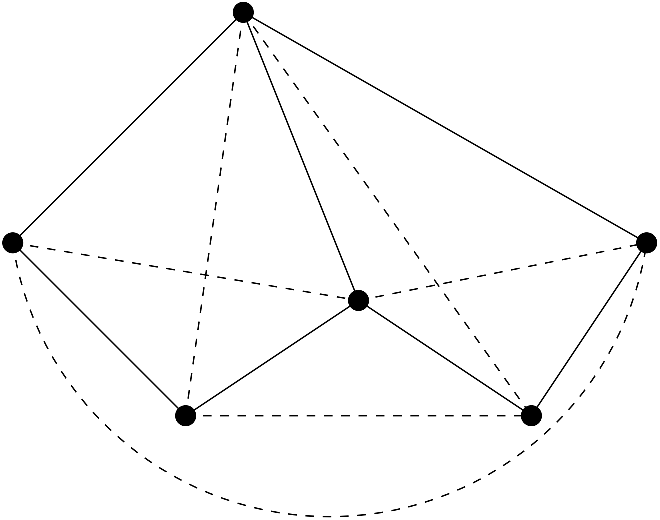
Théorème (Sanders et Zhao 2001)

Pour tout graphe planaire G, $\chi^*(G) \leq \left\lfloor \frac{5}{3}\Delta^*(G) \right\rfloor$.

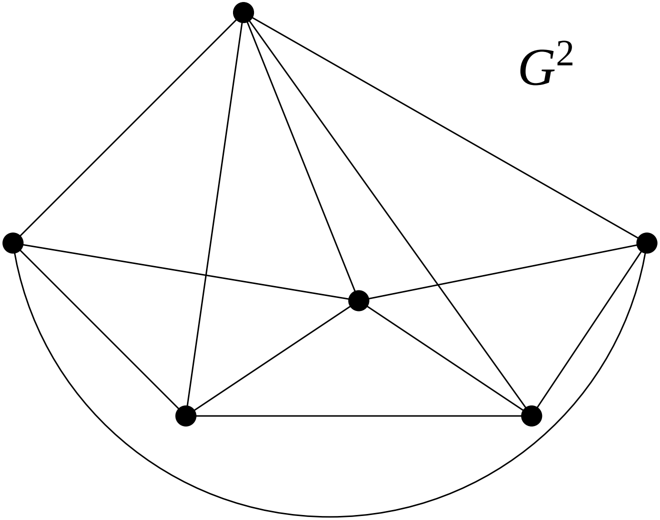
Coloration du carré



Coloration du carré



Coloration du carré



Coloration du carré

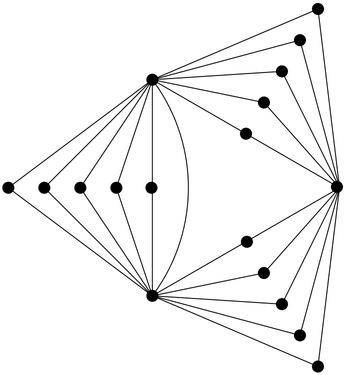
Conjecture (Wegner 1977)

Pour tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 8$,
$\chi(G^2) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 1$.

Coloration du carré

Conjecture (Wegner 1977)

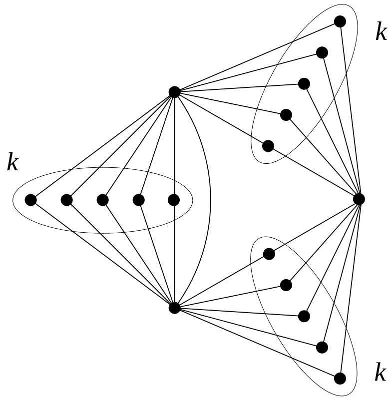
Pour tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 8$,
$\chi(G^2) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 1$.



Coloration du carré

Conjecture (Wegner 1977)

Pour tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 8$,
$\chi(G^2) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 1$.

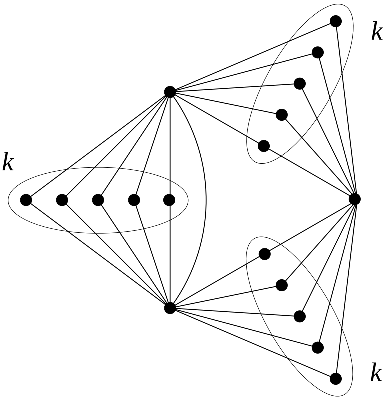


- $\Delta = 2k + 1$

Coloration du carré

Conjecture (Wegner 1977)

Pour tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 8$,
$\chi(G^2) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 1$.



- $\Delta = 2k + 1$
- $3k + 2 = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 1$ couleurs distinctes

Coloration du carré

Conjecture (Wegner 1977)

Pour tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 8$,
$\chi(G^2) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 1$.

Pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ,

- $\chi(G^2) \leq 8\Delta - 22$ (Jonas 1993)
- $\chi(G^2) \leq 3\Delta + 5$ (Wong 1996)
- $\chi(G^2) \leq 2\Delta + 25$ (Van den Heuvel et McGuinness 2003)
- pour $\Delta \geq 750$, $\chi(G^2) \leq \left\lceil \frac{9}{5}\Delta \right\rceil + 1$ (Agnarsson et Halldórsson 2003)
- $\chi(G^2) \leq \left\lceil \frac{5}{3}\Delta \right\rceil + 78$ (Molloy et Salavatipour 2005)

$L(p,q)$-étiquetage des graphes planaires

Théorème (Havet, Van den Heuvel, McDiarmid et Reed 2007)

Pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ, il existe une coloration c de G^2 où les couleurs sont des entiers positifs inférieurs à $\frac{3\Delta}{2}+o(\Delta)$, telle que toute paire de sommets adjacents u, v vérifie

$$|c(u)-c(v)| > \Delta^{1/4}.$$

$L(p,q)$-étiquetage des graphes planaires

Théorème (Havet, Van den Heuvel, McDiarmid et Reed 2007)

Pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ, il existe une coloration c de G^2 où les couleurs sont des entiers positifs inférieurs à $\frac{3\Delta}{2} + o(\Delta)$, telle que toute paire de sommets adjacents u, v vérifie

$$|c(u) - c(v)| > \Delta^{1/4}.$$

Corollaire

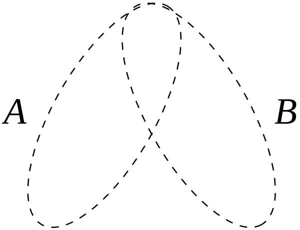
Pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ,

$$\chi\left(G^2\right) \leq \frac{3\Delta}{2} + o(\Delta).$$

(A, B)-coloration

Définition (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit $A, B \subseteq V(G)$. Une (A, B)-coloration de G est une coloration des sommets de B telle que

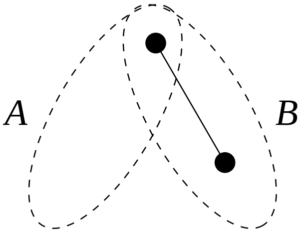


(A, B)-coloration

Définition (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit $A, B \subseteq V(G)$. Une (A, B)-coloration de G est une coloration des sommets de B telle que

- deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes;

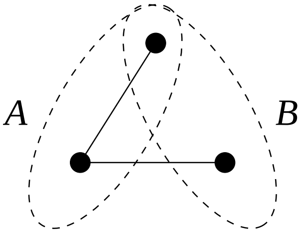


(A, B)-coloration

Définition (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit $A, B \subseteq V(G)$. Une (A, B)-coloration de G est une coloration des sommets de B telle que

- deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes;
- deux sommets ayant un voisin commun appartenant à A reçoivent des couleurs distinctes.



(A, B)-coloration

Définition (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit $A, B \subseteq V(G)$. Une (A, B)-coloration de G est une coloration des sommets de B telle que

- deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes;
- deux sommets ayant un voisin commun appartenant à A reçoivent des couleurs distinctes.

Remarques :

1. une $(V(G), V(G))$-coloration de G $\Longleftrightarrow$ une coloration du carré de G

(A, B)-coloration

Définition (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit $A, B \subseteq V(G)$. Une (A, B)-coloration de G est une coloration des sommets de B telle que

- deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes;
- deux sommets ayant un voisin commun appartenant à A reçoivent des couleurs distinctes.

Remarques :

1. une $(V(G), V(G))$-coloration de $G \iff$ une coloration du carré de G
2. une $(\varnothing, V(G))$-coloration de $G \iff$ une coloration de G

(A, B)-coloration

On note $\Delta(A, B)$ le nombre maximum de sommets de B adjacents à un sommet donné de A.

(A, B)-coloration

On note $\Delta(A, B)$ le nombre maximum de sommets de B adjacents à un sommet donné de A.

Théorème (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit G un graphe planaire. Pour tout $A, B \subseteq V(G)$ il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $(\frac{3}{2} + o(1))\Delta(A, B)$ couleurs.

(A, B)-coloration

On note $\Delta(A, B)$ le nombre maximum de sommets de B adjacents à un sommet donné de A.

Théorème (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit G un graphe planaire. Pour tout $A, B \subseteq V(G)$ il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $(\frac{3}{2} + o(1))\Delta(A, B)$ couleurs.

Corollaire sur la coloration du carré

Si G est un graphe planaire de degré maximum Δ,

$$\chi(G^2) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1)\right)\Delta.$$

(A, B)-coloration

Corollaire sur la coloration cyclique

Si G est un graphe planaire,

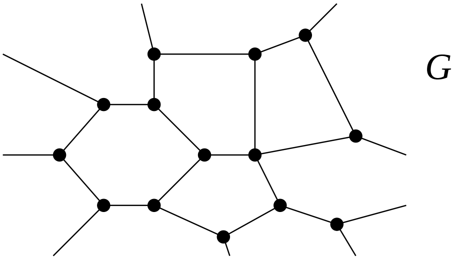
$$\chi^*(G) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1)\right) \Delta^*(G).$$

(A, B)-coloration

Corollaire sur la coloration cyclique

Si G est un graphe planaire,

$$\chi^*(G) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1)\right) \Delta^*(G).$$

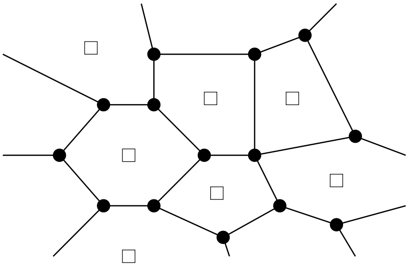


(A, B)-coloration

Corollaire sur la coloration cyclique

Si G est un graphe planaire,

$$\chi^*(G) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1)\right) \Delta^*(G).$$

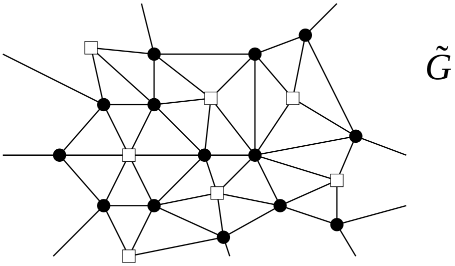


(A, B)-coloration

Corollaire sur la coloration cyclique

Si G est un graphe planaire,

$$\chi^*(G) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1)\right) \Delta^*(G).$$

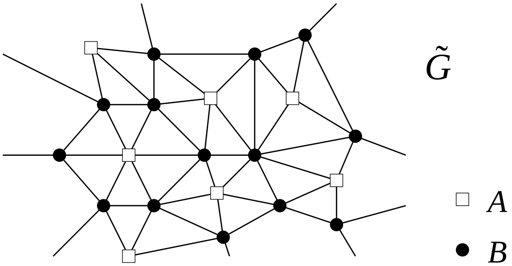


(A, B)-coloration

Corollaire sur la coloration cyclique

Si G est un graphe planaire,

$$\chi^*(G) \leq \left(\frac{3}{2} + o(1)\right) \Delta^*(G).$$



Preuve du théorème

Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

Preuve du théorème

Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

1. Si G contient un sommet de degré au plus 1

Preuve du théorème

Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

1. Si G contient un sommet de degré au plus 1 $\surd$

Preuve du théorème

Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

1. Si G contient un sommet de degré au plus 1 $\surd$
2. Si G contient une face avec deux sommets u, v tels que $d(u) + d(v) \leq \beta$ et tels qu'au plus $\frac{3}{2}\beta$ sommets sont adjacents ou ont un voisin dans A commun avec u.

Preuve du théorème

Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

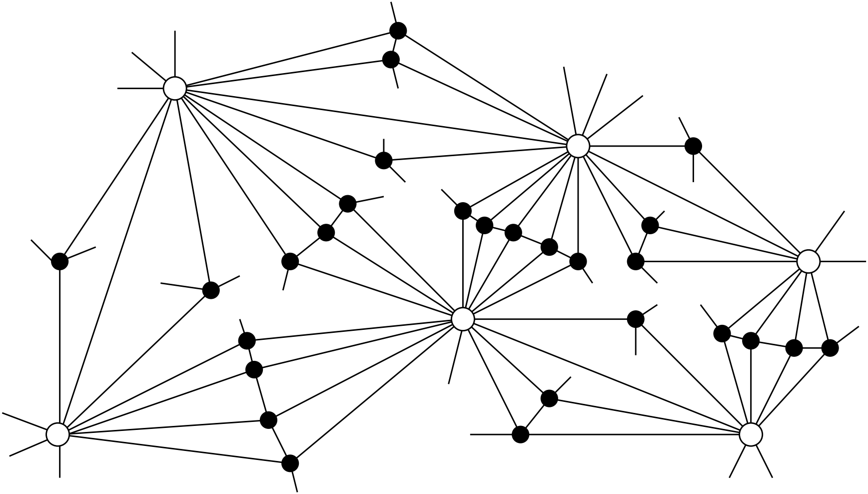
1. Si G contient un sommet de degré au plus 1 $\surd$
2. Si G contient une face avec deux sommets u, v tels que $d(u) + d(v) \leq \beta$ et tels qu'au plus $\frac{3}{2}\beta$ sommets sont adjacents ou ont un voisin dans A commun avec u. $\surd$

Preuve du théorème

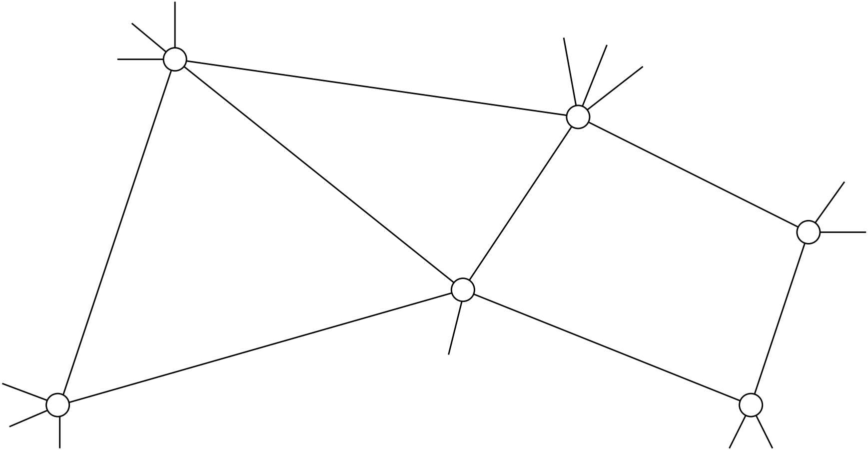
Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

1. Si G contient un sommet de degré au plus 1 $\surd$
2. Si G contient une face avec deux sommets u, v tels que $d(u) + d(v) \leq \beta$ et tels qu'au plus $\frac{3}{2}\beta$ sommets sont adjacents ou ont un voisin dans A commun avec u. $\surd$
3. Sinon

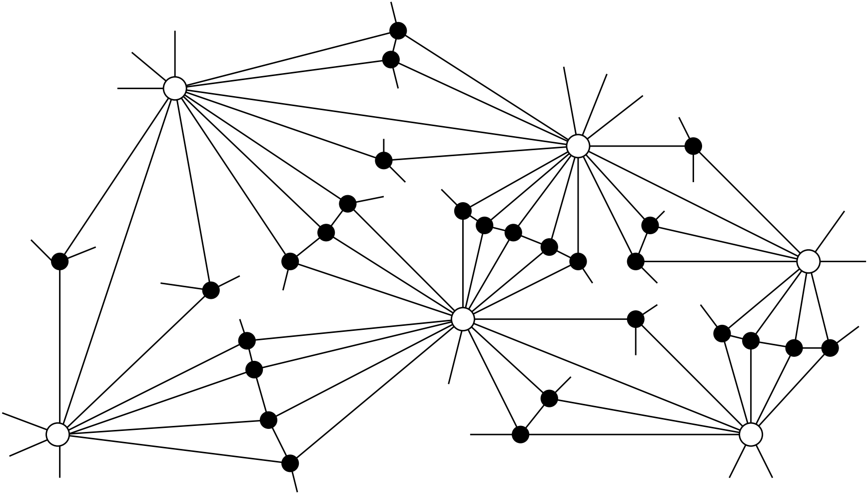
Preuve du théorème



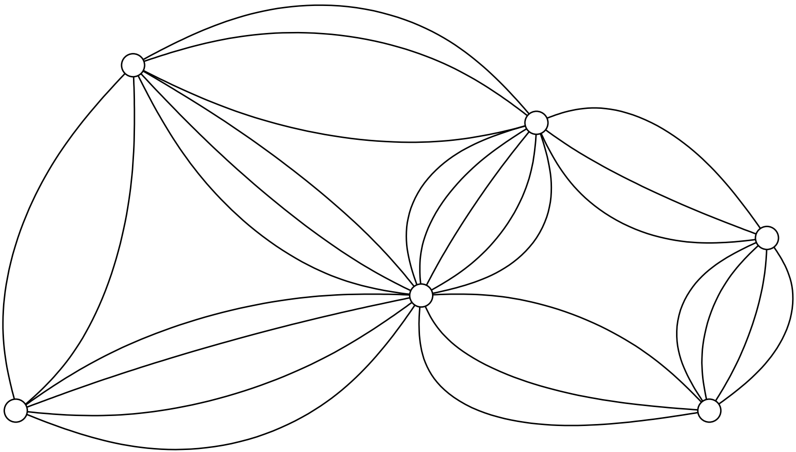
Preuve du théorème



Preuve du théorème



Preuve du théorème

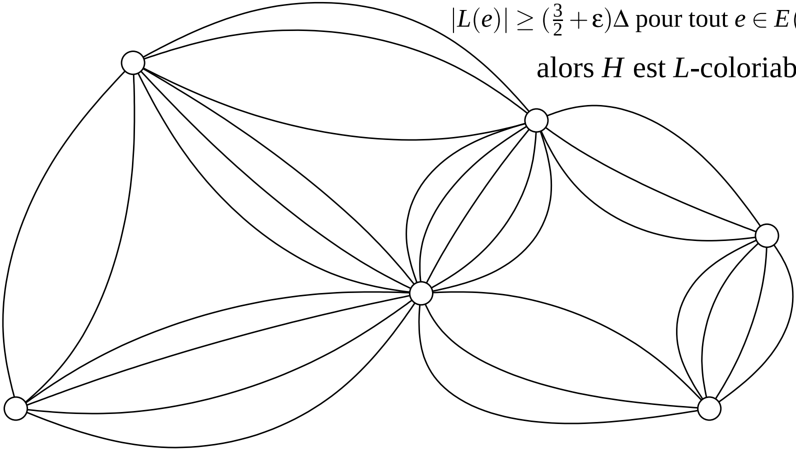


Preuve du théorème

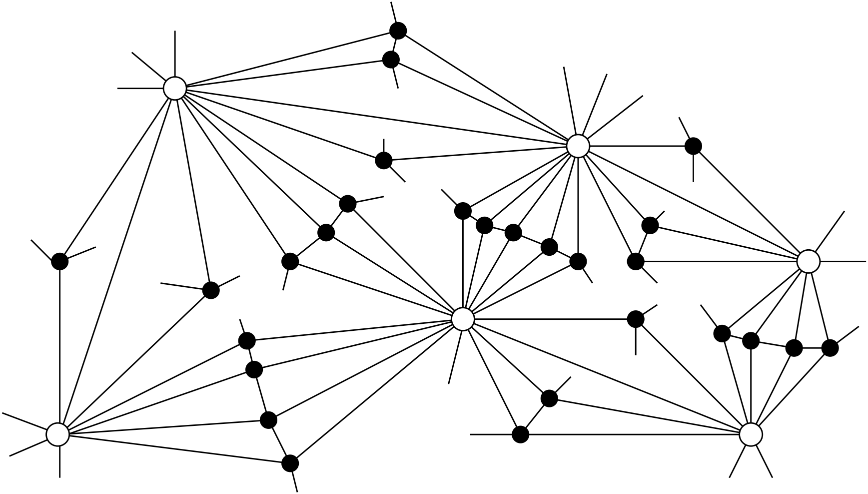
Théorème (Kahn 2000) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe Δ_ε tel que si H est un multigraphe de degré maximum $\Delta \geq \Delta_\varepsilon$, et si L est une assignation de listes aux arêtes de H avec

$$|L(e)| \geq (\tfrac{3}{2} + \varepsilon)\Delta \text{ pour tout } e \in E(H),$$

alors H est L-coloriable.



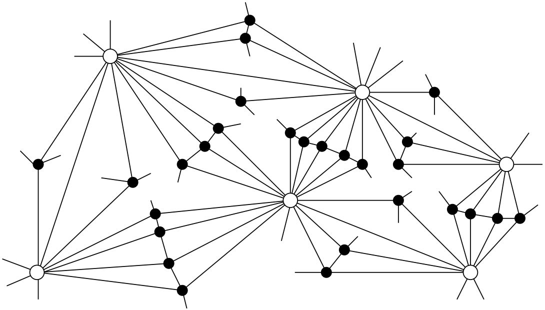
Preuve du théorème



Preuve du théorème

Par induction sur le nombre de sommets (en prenant $A = \{v | d_B(v) \leq \beta\}$):

1. Si G contient un sommet de degré au plus 1 $\surd$
2. Si G contient une face avec deux sommets u, v tels que $d(u) + d(v) \leq \beta$ et tels qu'au plus $\frac{3}{2}\beta$ sommets sont adjacents ou ont un voisin dans A commun avec u. $\surd$
3. Sinon $\surd$



Conséquences du lemme structurel

Théorème (Kahn 2000) *Soit H un multigraphe et L une assignation de listes pour les arêtes de H. Si pour un certain $\delta > 0$,*

$$\left(\frac{1}{(1-\delta)|L(e)|}\right)_{e \in E(H)} \in \mathcal{MP}(H),$$

alors H est L-coloriable.

Conséquences du lemme structurel

Conjecture *Soit H un multigraphe et L une assignation de listes pour les arêtes de H. Si pour un certain $K > 0$,*

$$\left(\frac{1}{|L(e)| - K}\right)_{e \in E(H)} \in \mathcal{MP}(H),$$

alors H est L-coloriable.

Conséquences du lemme structurel

Conjecture *Soit H un multigraphe et L une assignation de listes pour les arêtes de H. Si pour un certain $K > 0$,*

$$\left(\frac{1}{|L(e)| - K}\right)_{e \in E(H)} \in \mathcal{MP}(H),$$

alors H est L-coloriable.

Cette conjecture implique directement une borne de $\frac{3}{2}\Delta(A, B) + C$ pour l'(A, B)-coloration des graphes planaires.

Conséquences du lemme structurel

Conjecture *Soit H un multigraphe et L une assignation de listes pour les arêtes de H. Si pour un certain $K > 0$,*

$$\left(\frac{1}{|L(e)| - K}\right)_{e \in E(H)} \in \mathcal{MP}(H),$$

alors H est L-coloriable.

Cette conjecture implique directement une borne de $\frac{3}{2}\Delta(A,B) + C$ pour l'(A,B)-coloration des graphes planaires.

On note $\omega(G)$ la taille maximale d'une clique d'un graphe G.

Conséquences du lemme structurel

Conjecture *Soit H un multigraphe et L une assignation de listes pour les arêtes de H. Si pour un certain $K > 0$,*

$$\left(\frac{1}{|L(e)| - K}\right)_{e \in E(H)} \in \mathcal{MP}(H),$$

alors H est L-coloriable.

Cette conjecture implique directement une borne de $\frac{3}{2}\Delta(A, B) + C$ pour l'(A, B)-coloration des graphes planaires.

On note $\omega(G)$ la taille maximale d'une clique d'un graphe G.

Corollaire sur la taille des cliques dans le carré d'un graphe planaire

Il existe une constante C telle que tout graphe planaire G de degré maximum Δ vérifie

$$\omega(G^2) \leq \frac{3\Delta}{2} + C.$$

Extensions aux graphes de genre borné

Théorème (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit S une surface fixée. Si G est dessinable sur S, alors pour tout $A, B \subseteq V(G)$ il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $(\frac{3}{2} + o(1))\Delta(A, B)$ couleurs.

Extensions aux graphes de genre borné

Théorème (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit S une surface fixée. Si G est dessinable sur S, alors pour tout $A, B \subseteq V(G)$ il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $(\frac{3}{2} + o(1))\Delta(A, B)$ couleurs.

La preuve donne un algorithme en temps polynomial pour trouver une telle coloration.

Extensions aux graphes de genre borné

Théorème (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Soit S une surface fixée. Si G est dessinable sur S, alors pour tout $A, B \subseteq V(G)$ il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $(\frac{3}{2} + o(1))\Delta(A, B)$ couleurs.

La preuve donne un algorithme en temps polynomial pour trouver une telle coloration.

Théorème (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Pour toute surface S, il existe une constante C_S telle que pour tout graphe G dessinable sur S et de degré maximum Δ, on a

$$\omega(G^2) \leq \frac{3\Delta}{2} + C_S.$$

Perspectives

Conjecture (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Il existe une constante c telle que pour tout graphe planaire G et pour tout $A, B \subseteq V$, il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $\frac{3}{2}\Delta(A, B) + c$ couleurs.

Perspectives

Conjecture (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Il existe une constante c telle que pour tout graphe planaire G et pour tout $A, B \subseteq V$, il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $\frac{3}{2}\Delta(A, B) + c$ couleurs.

On note $k(A, B)$ le nombre maximum de sommets de B adjacents à deux sommets donnés de A.

Perspectives

Conjecture (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Il existe une constante c telle que pour tout graphe planaire G et pour tout $A, B \subseteq V$, il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $\frac{3}{2}\Delta(A, B) + c$ couleurs.

On note $k(A, B)$ le nombre maximum de sommets de B adjacents à deux sommets donnés de A.

Conjecture (Amini, E. et Van den Heuvel 2008)

Il existe une constante c telle que pour tout graphe planaire G et pour tout $A, B \subseteq V$, il existe une (A, B)-coloration de G utilisant au plus $\Delta(A, B) + k(A, B) + c$ couleurs.