Théorie des graphes dans Mascotte

Aile coloriste et d'autres

MASCOTTE

12-13 mars 2009

Principaux thèmes

Colorations de graphes.

- Allocations de fréquence: $L(p, q)$-labelling, coloration impropre, coloration des arcs d'un graphe orienté, ...
- Colorations diverses: acyclique, linéaire, non-répétitive, ...

Graphes orientés.

- Rapport orientation-coloration: graphes orientés universels, ...
- Chemins et cycles dans les digraphes.

Largeurs d'arborescence:

- Résultats structurels: Dualité, ...
- Graph searching

Aspects théoriques

- établir des résultats structurels: décompositions (arborescente, modulaire, ...), existence de sous-graphes avec propriété P, ...
- bornes combinatoires: nombre max. de couleurs, ...

Outils: Méthode probabiliste, méthode de déchargement, lemme de Régularité, méthode algébrique, matroides, ...

Beaucoup plus de résultats (car plus de structures) sur les graphes non-orientés que sur les graphes orientés.

Principal défi: Développer la théorie des graphes orientés.

Aspects algorithmiques

Us et coutumes

- Complexité: P ou NP
- Algos d'approximation: heuristiques, relaxation, ...

Nouvelles tendances

- Algorithmes exponentiels exacts: $O(c^n)$
  Inclusion-exclusion, Branch and recharge, Measure and Conquer, ...
- Algorithmes à paramètre fixe: $O(P(n) \times f(k))$.
  Compression itérative, arbre de recherche bornée, noyaux, ...

Finalité: Implémenter, expérimenter.

L(p,q)-labelling: définitions

Un $L(p,q)$-labelling d'un graphe G est une application $f : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que

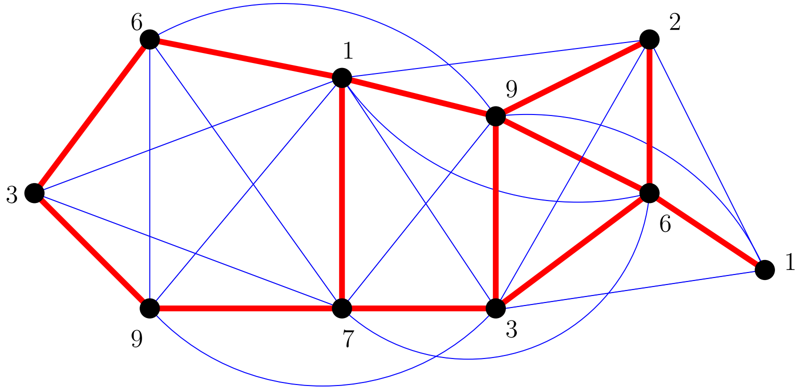
- $|f(u) - f(v)| \geq p$, si $dist(u,v) = 1$;
- $|f(u) - f(v)| \geq q$, si $dist(u,v) = 2$.

Allocation de fréquences:

- transmetteurs très proches reçoivent des fréquences très éloignées;
- transmetteurs proches reçoivent des fréquences éloignées.

$\lambda_{p,q}(G) := \min \{k, G \text{ a un } L(p,q)\text{-labelling dans} \{1, \ldots, k\}\}$.

L(p,q)-labelling: exemple



$p = 3$ et $q = 1$

$L(1,0)$-labelling = coloration propre
$L(1,1)$-labelling = coloration propre du carré

L(p,q)-labelling: bornes supérieures connues

Soit G un graphe de degré maximum Δ.

Algorithme glouton: $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta + 1$.

Conjecture (Griggs et Yeh, 1992) $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 1$.

Théorème (Goncalves, 2005) $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$.
basé sur l'algorithme de Chang et Kuo.

L(p,q)-labelling: principal résultat

Théorème (Havet, Reed, Sereni)
Il existe Δ_0 tel que pour tout G de degré maximum $\Delta \geq \Delta_0$,

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 1.$$

Preuve par la Méthode Probabiliste: Lemme Local + Inégalités de Concentration.

Avantages: Nombreuses généralisations, $L(p,q)$-labelling, coloration par listes, ...

Inconvénients: Inapplicable en pratique:

- Δ_0 est énorme.
- Non constructif.

Point de vue algorithmique

Griggs and Yeh, 1992: Déterminer $\lambda_{2,1}(G)$ est NP-dur.

Fiala et al., 2001: $k \geq 5$ fixé, decider $\lambda_{2,1}(G) \leq k$ est NP-complet.
$\Rightarrow$ pas k-FPT ($k \leq 4$ polynomial)

Král, 2006: $O^*(4^n)$ algorithme exact pour calculer $\lambda_{2,1}(G)$.

Havet, Klazar, Kratochvil, Kratsch, Liedloff:

- $O^*(\sqrt{15}^n) = O(3.873^n)$ algorithme exact pour calculer $\lambda_{2,1}(G)$.
  Programmation dynamique, énumération des stables dans le carré.
- $O^*(1.3006^n)$ algorithme pour décider si $\lambda_{2,1}(G) \leq 5$.
  Algo. de branchement + Mesurer et Conquérir.

L(p,q)-labelling: Graphes planaires

Conjecture (Wegner, 1977)
Si G est planaire $\lambda_{p,q}(G) \leq \frac{3}{2}\, q\, \Delta + c_{p,q}$.

Théoreme (Havet, van den Heuvel, McDiarmid, Reed)
Si G est planaire $\lambda_{p,q}(G) \leq (1 + o(1))\, \frac{3}{2}\, q\, \Delta$.
$p = q = 1$ Amini et al. preuve + simple
Cohen et al. $\omega(G^2) \leq \frac{3}{2}\, \Delta + 1$.

Eggemann, Havet, Noble: $k \geq 5$, décider $\lambda_{2,1}(G) \leq k$ pour G planaire est NP-complet.

Trouver des algorithmes plus rapides que les précédents pour les graphes planaires.

L(p,q)-labelling: perspectives

Etude de classes de graphes “réalistes”: graphes d’intersection de disques, line-graphes, ...

Réseaux sans fil: communications (arêtes) compatibles si elles concernent des terminaux (sommets) non voisins
$\Rightarrow L(1,1)$-labelling d’un line-graphe ou arête-coloration forte.

Conjecture (Erdős et Nešetřil, 1985)

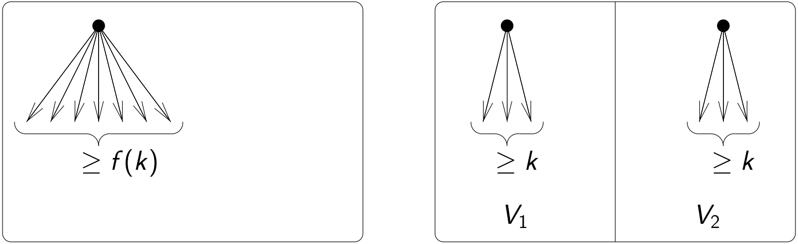
$$s\chi'(G) \leq \begin{cases} \frac{5\Delta^2(G)}{4}, & \text{si } \Delta \text{ est pair,} \\ \frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}, & \text{si } \Delta \text{ est impair.} \end{cases}$$

Molloy et Reed: $s\chi'(G) \leq (2-\epsilon)\Delta^2(G)$.

Conjecture (Faudree et al., 1989)
Si G est biparti, $s\chi'(G) \leq \Delta^2(G)$.

Partition de degré sortant minimum

Conjecture (Stiebitz)
Il existe $f(k)$ tel que si $\delta^+(D) \geq f(k)$ on peut partitionner $V(D)$ en (V_1, V_2) tels que $\delta^+(D\langle V_i \rangle) \geq k$, $i = 1, 2$.



$f(1) = 3$ mais l'existence de $f(2)$ reste ouverte.

Partition de degré minimum

Dans le cas non-orienté, $f(k) \leq 2k + 2\sqrt{9k \log k} = 2k + 2t$.

Partition aléatoire: $\mathbf{E}(|N(x) \cap V_x|) = f(k)/2 = k + t$.
A_x: événement que $|N(x) \cap V_x| < k$.
Borne de Chernoff:
$\mathbf{Pr}(A_x) \leq \mathbf{Pr}(|N(x) \cap V_x| - k + t > t) < 2e^{-\frac{t^2}{3(k+t)}} < k^{-3}$.
Principe d'indépendance mutuelle: Un A_x est mut. ind. de tous sauf au plus $f(k)^2$ événements.
Lemme Local $\Rightarrow$ avec proba. > 0 tous les sommets ont k voisins dans leur partie.

Conjecture (Tuza)
Sous la condition $|V(G)|$ grand, alors $f(k) \leq 2k$.

Partition: FPT

Problème

Entrée: Graphe $G = (V, E)$, entiers k et d?

Question: Existe-t-il une partition $(V_1, \ldots, V_m)$, t.q. pour tout i,

- $|V_i| \leq k$;
- au plus d arêtes ont exactement une extrémité dans V_i.

Ce problème est-il FPT en fonction de k et d?

Collaborations

Algo. exponentiels et FPT:

- ANR AGAPE (LIRMM, LIFO, LITA) (*resoumission*).

Coloration et applications:

- PHC Proteus (Ljubljana) 2009-2010
- PICS CNRS (Prague) 2009-2011
- Equipe associée EWIN (Fortaleza) 2009–??
- ANR Blanc (LaBRI, Taiwan) + PHC Orchid (*soumission*)

Graphes orientés:

- Sabbatique de Bang-Jensen en 2009-2010.