La conjecture de Vizing: État des lieux

Paul Dorbec
en collaboration avec Bresar, Hartnell, Henning, Klavžar, Rall, Goddard

Équipe GraphComb et ERTÉ "Maths à modeler"
LRI, Université Paris Sud 11, Orsay

JGA 2008

Conjecture de Vizing

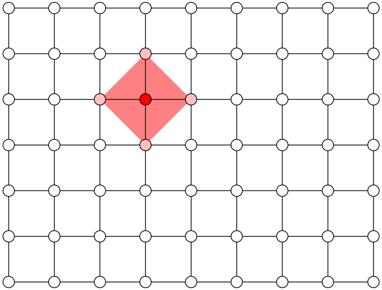
Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes G et H,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$$

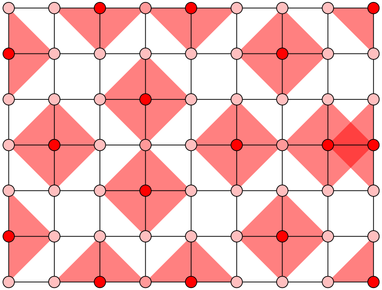
Définitions

Combien de casernes de pompiers sont nécessaires pour protéger tous les villages ? $\longrightarrow$ γ



Définitions

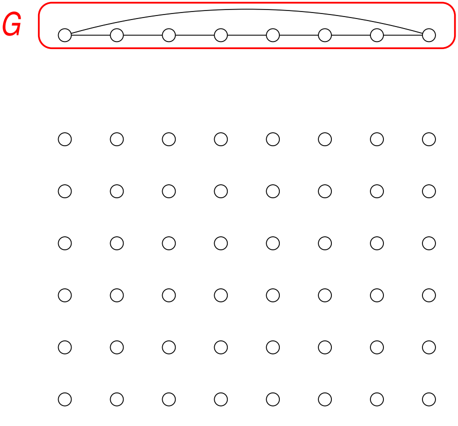
Combien de casernes de pompiers sont nécessaires pour protéger tous les villages ? $\longrightarrow$ γ



ensemble de casernes = recouvrement = dominant

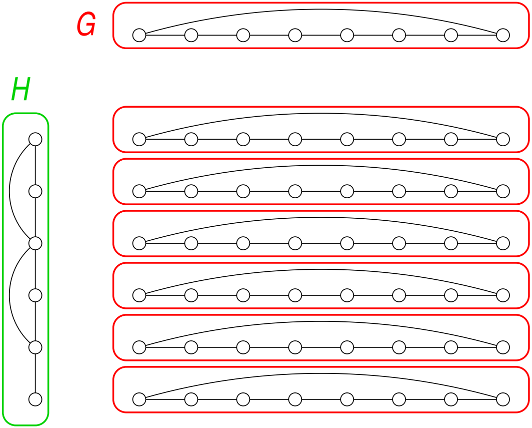
Produit cartésien

Deux graphes G et $H \longrightarrow$ un graphe $G \,\square\, H$



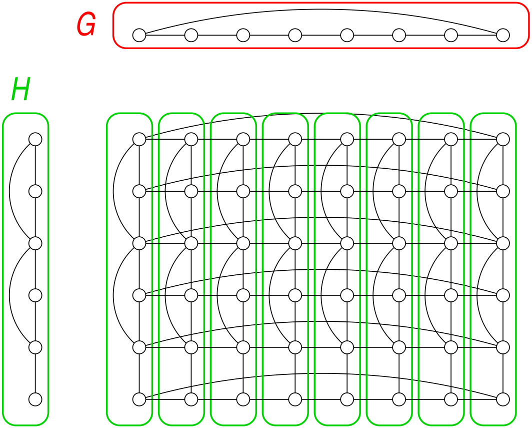
Produit cartésien

Deux graphes G et H $\longrightarrow$ un graphe $G \,\square\, H$



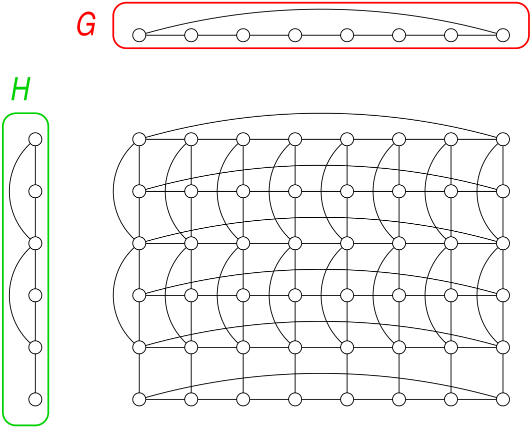
Produit cartésien

Deux graphes G et $H \longrightarrow$ un graphe $G \,\square\, H$



Produit cartésien

Deux graphes G et H $\longrightarrow$ un graphe $G \,\square\, H$



Conjecture de Vizing

Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes G et H,

$$\gamma(G \,\square\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

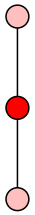
Conjecture de Vizing

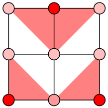
Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes G et H,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

- Pas l'autre inégalité en général : $\gamma(P_3) = 1$ et $\gamma(P_3 \square P_3) = 3$.





Conjecture de Vizing

Conjecture (Vizing, 1968)

Pour tous graphes G et H,

$$\gamma(G \,\Box\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

- Pas l'autre inégalité en général : $\gamma(P_3) = 1$ et $\gamma(P_3 \,\Box\, P_3) = 3$.
- Il existe une infinité de graphes tels que $\gamma(G \,\Box\, H) \leq \gamma(G)\gamma(H)$.

Barcalkin-German

L'un des résultats les plus puissants connus à ce jour :

Théorème [BG 79]

Si G est un BG-graphe, alors pour tout H,

$$\gamma(G \,\Box\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

Barcalkin-German

L'un des résultats les plus puissants connus à ce jour :

Théorème [BG 79]

Si G est un BG-graphe, alors pour tout H,

$$\gamma(G \,\square\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

Un graphe est un BG-graphe s'il existe G' tel que

- G est un graphe partiel de G'
- $\gamma(G') = \gamma(G)$
- G' est arête-maximal : $\forall e, \gamma(G' + e) < \gamma(G')$
- $\Theta(G') = \gamma(G)$ où $\Theta(G')$ nombre de couverture de G' par des cliques

Barcalkin-German

L'un des résultats les plus puissants connus à ce jour :

Théorème [BG 79]

Si G est un BG-graphe, alors pour tout H,

$$\gamma(G \,\square\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

Un graphe est un BG-graphe s'il existe G' tel que

- G est un graphe partiel de G'
- $\gamma(G') = \gamma(G)$
- G' est arête-maximal : $\forall e, \gamma(G' + e) < \gamma(G')$
- $\Theta(G') = \gamma(G)$ où $\Theta(G')$ nombre de couverture de G' par des cliques

$\Rightarrow$ de nombreux résultats en découlent

Contre-exemple minimum

S'il existe un contre exemple minimum, il vérifie

- $\gamma(G) \geq 4$
- $\gamma(G) \geq \rho(G) + 1$
- ce n'est pas un graphe-BG.
- $\gamma(G) > \gamma_f(G)$

En outre, on peut le choisir simultanément :

- arête maximal
- critique pour la contraction d'arête
- tel que tout sommet appartient à un dominant minimum

Inégalité de Clark et Suen

Théorème [CS 00]

Pour tous graphes G et H,

$$2\gamma(G \,\Box\, H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

- Adaptation par Aharoni et Szabó (08) : $\gamma(G \,\Box\, H) \geq \gamma^i(G)\gamma(H)$ où γ^i est le max du nombre de domination d'un stable de G $\Rightarrow$ graphes triangulés.

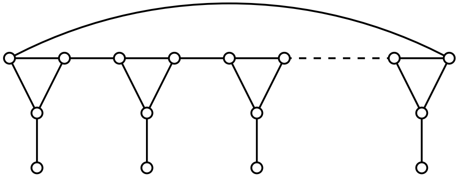
Application aux sans-griffes

Théorème

Soit G un graphe sans griffe. Pour tout H sans sommet isolé,

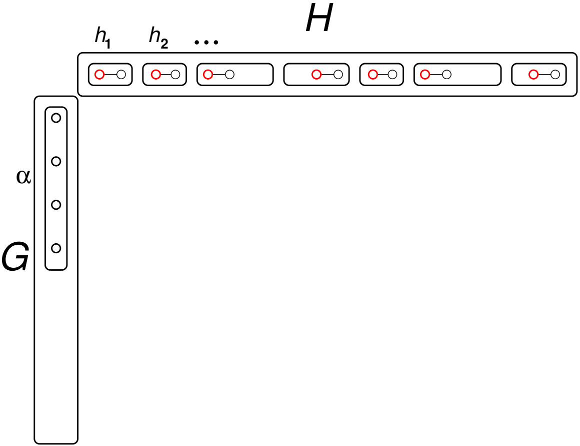
$$\gamma(G \,\square\, H) \geq \frac{1}{2}\alpha(G)(\gamma(H) + 1)\,.$$

- Tout graphe G satisfait $\alpha(G) \geq \gamma(G) \implies \frac{1}{2}$ Vizing.
- Quand $\alpha(G) = 2\gamma(G) \implies$ Vizing.



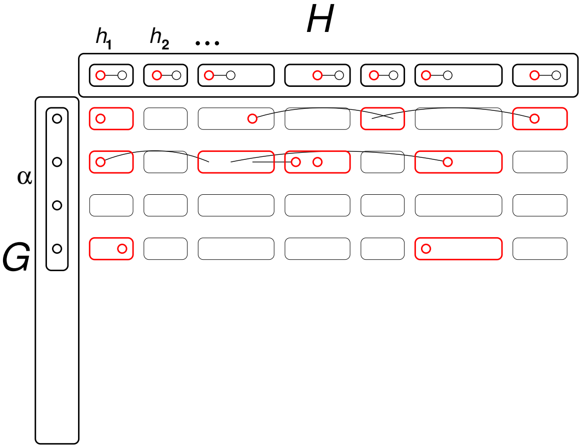
Idée de la preuve

- $h_1, h_2, \ldots, h_{\gamma(H)}$ dominant de H, chaque h_i ayant un voisin privé.
- α un stable de G.



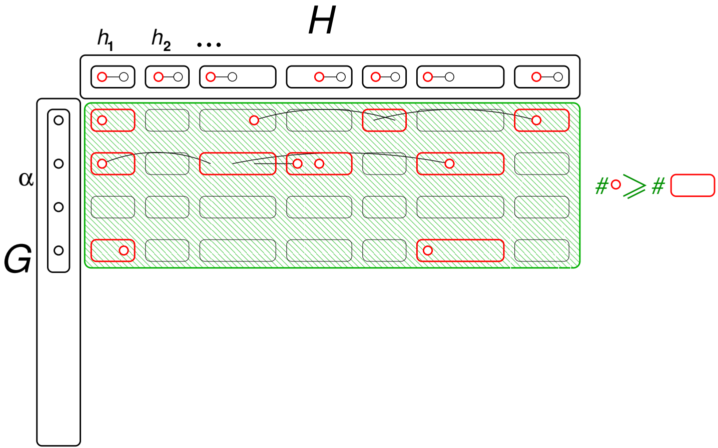
Idée de la preuve

- $h_1, h_2, \ldots, h_{\gamma(H)}$ dominant de H, chaque h_i ayant un voisin privé.
- α un stable de G.



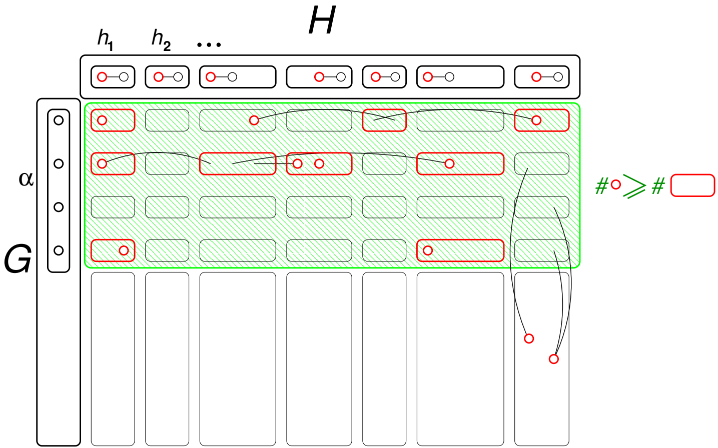
Idée de la preuve

- $h_1, h_2, \ldots, h_{\gamma(H)}$ dominant de H, chaque h_i ayant un voisin privé.
- α un stable de G.



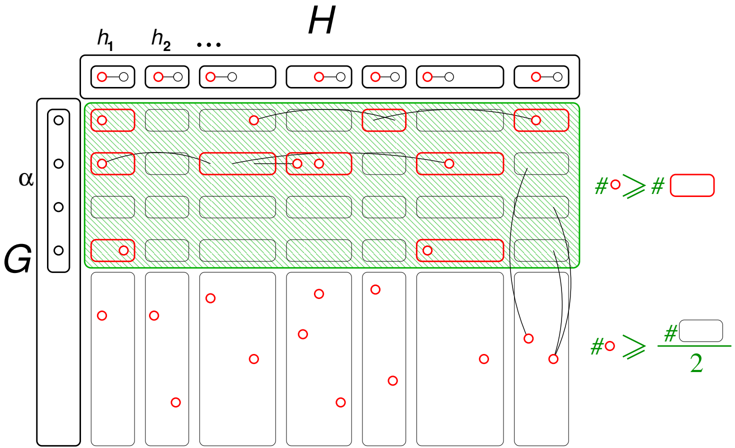
Idée de la preuve

- $h_1, h_2, \ldots, h_{\gamma(H)}$ dominant de H, chaque h_i ayant un voisin privé.
- α un stable de G.

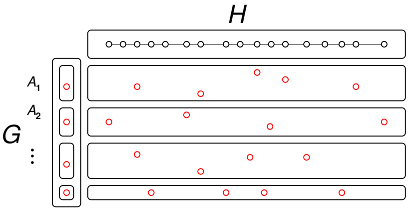


Idée de la preuve

- $h_1, h_2, \ldots, h_{\gamma(H)}$ dominant de H, chaque h_i ayant un voisin privé.
- α un stable de G.



Question plus forte



Soit un graphe G,

peut-on trouver une partition $A_1, A_2, \dots, A_{\gamma(G)} \subset V(G)$ telle que pour tout H il existe D un dominant minimum de $G \,\square\, H$ vérifiant

$$\forall i, 1 \leq i \leq \gamma(G), \quad P_H(D \cap A_i \times H) \text{ domine } H$$

- sous la condition $\rho(A_i) = 1$ ($\Leftrightarrow \; A_i \subseteq N[g_i]$) ?