

# Graphes et Surfaces

Nathann Cohen, Daniel Gonçalves et Frédéric Havet.

JCALM Octobre 2010

Ces notes ont été rédigées pour les journées CALM à Sophia-Antipolis les 19 et 20 octobre mai 2010. Elles reprennent le contenu des exposés de B. Reed, F. Havet et N. Cohen ainsi que le résumé de celui de D. Gonçalves.

## 1 Introduction

## 2 Graphes planaires

### 2.1 Dessin et formule d'Euler

Un dessin  $D$  est un ensemble  $V(D)$  (ou simplement  $V$ ) de points distincts du plan et un ensemble  $E(D)$  (ou  $E$ ) de courbes dans le plan tels que :

- tout élément  $e \in E$  est l'image d'une fonction continue injective de  $[0, 1]$  dans le plan.
- toute courbe  $e \in E$  contient exactement 2 éléments de  $V$ , les images de 0 et de 1.

A tout dessin  $D$  on peut associer de manière canonique un graphe  $G_D$  comme suit. Les sommets sont en bijection avec les points de  $D$  et les arêtes en bijection avec les courbes de  $D$ . Une arête  $e$  de  $G_D$  relie les deux sommets correspondants aux points reliés par la courbe correspondant à  $e$ . On dit que  $D$  est un dessin de  $G$ . Par commodité, nous confondrons souvent les ensembles de sommets et d'arêtes d'un graphe avec les ensembles de points et courbe d'un dessin.

Un dessin  $D$  est *planaire* si deux courbes distinctes sont disjointes sauf éventuellement en des points de  $V(D)$ . Un graphe  $G$  est *planaire* s'il admet un dessin planaire.

**Remarque 1** Evidemment, tout dessin d'un graphe planaire n'est pas forcément planaire.

Une *face* d'un dessin planaire  $D$  est une composante connexe de l'espace obtenu en ôtant  $V \cup E$  du plan. On dénote par  $F(D)$  (ou simplement  $F$ ) l'ensemble des faces de  $D$ . Un élément  $x$  de  $V \cup E$  est *incident* à une face  $f \in F$  s'il est contenu dans son adhérence. La *frontière* de  $f$ , notée  $bd(f)$ , est l'ensemble des éléments de  $V \cup E$  incident à  $f$ .

Le nombre de faces et d'arêtes dans un dessin planaire sont reliés.

**Proposition 2** Pour tout dessin planaire d'un graphe non-vide,  $2|E| \geq 3|F|$ .

**Preuve.** Le résultat est trivial si  $G$  a une ou deux arêtes, car il n'a alors qu'une seule face. Maintenant, si  $G$  a au moins trois arêtes, toute face de  $D$  est incidente à au moins trois arêtes. De plus, une arête est adjacente à au plus deux faces. En comptant le nombre  $I$  d'incidences arête-face, il vient  $2|E| \geq I \geq 3|F|$ .  $\square$

Il existe également une relation entre les nombres de sommets, arêtes, faces et composantes connexes.

**Formule d'Euler** Soit  $D$  un dessin planaire d'un graphe  $G$  et  $comp(G)$  le nombre de composantes connexes de  $G$ .

$$|V| + |F| = |E| + 1 + comp(G)$$

**Preuve.** Par récurrence sur le nombre d'arêtes, le résultat étant trivial si  $|E| = 0$ .

Supposons que maintenant que  $|E| > 0$ . Soit  $e$  une arête de  $G$  et donc une courbe de  $D$ . Alors  $D \setminus e$  est un dessin de  $G \setminus e$ .

Par hypothèses de récurrence,  $|V| + |F(D \setminus e)| = |E(D \setminus e)| + 1 + \text{comp}(G \setminus e) = |E(D)| + \text{comp}(G \setminus e)$ .

Deux cas peuvent se produire : Soit  $e$  est incidente à une seule face de  $D$  auquel cas c'est un pont entre deux composantes de  $G \setminus e$ . On a alors  $\text{comp}(G) = \text{comp}(G \setminus e) + 1$  et  $|F(D)| = |F(D \setminus e)|$ . Soit  $e$  est incidente à deux faces et alors  $G$  n'est pas un pont. Alors  $\text{comp}(G) = \text{comp}(G \setminus e)$  et  $|F(D)| = |F(D \setminus e)| + 1$ .

Dans les deux cas, on obtient la formule d'Euler pour  $D$ . □

La Formule d'Euler et la Proposition 2 implique immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 3** *Pour tout graphe planaire,*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

En particulier,  $K_5$ , le graphe complet à 5 sommets, n'est pas planaire car il a 10 arêtes.

Dans le cas où le graphe  $G$  ne contient pas de triangle, une face est incidente à au moins 4 arêtes. Ainsi de manière analogue à la preuve de la Proposition 2, on obtient que  $2|E| \geq 4|F|$  et donc  $|E| \leq 2|V| - 4$ . Ainsi  $K_{3,3}$  n'est pas planaire, car il n'a pas de triangle et possède 6 arêtes.

## 2.2 Plongement

Le plan est topologiquement équivalent au disque unité ouvert.

**Proposition 4** *Un graphe est planaire si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont.*

**Preuve.** Si un graphe  $G$  est planaire, tout dessin planaire de  $G$  induit un dessin planaire de chacune des composantes.

A l'inverse, si toutes les composantes connexes d'un graphe sont planaires, on peut les dessiner dans des disques disjoints pour obtenir un dessin de  $G$ . □

De plus, le plan est également topologiquement équivalent à la sphère à laquelle on a ôté un point. Ainsi les graphes planaires sont ceux que l'on peut dessiner sans croisement sur la sphère. De plus, comme nous pouvons choisir le point à enlever, on peut choisir n'importe quelle face pour être la face infinie. En particulier, on peut imposer que n'importe quel sommet ou arête soit incident à la face infinie.

**Proposition 5** *Un graphe est planaire si et seulement si ses composantes 2-connexes le sont.*

**Preuve.** Tout dessin planaire d'un graphe induit un dessin planaire de chacune de ses composantes.

Inversement, si  $G$  a un sommet séparateur  $x$ . Soit  $C_1$  une composante de  $G - x$ ,  $G_1 = G \setminus C_1$  et  $G_2 = G - C_1$ . Les deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  admettent chacun un dessin planaire où  $x$  est sur la face infinie. Ainsi on peut "assembler" les dessins de  $G_1$  et  $G_2$  pour obtenir un dessin planaire de  $G$ . □

**Proposition 6** *Soit  $G$  un graphe 2-connexe. Alors dans tout dessin planaire de  $G$ , la frontière de chaque face est un cycle.*

**Preuve.**

Si  $G$  est un graphe planaire connexe alors pour toute face  $f$ , la frontière de  $f$ ,  $bd(f)$  induit un sous-graphe connexe. Notons  $H_f$  ce sous-graphe. Observons que tout sommet séparateur de  $H_f$  est également un sommet séparateur de  $G$ . Ainsi si  $G$  est un graphe planaire 2-connexe, chaque  $H_f$  l'est également.

Or un graphe 2-connexe est soit un cycle soit contient un theta (2 sommets reliés par trois chemins indépendants). Mais le Théorème de Jordan implique que la frontière d'une face ne puisse pas être un theta et donc est un cycle.  $\square$

Cette proposition admet le corollaire très utile suivant.

**Corollaire 7** *Soit  $G$  un graphe planaire 3-connexe. Les voisins de n'importe quel sommet sont dans un même cycle.*

**Preuve.** Considérons un dessin planaire de  $G$ . Soit  $v$  un sommet de  $G$ .  $G - v$  est 2-connexe donc toute face de  $G - v$  est un cycle par la Proposition 6. C'est en particulier vrai pour la face dans laquelle se situait  $v$ . Et tous les voisins de  $v$  doivent être sur la frontière de cette face.  $\square$

De plus, la Proposition 6, nous permet d'introduire la notion de *plongement*. Un *plongement (planaire)* d'un graphe planaire 2-connexe est un ensemble de cycles formés par les frontières des faces d'un dessin planaire de  $G$ . Les plongements sont plus faciles à décrire que les dessins car leur description est finie. De plus, pour tout graphe planaire, il n'existe qu'un nombre fini de plongements possibles. Si le graphe est 3-connexe, il n'en existe d'ailleurs qu'un seul.

**Théorème 8 (Whitney, 1927)** *Tout graphe planaire 3-connexe a un unique plongement.*

### 2.3 Planarité et mineurs exclus

Soit  $e = xy$  une arête d'un graphe  $G = (V, E)$ . On note  $G/e$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en *contractant* l'arête  $e$  en un nouveau sommet  $v_e$ , qui devient adjacent à tous les anciens voisins de  $x$  et  $y$ . Formellement, le graphe  $G/e$  est le graphe d'ensemble de sommets  $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$  (avec  $v_e$  un nouveau sommet, i.e.  $v_e \notin V$ ) et ensemble d'arêtes  $E' = \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid w \in (N_G(x) \cup N_G(y)) \setminus \{x, y\}\}$ .

Un graphe  $H$  est un *mineur* d'un graphe  $G$  s'il peut être obtenu depuis  $G$  par une suite de contractions et de suppressions d'arêtes ou de sommets.

Clairement, si on supprime ou contracte une arête d'un graphe planaire, on obtient un graphe planaire.

**Proposition 9** *Tout mineur d'un graphe planaire est planaire.*

Nous avons vu précédemment que  $K_5$  et  $K_{3,3}$  ne sont pas planaires. En fait, du point de vue des mineurs, ce sont les seules obstructions à la planarité.

**Théorème 10 (Kuratowski)** *Un graphe est planaire si et seulement s'il n'a ni  $K_{3,3}$ , ni  $K_5$  comme mineur.*

Dans le cas des graphes 4-connexes, la condition de n'avoir pas de mineur  $K_{3,3}$  est inutile.

**Théorème 11 (Wagner)** *Soit  $G$  un graphe 4-connexe.  $G$  est planaire si et seulement s'il n'a pas de mineur  $K_5$ .*

### 2.4 Preuve du Théorème de Kuratowski

Nous donnons maintenant une preuve du Théorème 10 due à Thomassen [31]. Elle se fait en considérant un contreexemple minimal  $G$ , i.e. un graphe non planaire qui n'a pas de mineur  $K_{3,3}$  ni de mineur  $K_5$  mais tel que tout graphe non-planaire ayant moins de sommets ait un de ces deux graphes pour mineur.

Comme la majorité des preuves du Théorème de Kuratowski, la première étape consiste à montrer que  $G$  est 3-connexe.

**Assertion 1**  *$G$  est 3-connexe.*

**Preuve.** Clairement, la Proposition 5 implique que  $G$  est 2-connexe.

Supposons maintenant que  $G$  ait un 2-séparateur  $\{x, y\}$ . Soit  $U$  une composante de  $G - \{x, y\}$ . Considérons les deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  obtenu à partir de  $G - U$  et  $G - (V \setminus (X \cup U))$  en ajoutant l'arête  $xy$  si celle-ci n'est pas déjà dans  $G$ . Observons que  $G_1$  et  $G_2$  sont planaires : en effet, comme  $G$  est 2-connexe, il existe dans chacun des  $G - U$  et  $G - (V \setminus (X \cup U))$  un chemin de  $x$  à  $y$ . Ainsi  $G_1$  et  $G_2$  sont des mineurs de  $G$ , ils n'ont donc ni  $K_{3,3}$  ni  $K_5$  comme mineur et donc sont planaires.

Les deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  admettent chacun un dessin planaire pour lequel l'arête  $xy$  est sur la face infinie. Ainsi on peut "assembler" les dessins de  $G_1$  et  $G_2$  pour obtenir un dessin planaire de  $G$ . Cela contredit la non-planarité de  $G$ .  $\square$

La second étape utilise le fait que dans un graphe 3-connexe, il existe une arête dont la contraction laisse le graphe 3-connexe.

**Lemme 12** *Si  $G$  est 3-connexe et  $|V(G)| > 4$  alors  $G$  a une arête  $e$  telle que  $G/e$  est 3-connexe.*

**Preuve.** Supposons qu'il n'existe pas de telle arête  $e$ . Alors pour toute arête  $xy$  de  $G$ , le graphe  $G/xy$  contient un ensemble séparateur  $S$  d'au plus 2 sommets. Puisque  $\kappa(G) \geq 3$ , le sommet contracté  $v_{xy}$  de  $G/xy$  est dans  $S$  et  $|S| = 2$ . Soit  $z$  le sommet de  $S$  distinct de  $v_{xy}$ . Alors  $\{x, y, z\}$  est un séparateur de  $G/xy$ . Comme aucun sous-ensemble propre de  $\{x, y, z\}$  n'est un séparateur de  $G$ , tout sommet de  $\{x, y, z\}$  a un voisin dans chaque composante de  $G - \{x, y, z\}$ .

Prenons  $x, y$  et  $z$  tels qu'une composante  $C$  de  $G - \{x, y, z\}$  soit la plus petite possible. Soit  $v$  un voisin de  $z$  dans  $C$ . Par hypothèse,  $G/zv$  n'est pas 3-connexe donc il existe un sommet  $w$  tel que  $\{z, v, w\}$  sépare  $G$ . Comme précédemment chaque sommet de  $\{z, v, w\}$  a un voisin dans chaque composante de  $G - \{z, v, w\}$ .

Comme  $x$  et  $y$  sont adjacents, il y a une composante  $D$  de  $G - \{z, v, w\}$  qui ne contient ni  $x$  ni  $y$ . Ainsi tout voisin de  $v$  dans  $D$  est nécessairement dans  $D$  car  $v \in C$ . Ainsi  $D$  et  $C$  s'intersectent et donc  $D \subsetneq C$  d'après la définition de  $D$ . Ceci contredit la minimalité de  $C$ .  $\square$

Le contreexemple minimal au Théorème de Kuratowski est 3-connexe, d'après l'Assertion 1. D'après le Lemme 12, il existe une arête  $e - xy$  telle que  $H = G/e$  est 3-connexe.

Comme  $H$  est un mineur de  $G$ , tout mineur de  $H$  est un mineur de  $G$ . Ainsi  $H$  n'a pas de mineur  $K_{3,3}$  ou  $K_5$  et donc est planaire par minimalité de  $G$ .

Soit  $\tilde{H}$  un dessin planaire de  $H$  et notons  $z$  le sommet obtenu en contractant  $e$ . Comme  $H$  est 3-connexe, d'après le Corollaire 7, les voisins de  $z$  sont sur un cycle  $C$  correspondant à la face de  $\tilde{H} - z$  où se situe  $z$ . Ainsi les voisins de  $x$  et de  $y$  sont sur  $C$ . Trois cas peuvent se produire :

- (a) Il existe un sous-chemin  $P$  de  $C$  d'extrémité  $a$  et  $b$  tel que  $N(x) \subset V(P)$  et  $N(y) \subset V(C) \setminus (V(P) \setminus \{a, b\})$ .
- (b)  $N(x) \cap N(y) \geq 3$ .
- (c) il existe quatre sommets distincts  $x_1, x_2, y_1, y_2$  tels que  $x_1, x_2 \in N(x)$ ,  $y_1, y_2 \in N(y)$  et les  $x_i$  et les  $y_i$  alternent sur le cycle.

Dans le cas (a), il est facile d'obtenir un dessin planaire de  $G$ . Dans le cas (b),  $G$  contient un mineur  $K_5$  et dans le cas c,  $G$  contient un mineur  $K_{3,3}$ . **faire les figures.**

Ceci termine la preuve du Théorème de Kuratowski.

## 2.5 Preuve du Théorème de Whitney

Considérons un contreexemple  $G$  au Théorème 8 avec le nombre minimum de sommets et le plus grand nombre d'arêtes sous cette restriction.

Nous montrons tout d'abord que  $G$  est 4-connexe.

**Assertion 2**  *$G$  est 4-connexe.*

**Preuve.** Supposons que  $G$  ne soit pas 3-connexe, alors  $G$  admet un 3-séparateur  $X = \{x, y, z\}$ . Soit  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  les composantes connexes de  $G - X$ . Comme  $G$  est 3-connexe, tout sommet de  $X$  a un voisin dans chacune des  $U_i$ .

Si  $p \geq 3$ , alors en contractant chacun des  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , en un seul sommet  $u_i$  et en otant les arêtes internes à  $X$ , on obtient un  $K_{3,3}$  de bipartition  $(X, \{u_1, u_2, u_3\})$ . Ainsi  $K_{3,3}$  est un mineur de  $G$ , ce qui contredit le Théorème de Kuratowski. Donc  $G - X$  a deux composantes  $U_1$  et  $U_2$ .

Pour  $i = 1, 2$ , posons  $G_i = G - U_{3-i}$ . Comme tout séparateur d'un  $G_i$  est un séparateur de  $G$ , chacun des  $G_i$  est 3-connexe. Ainsi,  $G_1$  et  $G_2$  ont moins de sommets que  $G$  et donc ont chacun un unique plongement planaire.

Supposons tout d'abord que  $X$  induit un triangle  $T$  dans  $G$ . Ce triangle est une face pour le plongement de chaque  $G_i$  car  $G_i - X = G \setminus U_i$  est connexe. Maintenant le triangle  $T$  n'est pas une face dans un plongement de  $G$ . Sinon, en ajoutant un sommet  $z$  incident à tous les sommets de  $X$  dans cette face, on obtient un graphe planaire qui contient un  $K_{3,3}$  mineur de bipartition  $(X, \{u_1, u_2, z\})$  avec  $u_i$  obtenu en contractant  $U_i$ . Ainsi dans tout dessin de  $G$ , le triangle  $T$  sépare  $U_1$  de  $U_2$  (i.e.  $U_1$  et  $U_2$  sont dans des composantes simplement connexes différentes du plan privé de la courbe correspondant au triangle  $X$ ). Donc les faces d'un plongement  $G$  sont celles d'un plongement de  $G_1$  plus celles d'un plongement de  $G_2$  moins  $T$ . Comme  $G_1$  et  $G_2$  ont des plongements uniques, celui de  $G$  est également unique.

Supposons maintenant que  $X$  n'induit pas un triangle. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents. Dans tout plongement de  $G$ ,  $x$  et  $y$  sont dans une même face. En effet, s'ils ne l'étaient pas ils seraient séparés par un cycle  $C$ . Ce cycle ne peut pas intersecter à la fois  $U_1$  et  $U_2$  car il ne peut intersecter  $X$  qu'en  $z$ . Ainsi il est entièrement contenu dans un des  $G_i$ , disons  $G_1$ . Mais le chemin de  $x$  à  $y$  dans  $G_2$  doit croiser  $C$ , une contradiction.

Ainsi le graphe  $G'$  obtenu en ajoutant l'arête  $xy$  à  $G$  est planaire. D'après la définition de  $G$ ,  $G'$  admet un unique plongement planaire. Mais à tout plongement de  $G$  correspond le plongement de  $G'$  obtenu en remplaçant la frontière  $C$  de la face contenant  $x$  et  $y$  par les deux cycles de  $C \cup xy$ . Donc  $G$  a également un unique plongement.

□

$G$  est donc 4-connexe. Contractons une arête  $xy$  en un sommet  $z$  pour obtenir le graphe  $G'$ . Alors  $G'$ ,  $G - x$  et  $G - y$  sont 3-connexes. Par définition de  $G$ , ils admettent chacun un unique plongement planaire. De plus, ces plongements coïncident sur  $G - \{x, y\}$ . On peut alors voir qu'il y a une unique manière de modifier ces plongements en un plongement de  $G$ .

Ceci termine la preuve du Théorème 8.

## 3 Graphes dans les surfaces

### 3.1 Classification des surfaces

Soit  $S$  une sphère et  $D_1$  et  $D_2$  deux disques disjoints de même rayon sur  $S$  et  $H$  un cylindre de même rayon que  $D_1$  et  $D_2$ . L'ajout d'une anse à  $S$  en  $D_1$  et  $D_2$  consiste à ôter  $D_1$  et  $D_2$ , à plier  $H$  sur  $S$  de manière à ce qu'un des bords de  $H$  coïncide avec  $D_1$  et l'autre bord avec  $D_2$ . On peut ainsi ajouter un nombre arbitraire d'anses en prenant des paires de disques disjoints pour les ajouter. La sphère avec  $k$  anses  $\mathbb{S}_k$  est la surface obtenue à partir de la sphère en ajoutant  $k$  anses. Les surfaces  $\mathbb{S}_1$  et  $\mathbb{S}_2$  sont aussi appelées le *tore*, le *double tore*.

Soit  $S$  une sphère,  $D$  un disque sur  $S$  et  $R$  un ruban de Möbius dont la frontière à la même longueur que la circonférence de  $D$ . L'ajout d'un cross-cap à  $S$  en  $D$  consiste à attacher  $B$  à  $S$  de manière à ce que les frontières de  $B$  et  $D$  coïncident. De manière, équivalente, cela revient à "identifier" chaque point de  $D$  avec son point antipodal. Comme avec les anses, on peut ajouter un nombre arbitraire de cross-caps. La sphère avec  $k$  cross-caps  $\mathbb{N}_k$  est la surface obtenue à partir de la sphère en ajoutant  $k$  cross-caps. Les surfaces  $\mathbb{N}_1$ ,  $\mathbb{N}_2$  sont aussi appelées le *plan projectif*, et la *bouteille de Klein*.

Un important théorème en topologie des surfaces est le Théorème de Classification des Surfaces :

**Théorème 13** Toute surface fermée est homéomorphe soit à un  $\mathbb{S}_k$  soit à un  $\mathbb{N}_k$ .

## 3.2 Graphes dessinables sur une surface et formule d'Euler

De manière analogue à celle de dessin planaire, on peut définir la notion de dessin sur une surface. Voir Sous-Partie 2.1. La Formule d'Euler se généralise elle-aussi.

Le *genre (d'Euler)* d'une surface  $\Sigma$ , noté  $g(\Sigma)$  est

$$g(\Sigma) = \begin{cases} 2k, & \text{si } \Sigma \text{ est homéomorphe à } \mathbb{S}_k ; \\ k, & \text{si } \Sigma \text{ est homéomorphe à } \mathbb{N}_k. \end{cases}$$

La *caractéristique (d'Euler)* d'une surface  $\Sigma$  est  $c(\Sigma) = 2 - g(\Sigma)$ .

Soit  $\tilde{G}$  un plongement d'un graphe connexe dessinable dans une surface  $\Sigma$  alors la Formule d'Euler généralisée nous donne

$$|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F(\tilde{G})| = c(\Sigma). \quad (1)$$

Comme une marche faciale à au moins trois arêtes et qu'une arête est dans deux marches faciales (ou deux fois dans la même)  $2|E(\tilde{G})| \geq 3|F(\tilde{G})|$  et donc

$$|E(\tilde{G})| \leq 3|V(\tilde{G})| - 3c(\Sigma) = 3|V(\tilde{G})| - 6 + 3g(\Sigma). \quad (2)$$

## 3.3 Dessin circulaire et Cycle Double Cover

La Proposition 5 nous dit que dans un dessin sur la sphère (planaire) d'un graphe 2-connexe, les faces sont des cycles. Cela veut dire que chaque face est homéomorphe à un disque. Ceci n'est plus vrai pour les dessins sur les autres surfaces. En effet, il est facile de voir que  $K_4$  admet un dessin sur le tore dont une des faces est homéomorphe à un cylindre **dessin**.

Un dessin  $\tilde{G}$  de  $G$  sur une surface  $\Sigma$  est dit *circulaire* si toutes les faces sont délimitées par des cycles.

Jaeger [17] a proposé la conjecture suivante :

**Conjecture 14 (Jaeger [17])** *Tout graphe 2-connexe admet un dessin circulaire sur une des  $\mathbb{S}_k$ .*

Cette conjecture impliquerait la célèbre Conjecture de la Double Couverture par des Cycles (Cycle Double Cover). Une collection de cycles  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_p\}$  d'un graphe  $G$  est une *couverture double par des cycles* si toute arête de  $G$  est contenue dans exactement deux cycles de  $\mathcal{C}$ .

Szekeres [30] et Seymour [29] ont tous deux conjecturé que tout graphe sans pont (i.e. arête séparatrice) admet une couverture double par des cycles.

**Conjecture 15 (Cycle Double Cover Conjecture)** *Tout graphe sans pont admet une couverture double par des cycles.*

Cette conjecture serait impliquée par la Conjecture 14. En effet, si un graphe admet un dessin circulaire du graphe sur une surface, alors l'ensemble des cycles faciaux est une couverture double par des cycles.

# 4 Coloration de graphes plongeables dans une surface

## 4.1 Rappel succinct de coloration

Une *coloration* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $c : V \rightarrow S$ . Les éléments de  $S$  sont appelés les *couleurs*. Comme la seule chose de  $S$  qui nous intéresse est sa taille, on considère souvent que  $S = \{1, 2, \dots, k\}$ . Une *k-coloration* d'un graphe  $G$  est une coloration de  $G$  à valeur dans  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Une coloration  $c$  est *propre* si pour toute arête  $uv \in E(G)$ ,  $c(u) \neq c(v)$ . Un graphe est *k-colorable* s'il admet une *k-coloration* propre. Le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit *k-colorable* est le *nombre chromatique* de  $G$ , noté  $\chi(G)$ .

Soit  $G$  un graphe. Une *assignation de listes* est une fonction  $L : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Une *L-coloration* est une application  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $c(v) \in L(v)$  pour tout  $v \in V(G)$ . Un graphe est *L-colorable* s'il admet une

$L$ -coloration propre, i.e. telle que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Une  $k$ -assignation de listes est une assignation de listes  $L$  telle que  $|L(v)| = k$  pour tout sommet  $v$ . Un graphe est  $k$ -choisissable s'il est  $L$ -colorable pour toute  $k$ -assignation de listes  $L$ . La *choisissabilité* ou *nombre de choix* d'un graphe  $G$ , notée  $ch(G)$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit  $k$ -choisissable.

Par définition, tout graphe  $k$ -choisissable est  $k$ -colorable. Ainsi pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \leq ch(G)$ .

La *dégénérescence* de  $G$  est  $\delta^*(G) = \max\{\delta(H) \mid H \text{ sous-graphe de } G\}$ . Pour tout ordre  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $G$ , chaque sommet  $v_i$  a au plus  $\delta^*(G)$  voisins dans  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . Ainsi si pour chaque sommet  $v$ ,  $|L(v)| \geq \delta^* + 1$  alors en colorant suivant l'algorithme glouton on obtient une  $L$ -coloration propre de  $G$ .

**Proposition 16** *Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \leq ch(G) \leq \delta^*(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ .*

Le borne  $\Delta(G) + 1$  pour les nombres chromatique et de choix d'un graphe est atteinte pour les graphes complets et les cycles impairs. Cependant, elle n'est atteinte que pour ces graphes comme le montre le Théorème de Brooks généralisé à la coloration par listes.

**Théorème 17** *Soit  $G$  un graphe connexe. Si  $G$  n'est ni un graphe complet ni un cycle impair alors  $\chi(G) \leq ch(G) \leq \Delta(G)$ .*

## 4.2 Nombre chromatique d'une surface

L'Equation 2 implique que si  $G$  est plongeable dans une surface  $\Sigma$  alors  $\delta^*(G) \leq 6 - \frac{6c(\Sigma)}{|V(G)|}$ . Donc

$$\chi(G) \leq ch(G) \leq 7 - \frac{6c(\Sigma)}{|V(G)|}. \quad (3)$$

Pour une surface  $\Sigma$ , le plus petit entier  $k$  telle que tout graphe plongeable sur  $\Sigma$  soit  $k$ -colorable (resp.  $k$ -choisissable) est appelé le *nombre chromatique* (resp. *nombre de choix*) de  $\Sigma$ , et noté  $\chi(\Sigma)$  (resp.  $ch(\Sigma)$ ).

Si la surface  $\Sigma$  est de caractéristique strictement positive, c'est à dire si c'est la sphère ou le plan projectif, (3) donne  $\chi(\Sigma) \leq ch(\Sigma) \leq 6$ .

Si  $c(\Sigma) \leq 0$  on peut également dériver une borne supérieure pour  $\chi(\Sigma)$  et  $ch(\Sigma)$ . Comme  $ch(G) \leq |V(G)|$ , (3) donne l'inégalité  $ch(G) \leq 7 - \frac{6c(\Sigma)}{ch(G)}$ , et donc  $ch(G)^2 - 7ch(G) + 6c(\Sigma) \leq 0$ , soit  $(ch(G) - \alpha)(ch(G) - \beta) \leq 0$  avec  $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{49 - 24c(\Sigma)})$ . Nous obtenons alors l'Inégalité d' Heawood [16] :

$$\chi(\Sigma) \leq ch(\Sigma) \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24c(\Sigma)}) \right\rfloor. \quad (4)$$

Franklin a montré [12] que cette inégalité n'est pas serrée pour la bouteille de Klein dont le nombre chromatique est 6 (l'inégalité ci-dessus donne 7 puisque la caractéristique de la bouteille de Klein vaut 0).

**Proposition 18**  $\chi(\mathbb{N}_2) = ch(\mathbb{N}_2) = 6$ .

**Preuve.** Il est facile de voir que le graphe complet à six élément  $K_6$  est plongeable dans la bouteille de Klein. Donc  $ch(\chi(\mathbb{N}_2)) \geq \chi(\mathbb{N}_2) \geq 6$ .

Par la Formule d'Euler, tout graphe plongeable dans la bouteille de Klein est soit 6-régulier ou a un sommet de degré au plus 5. Comme  $K_7$  n'est pas plongeable dans la bouteille de Klein, une récurrence facile et le Théorème 17 implique que tout tel graphe est 6-choisissable. Ainsi  $\chi(\mathbb{N}_2) \leq ch(\mathbb{N}_2) \leq 6$ .  $\square$

Cependant la bouteille de Klein est la seule exception comme l'ont montré Ringel et Youngs [25] qui ont montré que le graphe complet à  $\left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24c}) \right\rfloor$  est plongeable dans toute surface de caractéristique  $c \leq 0$ .

**Théorème 19 (Map-Colour Theorem)** Soit  $\Sigma$  une surface de caractéristique  $c(\Sigma) \leq 0$  différente de la bouteille de Klein. Alors

$$\chi(\Sigma) = ch(\Sigma) = \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24c(\Sigma)}) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 24g(\Sigma)}) \right\rfloor.$$

Il reste deux surfaces qui ont une caractéristique strictement positive, à savoir la sphère et le plan projectif pour lesquelles nous n'avons pas encore déterminé le nombre chromatique et le nombre de choix. Il est facile de trouver un plongement de  $K_6$  dans le plan projectif. Ainsi  $\chi(\mathbb{N}_1) = ch(\mathbb{N}_1) = 6$ .

Pour la sphère (et donc le plan), la situation est plus complexe (et les preuves aussi !). En effet, comme nous allons le voir dans la sous-partie suivante la borne d'Heawood excède de 2 le nombre chromatique de la sphère et d'un son nombre de choix.

### 4.3 Coloration des graphes planaires

Nous avons vu précédemment que les graphes planaires étaient 5-dégénérés et donc 6-choisissables. En fait, Thomassen [32] a montré qu'ils sont 5-choisissables.

Pour montrer la 5-choisissabilité, nous montrons un résultat un peu plus fort. Pour cela, nous avons besoin de définition.

**Définition 20** Soit  $G$  un graphe planaire et  $F$  sa face externe. Une assignation de listes sur un graphe planaire est *convenable* s'il existe deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  voisins sur  $F$  tels que  $|L(v_1)| = |L(v_2)| = 1$  et  $L(v_1) \neq L(v_2)$ ,  $|L(v)| \geq 3$  si  $v \in V(F) \setminus \{v_1, v_2\}$  et  $|L(v)| \geq 5$  si  $v \in V(G) \setminus V(F)$ .

**Théorème 21 (Thomassen [32])** Soit  $G$  un graphe planaire. Pour toute assignation de listes convenable  $L$ ,  $G$  est  $L$ -colorable.

**Preuve.** Par récurrence sur le nombre de sommets de  $G$ . Le résultat est trivial pour trois sommets. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'intérieur de  $G$  est triangulé. Autrement dit toutes les faces sauf  $F$  sont des triangles.

Notons  $F = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ .

Supposons d'abord que  $F$  a une corde  $vw$ . Celle-ci est sur deux cycles dans  $F + vw$ , l'un  $C_1$  contenant  $v_1v_2$ , l'autre  $C_2$ . Pour  $i = 1, 2$ , soit  $G_i$  le graphe induit par les sommets sur ou à l'intérieur de  $C_i$ . Voir Figure 1. Par hypothèse de récurrence, il existe une  $L$ -coloration propre  $c_1$  de  $G_1$ . L'assignation de listes  $L_2$  définie par  $L_2(v) = c_1(v)$ ,  $L_2(w) = c_1(w)$  et  $L_2(u) = L(u)$  si  $u \in V(G_2) \setminus \{v, w\}$  est convenable pour  $G_2$ .  $G_2$  admet donc une  $L_2$ -coloration propre  $c_2$  par hypothèse de récurrence. L'union de  $c_1$  et  $c_2$  est alors une  $L$ -coloration propre de  $G$ .

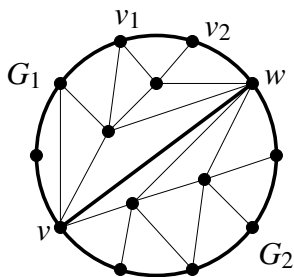


FIGURE 1 – Configuration quand  $F$  a une corde

Supposons maintenant que  $F$  n'ait pas de corde. Soit  $v_1, u_1, u_2, \dots, u_m, v_{k-1}$  les voisins de  $v_k$  dans leur ordre cyclique naturel autour de  $v_k$ . Tous les  $u_i$  ne sont pas dans  $F$  car il n'y a pas de cordes, et comme l'intérieur de  $G$  est



triangulé,  $(v_1, u_1, u_2, \dots, u_m, v_{k-1}) = P$  est un chemin. Ainsi le graphe  $G - v_k$  a pour face externe  $F' = P \cup (F - v_k)$ . Voir Figure 2. Soit  $c_3$  et  $c_4$  deux couleurs de  $L(v_k) \setminus \{c_1\}$ . Posons  $L_1(u_i) = L(u_i) \setminus \{c_3, c_4\}$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $L_1(v) = L(v)$  si  $v \notin \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ .  $L_1$  est convenable pour  $G - v_k$ . Il existe donc une  $L_1$ -coloration propre  $c$  de  $G - v_k$ . Celle-ci peut être étendue en une  $L$ -coloration propre de  $G$  en colorant  $v_k$  par une couleur de  $\{c_3, c_4\} \setminus c(v_{k-1})$ .  $\square$

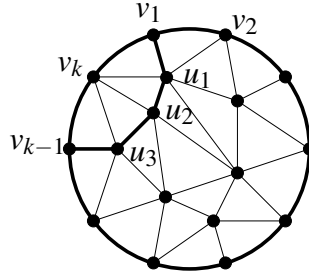


FIGURE 2 – Configuration quand  $F$  n'a pas de cord

**Théorème 22 (Voigt [36])** *Il existe des graphes planaires qui ne sont pas 4-choisissables.*

**Preuve.** Soit  $H$  le graphe et  $L_{i,j}$  l'assignation de listes représentés Figure 3. Il est facile de vérifier que pour  $i, j \geq 5$ ,

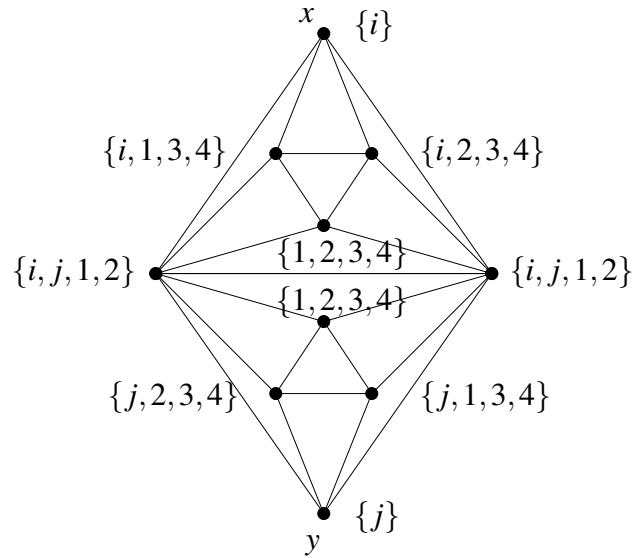


FIGURE 3 – Le graphe  $H$  et l'assignation de listes  $L_{i,j}$

$H$  n'est pas  $L_{i,j}$ -colorable. Soit  $G$  le graphe obtenu à partir de 16 copies de  $H$ ,  $H_{i,j}$  pour  $5 \leq i \leq 8$  et  $9 \leq j \leq 12$ , en identifiant les sommets  $x$  et  $y$ . Soit  $L$  l'assignation de listes définie par  $L(x) = \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $L(y) = \{9, 10, 11, 12\}$  et  $L(v) = L_{i,j}(v)$  si  $v \in V(H_{i,j}) \setminus \{x, y\}$ .

$G$  n'est alors pas  $L$ -colorable. Il n'est donc pas 4-choisissable.  $\square$

Cependant, le célèbre Théorème des Quatre Couleurs par Appel et Haken [3, 4, 5] établit que tout graphe planaire est 4-colorable. Une preuve plus simple a été présentée par Robertson, Sanders, Seymour and Thomas [26, 27].

**Théorème 23 (Appel and Haken [3, 4, 5])** *Tout graphe planaire est 4-colorable.*

Le Théorème des 4 couleurs est équivalent à l’assertion suivante : l’ensemble de sommets de tout graphe planaire  $G$  admet une bipartition  $(V_1, V_2)$  telle que  $G[V_1]$  et  $G[V_2]$  sont bipartis. Le conjecture suivante est une généralisation naturelle à la coloration sur listes.

**Conjecture 24 (Kündgen et Ramamurthi [20])** *Soit  $L$  une 2-assignation de listes d’un graphe planaire  $G$ . Alors il existe une  $L$ -coloration de  $G$  telle qu’aucun cycle impair n’est monochromatique.*

Cette conjecture est trivialement vérifiée pour les graphes 4-choisissables. Il suffit de remplacer chaque 2-liste  $\{a, b\}$  par  $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ . Un premier pas vers cette conjecture à été montré par Thomassen. Il a montré [35] que pour toute 2-assignation de listes  $L$  d’un graphe planaire  $G$ , il existe une  $L$ -coloration de  $G$  telle qu’aucun triangle n’est monochromatique.

#### 4.4 Graphes critiques et $k$ -colorabilité

Posons  $H(g) = \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 24g}) \rfloor$ . L’inégalité d’Heawood (4) affirme que tout graphe plongeable dans une surface de genre  $g$  est de nombre chromatique au plus  $H(g)$ . Ceci a été étendue par Dirac [9, 10] qui a montré que le nombre chromatique d’un graphe  $G$  plongeable sur une surface de genre strictement positif  $g \notin \{1, 3\}$  est  $(H(g) - 1)$ -colorable sauf si  $G$  contient un sous-graphe complet d’ordre  $H(g)$ . Plus de vingt ans plus tard, Albertson and Hutchinson [2] l’ont prouvé pour les cas manquants ( $g = 1, 3$ ).

**Théorème 25 (Dirac [9, 10] ; Albertson and Hutchinson [2])** *Soit  $G$  un graphe plongeable sur une surface de genre  $g \geq 1$ . Alors  $\chi(G) < H(g)$  sauf si  $G$  contient  $K_{H(g)}$  comme sous-graphe.*

Le Théorème 25 a été étendu à la coloration sur listes par Böhme, Mohar et Stiebitz [7] excepté pour les surfaces de genre 3 qui a ensuite été traité par Král’ et Škrekovski [19].

**Théorème 26 (Böhme, Mohar and Stiebitz [7] ; Král’ and Škrekovski [19])** *Soit  $G$  un graphe plongeable sur une surface de genre  $g \geq 1$ . Alors  $ch(G) < H(g)$  sauf si  $G$  contient  $K_{H(g)}$  comme sous-graphe.*

Le Théorème 25 a initié l’étude des graphes critiques plongeables sur une surface. Un graphe  $G$  est  $k$ -critique si  $\chi(G) = k$  et  $\chi(G') < k$  pour tout sous-graphe propre  $G'$  de  $G$ . Clairement, tout graphe de nombre chromatique  $k$  a un sous-graphe  $k$ -critique.

Ainsi les Théorèmes 19 et 25 impliquent que pour toute surface autre que la sphère et la bouteille de Klein,  $K_{\chi(\Sigma)}$  est l’unique graphe  $\chi(\Sigma)$ -critique plongeable sur  $\Sigma$ . Il est alors naturel d’étudier les graphes  $k$ -critiques plongeables sur  $\Sigma$  pour  $k$  inférieur à  $\chi(\Sigma)$ .

Fisk [11] a prouvé que pour toute surface autre que le plan, la liste des graphes 5-critiques est infinie. D’autre part, pour  $k \geq 8$ , il y a seulement un nombre fini de graphes  $k$ -critiques qui sont plongeable dans une surface donnée de genre au moins 3. (Si le genre est inférieur à 3, il n’y en a aucun d’après l’inégalité d’Heawood.) Le nombre de graphes 7-critiques plongeables dans une surface donnée est lui aussi fini comme l’a remarqué Thomassen dans [33].

**Théorème 27** *Soit  $\Sigma$  une surface de genre  $g \geq 3$  et  $G$  un graphe  $k$ -critique sur  $\Sigma$ .*

- (i) *Si  $k \geq 8$ , alors  $|V(G)| \leq \frac{6(g-2)}{k-7}$ .*
- (ii) *Si  $k = 7$ , alors  $|V(G)| \leq 69(g-2)$ .*

**Preuve.** Dans un graphe  $k$ -critique, tout sommet  $v$  a degré au moins  $k - 1$ . (Sinon toute  $(k - 1)$ -coloration propre de  $G - v$  peut être étendue en une  $(k - 1)$ -coloration propre de  $G$ .) Ainsi par (2),  $6|V(G)| - 12 + 6g \geq 2|E(G)| \geq (k - 1)|V(G)|$ . Ceci implique le résultat lorsque  $k \geq 8$ .

Quand  $k = 7$ , on utilise la même méthode avec une meilleure borne inférieure sur le nombre d'arête d'un graphe  $k$ -critique distinct de  $K_k$  due à Gallai [13, 14]]

$$2E(G) \leq (k - 1)|V(G)| + \frac{k - 3}{k^2 - 3}|V(G)| + \frac{2(k - 1)}{k^2 - 3}.$$

□

**Corollaire 28** *Pour tout entier  $k \geq 6$  et toute surface  $\Sigma$ , on peut décider en temps polynomial si un graphe plongeable dans  $\Sigma$  est  $k$ -colorable.*

Un algorithme en temps linéaire pour décider cela, qui de plus renvoie une  $k$ -coloration propre si elle existe, fonctionne comme suit. Enlever successivement les sommets de degré inférieur à  $k$  jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus. Si  $k = 6$ , alors on enlève également les sommets de degré 6 si tous ses voisins ont degré 6 et induisent un cycle. Après cela, le nombre de sommets du graphe restant  $H$  est borné par une constante dépendant uniquement de  $\Sigma$ . De plus, toute  $k$ -coloration propre de  $H$  peut être étendue de manière gloutonne (avec une petite modification quand  $k = 6$ ), et donc en temps linéaire en une  $k$ -coloration propre de  $G$ . Donc  $G$  est  $k$ -colorable si et seulement si  $H$  est  $k$ -colorable ce qui peut être testé en temps constant en essayant toutes les possibilités.

Enfin, Thomassen [34] a montré que le nombre de graphes 6-critiques plongeables dans une surface donnée est fini.

**Théorème 29 (Thomassen [34])** *Pour toute surface  $\Sigma$ , il y a un nombre fini de graphes 6-critiques plongeables sur  $\Sigma$ .*

Malheureusement, obtenir la liste des graphes 6-critiques pour une surface donnée est une gageure. Les seules surfaces pour laquelle la liste exacte est connue sont le plan (qui n'a pas de graphes 6-critiques), le plan projectif (avec  $K_6$  seul), le tore [33] et la bouteille de Klein [8, 18].

**Corollaire 30** *Pour toute surface  $\Sigma$ , on peut décider en temps polynomial si un graphe plongeable dans  $\Sigma$  est 5-colorable.*

Décider si un graphe planaire est 3-colorable est NP-complet (voir [15]). La 3-colorabilité d'un graphe plongeable dans toute surface est donc aussi NP-complet. La complexité de la 4-colorabilité reste elle ouverte.

**Problème 31** *Soit  $\Sigma$  une surface. Existe-t-il un algorithme en temps polynomial pour décider si un graphe plongeable sur  $\Sigma$  est 4-colorable ?*

La réponse au Problème 31 est seulement connue dans le cas de la sphère. Dans ce cas, d'après le Théorème des Quatre Couleurs (Théorème 23), l'algorithme répond toujours "oui". Une réponse affirmative au Problème 31 ne peut pas être obtenue de la même manière que les Corollaires 28 et 30 car il y a une infinité de graphes 5-critiques.

**Théorème 32** *Soit  $\Sigma$  une surface distincte de la sphère. Il y a une infinité de graphes 4-critiques plongeable sur  $\Sigma$ .*

**Lemme 33 (Fisk [11])** *Soit  $G$  une triangulation d'une surface. Si  $G$  a exactement deux sommets de degré impair et que ces deux sommets sont adjacents, alors  $G$  n'est pas 4-colorable.*

Ce lemme découle immédiatement du lemme plus général suivant. Celui-ci a été trouvé indépendamment par Fisk [11] et Ballantine [6] (qui ne l'a formulé que pour les triangulations planaires).

**Lemme 34 (Ballantine [6], Fisk [11])** Soit  $G$  une triangulation d'une surface proprement 4-colorée. Alors la parité du nombre de sommets de degré impair coloré  $i$  est la même pour toute couleur  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Preuve.** Prenons deux couleurs, disons 1 et 2. Considérons les triangles faciaux de  $G$  avec un sommet coloré 1 et un autre coloré 2. Ces triangles sont divisés par paires partageant une arête. Or les deux triangles d'une telle paire ont soit la même troisième couleur, soit l'un est coloré 1, 2, 3 et l'autre 1, 2, 4. Ainsi le nombre de triangles faciaux colorés 1, 2, 3 a la même parité que le nombre de triangles faciaux colorés 1, 2, 4. Comme le choix des couleurs 1 et 2 était arbitraire, on en déduit que la parité du nombre de triangles faciaux colorés avec n'importe quelles trois couleurs est la même.

Pour  $1 \leq i \leq 4$ , soit  $t_i$  le nombre de triangles faciaux contenant un sommet coloré  $i$ . Par l'observation ci-dessus,  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  ont la même parité. Mais  $t_i$  est la somme des degrés des sommets colorés  $i$ . Ceci implique le lemme.  $\square$

**Preuve.** [Preuve du Théorème 32] Les triangulations du Lemme 33 ne sont pas 4-colorables. Pour tout  $p \geq 3$ , soit  $T_p$  une telle triangulation de  $\Sigma$  dont le plus petit cycle non-contractible est de longueur  $p$ . Alors  $T_p$  contient un sous-graphe 5-critique  $G_p$ . D'après le Théorème des Quatre Couleurs,  $G_p$  n'est pas planaire et donc contient un cycle non-contractible. D'où  $|V(G_p)| \geq p$ . Ainsi il y a des graphes 5-critiques d'ordre arbitrairement grand. Il y en a donc une infinité.  $\square$

**Problème 35 (Albertson [1])** Soit  $\Sigma$  une surface. Existe-t-il un entier  $q(\Sigma)$  telle que tout graphe  $G$  plongé sur  $\Sigma$  contient un ensemble  $A$  d'au plus  $q(\Sigma)$  sommets tel que  $G - A$  est 4-colorable ?

Ce problème est ouvert y compris pour le tore pour lequel possiblement  $q(\mathbb{S}_1) = 3$  comme conjecturé par Albertson [1].

## 5 Différentes représentations des graphes planaires

### 5.1 Visibility drawing

Les sommets sont représentés par des segments horizontaux et les arêtes par des segments verticaux. Pour une triangulation  $T$ , on peut obtenir une telle représentation à partir d'un "shelling order". Dans [21] les auteurs montrent que parmi tous les "shelling order" de  $T$ , l'un permet d'obtenir un "Visibility Drawing" dans une grille de largeur  $(22n-40)/15$ .

### 5.2 Straight line drawing

Les sommets sont des points et les arêtes sont des segments. On sait depuis longtemps que les graphes planaires admettent de telles représentations (voir par exemple les notes de cours [22] p.11). Plus récemment W. Schnyder a montré qu'on peut obtenir de telles représentation sur de petites grilles  $(n-2) \times (n-2)$  [28]. Pour ce faire il utilise ce que nous appelons aujourd'hui des "Schnyder Woods".

### 5.3 Touching Disks Representation

Les sommets sont représentés par des disques dont les intérieurs sont disjoints de sorte que 2 disques se touchent ssi les sommets correspondants sont adjacents. Ce résultat de Koebe à été amélioré par Andreev qui a montré que pour un graphe planaire  $G$  3-connexe, on peut dans la même représentation avoir des disques pour  $G$ , et des disques pour sont dual  $G^*$  de telle sorte que les points de contact des arêtes de  $G$  sont les mêmes que ceux des arêtes de  $G^*$ . Différentes preuves de ce résultat se trouvent dans les notes de cours [22] à partir de la page 51.

## 6 Borsuk-Ulam

### 6.1 En quelques mots

Le théorème de Borsuk-Ulam se démontre et s'applique en combinatoire, en théorie des graphes, en topologie algébrique (probablement ailleurs), et possède des dizaines de preuves selon les différentes façons de le voir. De plus, il est l'extension d'un résultat simple et facile à retenir, ce qui en fait *LE* théorème dont on parle dans les diners chics, à condition bien entendu de savoir ce que sont des points antipodaux :

**Définition 36** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on dit que  $x$  et  $-x$  sont *antipodaux*. De plus, soit  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  tel que  $-S = S$  : on dit qu'une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  est *antipodale* si  $\forall x \in S, f(x) = -f(-x)$  (dans la suite, toutes les fonctions seront supposées continues).

**Théorème 37 (Borsuk-Ulam)** Soit  $S^n$  la sphère de dimension  $n$  ( dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  ) et  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue : il existe  $x \in S^n$  tel que  $f(x) = f(-x)$ .

Regardons tout d'abord ce que nous dit ce théorème pour les petites dimensions.

Pour  $n = 1$ , cela donne : toute fonction continue  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  admet un point  $x \in S^1$  tel que  $f(x) = f(-x)$ . Ceci peut se prouver assez facilement. Soit  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(x) + f(-x)$ . Clairement,  $g(x) = -g(-x)$ . Comme  $S^1$  est connexe et  $g$  continue, par le Théorème des valeurs intermédiaires,  $g$  s'annule sur  $S^1$ . Il existe donc  $x \in S^1$  tel que  $f(x) = f(-x)$ .

**Remarque 38** Notons que le théorème de Borsuk-Ulam ne peut pas se généraliser aux fonctions de  $S^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En effet, la fonction identité n'a pas deux sommets ayant la même valeur.

En dimension 2, le théorème de Borsuk-Ulam parvient toujours à s'insérer dans une conversation de bord de mer. De manière imagée, il nous dit la chose suivante. En supposant raisonnablement que la température et la pression soient continues sur la surface de la terre, (et que celle-ci soit une sphère), il existe à tout instant deux points antipodaux ayant la même pression ainsi que la même température.

Voici quelques versions équivalentes du théorème de Borsuk-Ulam telles qu'énumérées dans [23].

1. Toute fonction  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  admet un point  $x \in S^n$  tel que  $f(x) = f(-x)$ .
2. Toute fonction antipodale  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  s'annule.
3. Il n'existe pas de fonction  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  qui soit antipodale.
4. Il n'existe pas de fonction  $f : B^n \rightarrow S^n$  qui soit antipodale sur  $S^{n-1} \subseteq B^n$ .
5. Soit  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_{n+1}\} \subseteq \mathcal{P}(S^n)$  une couverture de  $S^n$  ( $\cup_{1 \leq i \leq n+1} F_i = S^n$ ) par des ensembles ouverts dans  $S^n$ . Il existe  $F_i \in \mathcal{F}$  tel que  $F_i$  contient deux points antipodaux.
6. Soit  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_{n+1}\} \subseteq \mathcal{P}(S^n)$  une couverture de  $S^n$  ( $\cup_{1 \leq i \leq n+1} F_i = S^n$ ) par des ensembles ouverts ou fermés dans  $S^n$ . Il existe  $F_i \in \mathcal{F}$  tel que  $F_i$  contient deux points antipodaux.

- $1 \Leftrightarrow 2$  : pour le sens  $2 \Rightarrow 1$ , prendre la fonction antipodale  $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$ .
- $2 \Leftrightarrow 3$  : pour le sens  $3 \Rightarrow 2$ , prendre une fonction antipodale  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui ne s'annule pas, et constater que  $x \mapsto f(x)/|f(x)|$  est continue, antipodale, et projette  $S^n$  sur  $S^{n-1}$ .

### 6.2 Preuve, dans les grandes lignes

Tentons de prouver que toute fonction antipodale  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  s'annule. Par ailleurs, soit  $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la projection  $g : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ . Nous aurons de plus besoin du cylindre  $X = S^n \times [0, 1]$  sur lequel nous représenterons la somme convexe des deux fonctions  $f$  et  $g$  (qui sera antipodale selon  $x$ ) par  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto (1-t)g(x) + t(fx)$ .

Quelle est la forme prise sur  $X$  par  $F^{-1}(0)$  ?

Si  $f$  ( et donc  $F$  ) possède de bonnes propriétés de régularité, on peut s'attendre à ce que  $F^{-1}$  soit une variété de dimension 1, c'est-à-dire l'union de composantes connexes isomorphes à  $S^1$  ou à l'intervalle  $[0, 1]$ .

- Est-il raisonnable d'imaginer qu'une composante connexe isomorphe à  $[0, 1]$  se termine de façon abrupte au milieu du cylindre (dans  $\{(x, t) \in X : 0 < t < 1\}$ ) ?  
 $\Rightarrow$  Pas sous de bonnes hypothèses de régularité
- Est-il raisonnable d'imaginer qu'une composante connexe isomorphe à  $S^1$  touche la frontière du cylindre (dans  $\{(x, t) \in X : t = 0 \text{ ou } t = 1\}$ )  
 $\Rightarrow$  Pas sous de bonnes hypothèses de régularité ( mais plus complexe dans le cas général )

De plus, nous connaissons déjà deux zéros de  $F$  sur  $X$ , i.e. ceux de  $g$ , situés sur la frontière du cylindre. A partir des observations précédentes, nous pouvons déduire que ces deux points sont dans  $F^{-1}(0)$  les extrémités de composantes connexes isomorphes à  $[0, 1]$ . Dans ce cas de figure, deux possibilités :

- Ils ne sont pas reliés l'un à l'autre  $\Rightarrow$  Ils sont donc reliés à d'autres zéros situés sur la frontière du cylindre, ce qui implique que  $f$  s'annule ( et le résultat recherché est démontré )
- Ils sont les extrémités d'un chemin  $P : [0, 1] \rightarrow X$  commun  $\Rightarrow$  Ceci s'avèrera impossible.

### 6.3 Preuve

Pour prouver ce théorème et pour obtenir les propriétés de régularité recherchées, nous approximerons une fonction  $f$ , potentiel contre-exemple au théorème, par une fonction linéaire par morceaux qui le sera tout autant, et qui simplifiera les explications.

Pour ce faire, nous ne travaillerons plus sur l'espace  $S^n \times [0, 1]$  mais sur un espace isomorphe qu'il nous sera plus facile de trianguler. Soit  $\hat{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_1| + \dots + |x_{n+1}| = 1\} \simeq S_n$ , et notre nouvel espace  $\hat{X} = \hat{S}^n \times [0, 1]$ , sur lequel la fonction  $v : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  représente la relation antipodalité (évidemment,  $v(v(x)) = x$ ). Nous travaillerons sur une version approchée  $\hat{F}$  de la fonction  $F$  définie précédemment.

Dans ce but, nous définissons une triangulation "assez fine"  $T$  de  $\hat{X}$  (on peut se représenter la "finesse" d'une triangulation comme le volume maximum occupé par un simplexe de  $T$ ), et la fonction  $\hat{F}$  comme égale à  $F$  sur les sommets des simplexes de  $T$ , que nous prolongeons de façon linéaire à l'intérieur des  $(n+1)$ -simplexes de la triangulation. De plus, nous supposons dans la suite que l'ensemble  $\hat{F}^{-1}(0)$  n'intersecte aucun  $(n-1)$  simplexe de  $T$  (une petite perturbation appliquée à  $F$  nous permet de nous en assurer – cf. détails en fin de preuve (\*)). Nous prouverons ici les affirmations du schéma de preuve donné précédemment :

- Est-il raisonnable d'imaginer qu'une composante connexe isomorphe à  $[0, 1]$  se termine de façon abrupte au milieu du cylindre (dans  $\{(x, t) \in X : 0 < t < 1\}$ ) ?

Supposons l'existence d'une composante connexe isomorphe à  $[0, 1]$  se terminant au milieu du cylindre au point  $v$ . Ce point  $v$  appartient à un  $(n+1)$ -simplexe  $S$ , et n'est pas par hypothèse situé sur un de ses  $(n-1)$ -simplexes. Par conséquent, puisque sur ce simplexe la fonction  $\hat{F}$  est affine et s'annule en au moins un point,  $\hat{F}^{-1}(0) \cap S$  est un segment inclus dans  $S$ . Il est donc impossible que  $v$  soit strictement inclus dans  $S$ . Si  $v$  est situé sur la frontière de  $S$ , ce raisonnement pouvant s'appliquer de façon similaire sur les 2 simplexes auquel  $v$  appartient, nous en déduisons que  $v$  ne peut pas être le point terminal d'une composante connexe isomorphe à  $[0, 1]$ . La seule exception à cette situation est le cas où  $v \in (\hat{S}^n \times 0) \cup (\hat{S}^n \times 1)$  ( i.e., sur les sphères de début et de fin du cylindre ). Il n'est dans ce cas situé que sur la frontière d'un unique simplexe : rien n'empêche en effet les fonctions  $f$  et  $g$  de s'annuler ( c'est d'ailleurs plutôt le but recherché ). Il est donc prouvé que les composantes connexes de  $\hat{F}^{-1}(0)$  isomorphes à  $[0, 1]$  ont bien leur extrémités dans  $(\hat{S}^n \times 0) \cup (\hat{S}^n \times 1)$

- Est-il raisonnable d'imaginer qu'une composante connexe isomorphe à  $S^1$  touche la frontière du cylindre (dans  $\{(x, t) \in X : t = 0 \text{ ou } t = 1\}$ )

En nommant  $v$  le point de contact entre la frontière du cylindre et la composante connexe isomorphe à  $S^1$ , on aboutirait à la situation suivante : un simplexe  $S$  contenant un sommet  $v$  sur une de ses faces, et deux segment se rejoignant en  $S$  inclus dans  $\hat{F}^{-1}(0)$  – impossible car  $\hat{F}$  est linéaire sur  $S$  et ne peut s'annuler sur un espace de dimension supérieure à 1 sans contredire (\*)

Preuve de (\*) :

## 6.4 Applications

### 6.4.1 Le théorème du sandwich au jambon (The Ham sandwich theorem)

Le théorème du sandwich au jambon affirme qu'armé d'un bon couteau, d'un sandwich et d'intentions discutables, il est possible en un seul coup de couteau de diviser en deux parties de poids égal :

- La tranche de pain du dessus
- Le jambon
- La tranche de pain du bas

Difficile pour l'instant de savoir comment généraliser ce théorème à des dimensions supérieures...

**Théorème 39 (Théorème du sandwich au jambon (The Ham sandwich theorem))** Soient  $\mu_1, \dots, \mu_d$  des mesures de Borel finies sur  $\mathbb{R}^d$  : il existe une forme linéaire  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ( dont seul l'hyperplan  $L^{-1}(0)$  nous intéresse ) tel que

$$\forall i, \mu_i(L^{-1}(R^+)) = \mu_i(L^{-1}(R^-))$$

**Preuve.** Les mesures étant données, nous exhiberons un hyperplan pour prouver ce théorème.

Tout d'abord, faisons correspondre à un point de  $S^d$  un demi-espace de  $\mathbb{R}^d$ . Soit

$$f : (u_1, \dots, u_{d+1}) \mapsto \{(x_1, \dots, x_d) : u_1x_1 + \dots + u_dx_d \geq u_{d+1}\}$$

La fonction  $g : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  définie par  $g : u \mapsto (\mu_1(f(u)), \dots, \mu_d(f(u)))$  vérifie bien par le théorème de Borsuk-Ulam l'existence de  $x \in S^d$  tel que  $g(x) = g(-x)$ . L'hyperplan  $f(x) \cap f(-x)$  nous permet donc de partager notre sandwich.  $\square$

**Corollaire 40 (Théorème du sandwich au jambon, version discrète)** Soient  $A_1, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$  des ensembles finis de points tels que les points de  $\cup_i A_i$  sont en position générale ( aucun hyperplan de  $\mathbb{R}^d$  ne peut en contenir plus de  $d+1 \Leftrightarrow$  tout sous-ensemble de ces points de taille  $d+1$  est un simplexe ).

Il existe un hyperplan  $H \subseteq \mathbb{R}^d$  tel que  $\forall i, A_i$  est séparé en deux parties de taille égale à  $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  ( l'hyperplan contient donc  $|A_i|/2$  point de l'ensemble  $A_i$  ).

**Théorème 41 (Akiyama, Alon)** Soient  $A_1, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$  des ensembles finis de même taille  $n$  tels que  $\cup_i A_i$  est en position générale.

Il existe  $n$  ensembles disjoints  $S_1, \dots, S_n \subseteq \cup_i A_i$  tels que chaque  $S_j$  contient exactement un point de chaque  $A_i$ , et tels que les enveloppes convexes des  $S_j$  sont disjointes.

**Preuve.**

- Si  $n$  est pair, l'hyperplan du théorème du sandwich sépare notre problème en deux problèmes de taille inférieure.
  - Si  $n$  est impair, l'hyperplan du théorème du sandwich contient un point de chaque ensemble (nous fournissant un des  $S_j$ ).
- $\square$

**Théorème 42 (Théorème du collier)** Tout collier ( ouvert ) contenant  $d$  types de pierres précieuses différentes ( mais en nombre pair ) peut être partagé entre deux voleurs en n'utilisant pas plus de  $d$  coupes.

**Preuve.**

- Tout d'abord, enfilez les pierres précieuses sur la chaîne imaginaire  $t \mapsto (t, t^2, \dots, t^d)$
  - Séparer les pierres en deux ensembles égaux par le théorème du sandwich au jambon
  - L'hyperplan coupe la chaîne imaginaire en au plus  $d$  points
- $\square$

## 6.4.2 Graphes de Kneser

**Définition 43 (Graphes de Kneser)** Le graphe de Kneser de paramètres  $n, k$ , noté  $KG_K^n$ , est défini sur l'ensemble de sommets  $\binom{[n]}{k}$  et vérifie

$$(x, y) \in KG_K^n \Leftrightarrow x \cup y = \emptyset$$

Par exemple,  $KG_2^5$  est isomorphe au graphe de Petersen.

Les graphes de Kneser, pour  $2k - 1 \leq n$ , sont de nombre chromatique  $n - 2k + 2$ . Prouvons ceci en deux étapes :

**Théorème 44** *If  $2k - 1 \leq n$ ,  $\chi(KG_K^n) \leq n - 2k + 2$*

**Preuve.**  $\forall x \in V(KG_K^n), x \subseteq [n]$ , nous donnons à  $x$  la couleur  $\min(\min(x), n - 2k + 2)$ . Soit  $xy \in E(KG_K^n)$  de même couleur  $c$

- Si  $c < n - 2k + 1$ , alors  $c \in x \cup y$  – une contradiction puisque dans ce cas  $x$  et  $y$  ne sont pas disjoints et  $x \cap y$  n'est pas une arête
- Si  $c \geq n - 2k + 2$ , alors  $x, y \subseteq [n - 2k + 2, \dots, n]$  – même conclusion puisque  $|x| = |y| = k$

□

La preuve que cette coloration est optimale, cependant, passe par le théorème de Borsuk-Ulam dans sa 6ème forme.

**Théorème 45** *If  $2k - 1 \leq n$ ,  $\chi(KG_K^n) = n - 2k + 2$*

Par l'absurde, supposons qu'il existe une  $n - 2k + 1$ -coloration de  $KG_K^n$ .

Soit  $d = n - 2k + 1$ , et  $X \subseteq S^d$  un ensemble de cardinal  $n$  tels qu'un hyperplan passant par l'origine contient au plus  $d$  points de  $X$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une  $d$ -coloration  $c$  des sommets de  $KG_K^n$ . Définissons maintenant des ensembles  $S_1, \dots, S_{d+1}$  qui constitueront une couverture de  $S^d$  telle que décrite dans le théorème : soit  $H(x)$  la demi-sphère définie par

$$H : S^d \rightarrow S^d$$

$$H(x) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle > 0\}$$

Nous pouvons maintenant définir  $S_1, \dots, S_d$  de la façon suivante :

$$\forall i, x \in S_i \Leftrightarrow \{x \in S^n : \exists x_1, \dots, x_k \in H(x) \cap X \text{ tels que } c\{x_1, \dots, x_k\} = i\}$$

Nous posons maintenant  $S_{d+1} = S^1 \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_d)$  pour nous assurer que  $S_1, \dots, S_{d+1}$  est bien une couverture de  $S^1$  (qui sont effectivement des ensembles ouverts pour les premiers, le dernier étant fermé)

Par le théorème de Borsuk-Ulam, l'un de ces ensembles  $S_l$  contient donc deux points  $x, -x$  antipodaux :

- Si  $S_l = S_{d+1}$ , cela signifie que  $H(x) \cap X$  et  $H(-x) \cap X$  contiennent au plus  $k - 1$  points, ce qui implique que  $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))$  contient au moins  $n + 1$  points, absurde par hypothèse
- Dans le cas contraire, cela signifie  $H(x) \cap X$  (resp  $H(-x) \cap X$ ) contient des points  $a_1, \dots, a_k$  (resp  $b_1, \dots, b_k$ ) tels que  $c(\{a_1, \dots, a_k\}) = l$ , (resp  $c(\{b_1, \dots, b_k\}) = l$ ). Nous venons donc d'exhiber deux  $k$ -ensembles disjoints de  $X$  de même couleur, ce qui est absurde puisqu'ils sont reliés dans  $KG_K^n$

## Références

- [1] M. O. Albertson. Open problem 2. In *The Theory and Applications of Graphs*, Ed. Chartand et al., p. 609, Wiley, 1981.
- [2] M. O. Albertson and J. P. Hutchinson. The three excluded cases of Dirac's map-color theorem. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 319 :7–17, 1979.



- [3] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colourable. I. Discharging. *Illinois J. Math.* 21, 429–490, 1977.
- [4] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colourable. II. Reducibility. *Illinois J. Math.* 21 :491–567, 1977.
- [5] K. Appel and W. Haken. Every Planar Map is Four Colourable. *Contemporary Mathematics* 98. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [6] J. P. Ballantine. A postulational introduction to the four colour problem. *University of Washington Publications*, Vol. 2. University of Washington Press, Seattle, WA, pp. 1–15, 1930.
- [7] T. Böhme, B. Mohar and M. Stiebitz. Dirac’s map-color theorem for choosability. *J. Graph Theory* 32 :327–339, 1999.
- [8] N. Chenette, L. Postle, N. Streib, R. Thomas and C. Yerger. Five-coloring graphs on the Klein bottle. *manuscript*.
- [9] G. A. Dirac. Map colour theorems related to the Heawood colour formula. *J. London Math. Soc.* 31 : 460-471, 1956.
- [10] G. A. Dirac. Short proof of the map colour theorem. *Canad. J. Math.* 9 :225–226, 1957.
- [11] S. Fisk. The non-existence of colorings. *J. Combin. Theory Ser. B* 24 :247-248, 1978.
- [12] P. Franklin. A six-color problem. *J. Math. Phys.* 13 :363–369, 1934.
- [13] T. Gallai. Kritische Graphen I , *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci* 8 :165-192, 1963.
- [14] T. Gallai. Kritische Graphen II , *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci* 8 :373-395, 1963.
- [15] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.* A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.
- [16] P. J. Heawood. Map-colour theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.* 24 :332–338, 1890.
- [17] F. Jaeger. Nowhere-zero flow problems. In *Selected Topics in Graph Theory* 3 :71–95, (L.W. Beinke and R.J. Wilson, eds.) Academic Press, San Diego, 1988
- [18] K. Kawarabayashi, D. Král’, J. Kyncl and B. Lidický. 6-critical graphs on the Klein bottle. *ITI report* 2007-365.
- [19] D. Král’ and R. Škrekovski. The last excluded case of Dirac’s map-color theorem for choosability. *J. Graph Theory* 51(4) :319–354, 2006.
- [20] A. Kündgen and R. Ramamurthi. Coloring face-hypergraphs of graphs on surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B* 85 :307-337, 2002.
- [21] C-C Lin, H-I Lu, and I-F Sun. Improved Compact Visibility Representation of planar graphs via Schnyder’s Realizer. *SIAM J. Discrete Math.* 18 (1),pp 19–29.
- [22] L. Lovász, Geometric Representation of Graphs. Retrieved at <http://www.cs.elte.hu/~lovasz/geomrep.pdf>.
- [23] J. Matousek Using the Borsuk-Ulam Theorem *Springer*, 2003
- [24] B. Mohar and C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 2001.
- [25] G. Ringel and J. W. T. Youngs. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 60 :438–445, 1968.
- [26] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas. A new proof of the four colour theorem. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 2 :17–25, 1996.
- [27] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas. The four colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B.* 70 :2–44, 1997.
- [28] W. Schnyder. Embedding Planar Graphs on the Grid. *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA ’90)*.

- [29] P. D. Seymour. Sums of circuits. In *Graph Theory and Related Topics* : 341-355, (J.A. Bondy and U.S.R. Murty, eds), Academic Press, New York, 1979.
- [30] G. Szekeres. Polyhedral decomposition of cubic graphs. *Bull. Austral. Math. Soc.* 8 :367–387, 1973.
- [31] C. Thomassen. Kuratowski’s theorem. *J. Graph Theory* 5 :225–241, 1981.
- [32] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Combin. Theory Ser. B* 62 :180–181, 1994.
- [33] C. Thomassen. Five-coloring graphs on the torus. *J. Combin. Theory B* 62(1) :11–33, 1994.
- [34] C. Thomassen. Color-critical graphs on a fixed surface. *J. Combin. Theory B* 70 :67–100, 1997.
- [35] C. Thomassen. 2-list-coloring planar graphs without monochromatic triangles. *J. Combin. Theory Ser. B* 98 :1337-1348, 2008.
- [36] M. Voigt. List colorings of planar graphs. *Discrete Math.* 120 :215–219, 1993.