Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS)

O. Cogis, B. Darties, S. Durand, J.-C. König, J. Palaysi

LIRMM, 161 rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 5

Nous nous intéressons au placement d'un minimum d'appareils de surveillance sur les liens d'un réseau de sorte que tout son trafic soit surveillé. Nous montrons que ce problème est NP-difficile et non-APX, même restreint aux grilles avec des chaînes les plus courtes possibles. Nous donnons des algorithmes polynomiaux pour les réseaux linéaires, les anneaux ou encore les étoiles à condition pour ces dernières qu'elles soient orientées. Dans le cas ou les liens d'une étoile ne sont pas orientés, le problème est NP-Difficile mais nous donnons une 2-approximation valable dans un cas plus général comprenant celui des arbres et celui des grilles lorsque les chaînes sont de type ligne-colonne)[†].

Keywords: réseaux, surveillance passive, complexité, approximation

1 Introduction

La surveillance du trafic dans les réseaux peut se dire active ou passive [NT04, CFGL04]. Le problème de surveillance passive présenté dans [CFGL04] consiste à placer des appareils de surveillance sur le plus petit nombre possible de liens d'un réseau pour contrôler une proportion fixée du trafic. Étant donné un rationnel k appartenant à $]0,1]$, on peut formaliser le problème comme suit :

Problème 1 *PPM_k (Partial Passive Monitoring)*

Donnée : *Un graphe[‡] G, un entier positif h, un ensemble de chaînes R dans G et une fonction de coût C de R dans $\mathbb{Q}^+$, qui associe un coût à chaque chaîne de R.*

Question : *Existe t-il un sous ensemble $F \subseteq E(G)$ tel que $|F| \leq h$ et $\frac{\sum_{P\in R_F} C(P)}{\sum_{P\in R} C(P)} \geq k$ (où $R_F = \{P : P \in R \text{ et } E(P) \cap F \neq \emptyset\}$) ?*

Après avoir montré dans un premier temps que PPM_k est NP-complet pour tout k appartenant à $]0,1]$, nous nous intéressons au cas particulier $k = 1$ (PPM_1 a déjà été montré NP-complet dans [CFGL04]), problème que nous reformulons comme suit :

Problème 2 *CRAS (Couverture de Routes par des Appareils de Surveillance)*

Donnée : *Un graphe connexe non orienté G, un ensemble R de chaînes dans G et un entier positif h.*

Question : *Existe t-il un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E(G)$ avec $|F| \leq h$ et tel que si P est une chaîne de R alors $E(P) \cap F \neq \emptyset$?*

Par la suite, *minCRAS* désigne le problème d'optimisation «naturellement» associé au problème *CRAS* (i.e. pour G et R donnés, déterminer le plus petit h pour lequel le problème *CRAS* admet une réponse positive) et, pour tout problème, nous utiliserons une notation similaire pour distinguer sa version décision de sa version optimisation.

Sauf mention contraire, les graphes sont des graphes simples (non orientés, sans boucle ni arête multiple). Une grille $M_{n\times m}$ est un graphe dont les sommets (i, j) sont définis par

[†] Une version longue de cette soumission, avec les preuves, existe sous la forme d'un rapport de recherche, de même nom, du LIRMM.

[‡] On notera $E(G)$ l'ensemble des arêtes de G et $V(G)$ l'ensemble de ses sommets.

un numéro de ligne i, $1 \leq i \leq n$, et un numéro de colonne j, $1 \leq j \leq m$, et où deux sommets sont adjacents ssi ils ne diffèrent que sur une seule de leurs composantes et alors d'une valeur de 1.

Les résultats présentés sont alors les suivants :

– *minCRAS* est NP-difficile et non-APX[§] ; le résultat est encore vrai si on restreint le problème aux grilles et à des plus courtes chaînes ;
– *minCRAS* restreint aux arbres est NP-difficile mais APX ; il en va de même si la restriction est faite aux chaînes ligne-colonne dans les grilles (une chaîne est dite **ligne-colonne** (ou L-C) lorsqu'elle possède un sommet (i, j) tel que tous ses autres sommets appartiennent à la ligne i ou à la colonne j ; un tel sommet (i, j) est appelé **sommet coin**, qu'on choisit de plus de i et de j minimum lorsqu'il en existe plusieurs) ;
– *minCRAS* restreint aux chaînes, aux anneaux et aux étoiles orientées est polynômial.

2 NP-complétude de PPM_k

Pour montrer que pour tout nombre rationnel $k \in]0, 1]$, le problème PPM_k est NP-Complet, nous considérons le problème suivant :

Problème 3 *CE_k (Couverture d'Ensemble dans une proportion au moins k).*

Donnée : *Un ensemble fini d'éléments $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, un sous-ensemble $E = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ de parties de X, un entier positif $h \leq m$.*

Question : *Existe-t-il un sous-ensemble $F \subseteq E$ tel que*

$$|F| \leq h \text{ et } \left| \bigcup_{E_i \in F} E_i \right| \geq k \times |X|$$

Ce problème s'apparente au problème de Couverture Partielle d'Ensemble (*CPE*) introduit par M. Kearns [Kea90] mais dans *CPE* la proportion k est une donnée du problème. Le problème *CPE* est bien sûr NP-Complet puisque le problème de Couverture d'Ensemble (CE) en est un cas particulier ($k = 1$) connu pour être NP-Complet (par exemple voir *set cover* dans [ACG$^+$03]). Nous montrons ici que quelle que soit la valeur de k, le problème CE_k reste NP-Complet.

Proposition 1 *Pour tout rationnel $0 < k \leq 1$, le problème CE_k est NP-Complet.*

Théorème 1 *Le problème PPM_k est NP-Complet pour tout $0 < k \leq 1$.*

3 non-APproXimabilité de *minCRAS*

Réduire le problème *CRAS* au problème *CE* est immédiat : les chaînes deviennent les éléments, les arêtes deviennent les sous-ensembles (une arête «couvre» les chaînes qui l'empruntent). Compte tenu de résultats connus pour le problème *CE* [¶], on en déduit que le problème *minCRAS* est approximable avec un facteur d'approximation de $1 + \ln|R|$. Mais une construction «réciproque» est également possible, même en restreignant le problème *CRAS* à des chaînes les plus courtes dans les grilles (elle est illustrée en figure 1). D'où :

Théorème 2 *Le problème minCRAS est NP-difficile et non-APX. Il est encore NP-difficile et non-APX lorsqu'il est restreint aux grilles et à des chaînes les plus courtes.*

---

§ APX signifie qu'il existe un algorithme polynômial approché résolvant *minCRAS* à un facteur constant près. non-APX signifie le contraire, sauf si P=NP.

¶ Le problème *CE* appliqué à un ensemble de cardinal n est non-APX et $1 + \ln n$-approximable (voir par exemple [ACG$^+$03]).

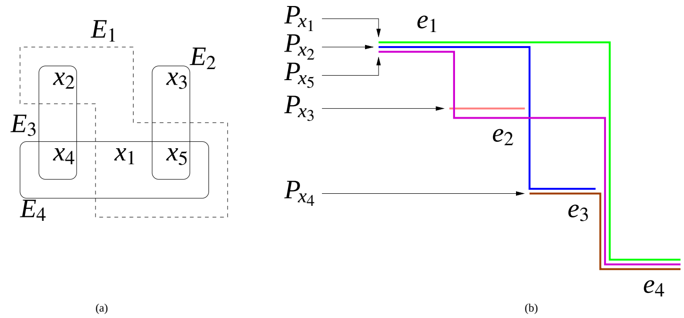

FIG. 1: Une instance $(\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\},\{E_1=\{x_1,x_2,x_5\},E_2=\{x_3,x_5\},E_3=\{X_2,X_4\},E_4=\{x_1,x_4,x_5\}\})$ du problème CE et sa réduction à une instance du problème *CRAS* dans une grille avec des plus courtes chaînes.

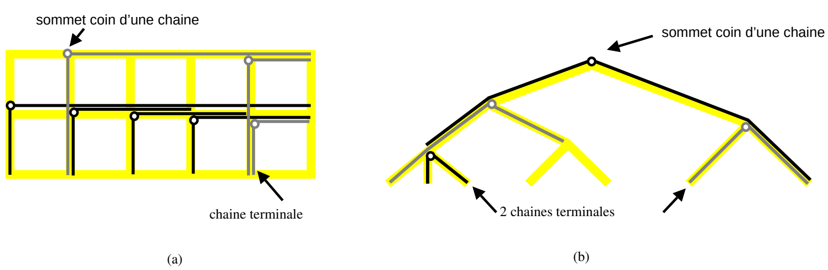

FIG. 2: Exemples de sommets coin et de chaînes terminales dans les grilles et les arbres. On peut vérifier que l'instance de *minCRAS* dans la grille n'est pas *tree representable*.

4 Cas NP-difficiles mais approximables pour *minCRAS*

Si G est un arbre, *minCRAS* est le problème bien connu de *multicut*. *CRAS* est donc NP-complet, même restreint aux arbres de hauteur 1 [GVY97]. Il est aussi NP-complet dans les grilles avec des routages L-C[‖].

Dans les arbres, il existe une 2-approximation [GVY97], que les auteurs généralisent à toute instance de *CE* représentable par des chaînes dans un arbre (instance *tree-representable*). À condition d'enraciner les arbres en un sommet arbitraire et de définir comme sommet coin d'une chaîne d'un arbre son sommet le plus proche de la racine, l'algorithme *AminCRAS* (voir encadré) est un algorithme glouton, pour le problème *minCRAS*, avec garantie de performance aussi bien pour les arbres que pour les routages L-C dans les grilles, dont on notera qu'ils ne sont pas *tree-representable* (voir par exemple la figure 2).

Dans les deux cas, les **arêtes-coin** d'une chaîne P sont les arêtes de P incidentes à son sommet coin (leur nombre est donc égal à 1 ou 2). P est une **chaîne terminale** dans R si pour toute autre chaîne $Q \in R$ l'intersection de P et de Q est vide ou contient au moins une des arêtes-coins de P (voir la figure 2 pour des exemples).

Enfin on partitionne en quatre classes les chaînes L-C suivant que, si (i,j) est le coin d'une chaîne L-C, pour tous ses sommets (k,l) on a $k \le i$ ou $k \ge i$, et $l \le j$ ou $l \ge j$.

Proposition 2 *L'algorithme AminCRAS donne une 2-approximation dans les arbres et dans les grilles avec des chaînes L-C d'une même classe.*

Théorème 3 *minCRAS restreint aux chaînes L-C dans les grilles est APX.*

[‖] Communication personnelle de Guillaume Bagan

Données : Un ensemble R de chaînes (resp. de chaînes L-C d'une même classe) dans un arbre enraciné (resp. une grille)
Résultat : Un ensemble d'arêtes S avec au moins une arête de chaque chaîne de R

$S \leftarrow \emptyset; R' \leftarrow R$;
tant que $R' \neq \emptyset$ **faire**
    Choisir une chaîne P terminale dans R' ;
    Ajouter à S la ou les arêtes-coins de P;
    Retirer de R' toutes ses chaînes passant par une arête-coin de P;
fin

Algorithme 1 : L'algorithme AminCRAS.

5 Cas polynômiaux

Quand l'arbre est une chaîne, en enracinant l'arbre à une de ses extrémités, l'algorithme AminCRAS donne un résultat optimal. Dans les étoiles orientées**, toute instance de *minCRAS* peut se ramener, en temps polynômial, à une instance de *minCAS* dans un biparti††, problème connu pour être polynômial (voir par exemple [CR04]).

Théorème 4 *Le problème minCRAS est polynômial s'il est restreint aux chaînes, aux anneaux ou aux étoiles orientées.*

6 Conclusion et Perspectives

Le problème *minCRAS* est NP-difficile et non-APX dans le cas général. Pour certaines topologies, il reste NP-difficile mais devient APX (arbres et grilles avec des chaînes L-C). En revanche, en restreignant la topologie aux chaînes ou aux anneaux, on a montré que des démarches gloutonnes étaient optimales.

Améliorer le facteur d'approximation de *minCRAS* restreint aux arbres, donc en particulier aux arbres de hauteur 1, améliorererait du même coup les meilleures approximations connues pour le problème *vertex cover*‡‡ [GVY97]. En revanche des bornes inférieures restent à établir pour *minCRAS* restreint aux routages L-C dans les grilles, et le résultat obtenu pour les étoiles orientées invite à poursuivre l'étude du contrôle dans les réseaux orientés.

Références

[ACG+03] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, and M. Protasi. *Complexity and Approximation*. Springer, 2003.

[CFGL04] C. Chaudet, É. Fleury, and I. Guérin Lassous. Positionnement optimal de sondes pour la surveillance active et passive de réseaux. CFIP 2005, nov 2004.

[CR04] O. Cogis and C. Robert. *Théorie des Graphes*. Vuibert, 2004.

[GVY97] N. Garg, V. Vazirani, and M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees. *Algorithmica*, 18 :3–20, 1997.

[Kea90] M. Kearns. *The Computational Complexity of Machines Learning*. MIT Press, Cambridge MA, 1990.

[NT04] H. X. Nguyen and P. Thiran. proceedings of active measurement for multiple link failures diagnosis in ip networks (pam2004). In *Passive and Active Measurement Workshop*, Antibes - Juan-lès-Pins, France, Avril 2004. Springer-Verlag. Lecture Notes of Computer Science (volume 3015).

** Une étoile orientée est un arbre de hauteur 1 dans lequel chaque arête $\{i, j\}$ est remplacée par un arc (i, j) et/ou un arc (j, i).

†† S'il n'y a pas de chemins de longueur 1 ; ce que nous pouvons supposer sans perte de généralité.

‡‡ Pour une présentation de *vertex cover*, voir par exemple [ACG+03]