Российская Академия Наук
Институт философии

На правах рукописи

КОМЕНДАНТСКИЙ Владимир Евгеньевич

ТЕОРИЯ ВЫВОДА В МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИКАХ

Специальность 09.00.07
Логика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата философских наук

Москва 2003

Работа выполнена в секторе логики Института философии Российской Академии Наук (ИФ РАН).

Научный руководитель:	доктор философских наук КАРПЕНКО Александр Степанович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук АНШАКОВ Олег Михайлович,
	кандидат философских наук КАТРЕЧКО Сергей Леонидович
Ведущая организация:	Кафедра логики философского факультета Московского Государственного Университета.

Защита состоится 23 октября 2003 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 002.015.03 ИФ РАН по адресу: 119992 Москва, ул. Волхонка, д. 14, Институт философии, зал заседаний.

С текстом диссертации можно ознакомиться в библиотеке Института философии.

Автореферат разослан «__» сентября 2003 г.

Учёный секретарь диссертационного совета доктор философских наук	КИЯЩЕНКО Лариса Павловна

Общая характеристика диссертации

Многозначные логики появились в 20-х годах XX века в работах Поста и Лукасевича. Несколько позднее было предложено ещё несколько многозначных логик, таких как логика Бочвара, логики Гёделя, логика Клини. Интересный библиографический экскурс в многозначные логики можно найти в [7]. Изобретение этих логик было мотивировано разными задачами. Так, Лукасевич и Бочвар исходили из философских предпосылок, вводя третье значение в свои логики для формализации неполного или противоречивого знания; Пост и Гёдель руководствовались более техническими соображениями, когда обобщали классическую логику в n-значных системах; Клини же просто искал удобный формализм для анализа понятия частично определённой рекурсивной функции. Однако все эти логики объединяет важная отличительная особенность: в них метатеоретически заложена концепция, которую называют *истинностной функциональностью*. Согласно ей, всякое высказывание имеет некоторое значение истинности, и это значение может быть однозначно вычислено некоторой заранее определённой функцией по значениям входящих в это высказывание подвысказываний. Так, в случае конъюнкции $A \wedge B$ высказываний A и B искомой функцией будет некоторая функция $f_\wedge$ от значения A и значения B.

Если логика истинностно-функциональна, это непосредственно означает существование метода вычисления значения истинности для любого высказывания, записанного на языке этой логики. В этом состоит привлекательная в техническом смысле сторона многозначных логик:

по любой формуле можно легко сказать, что она «значит». Сохраняется ли эта привлекательность многозначных логик в теории вывода? К сожалению, нет, поскольку с ростом числа истинностных значений растёт и то внимание, которое им приходится уделять, а в это время падает эффективность рассуждений.

Что же в таком случае делать, если возникают задачи, требующие многозначного решения? Отказаться от истинностной функциональности и перейти в другую концепцию? В данной работе формируются предпосылки, позволяющие не торопиться со столь поспешным решением.

Степень разработанности проблемы. В нашей стране было получено большое количество результатов в области многозначных логик. Среди них можно особо отметить следующие: вычисление Яблонским всех предполных классов функций для трехзначной логики Поста в 1954 году, а также нескольких классов для случая $k \geqslant 4$ значений в 1958 году; доказательство существования k-значных замкнутых классов функций, не имеющих конечного базиса, для $k > 2$, найденное Яновым и Мучником в 1959 году (см. [1]); определение функциональных свойств логик Лукасевича Финном [2] в 1970 году; получение метода аксиоматизации произвольных конечнозначных логик Аншаковым и Рычковым [3] в 1982 году; установление Карпенко [8] связи импликации Лукасевича с классами простых чисел в 1999 году; построение Косовским и Тишковым [4] секвенциальных исчислений для классов конечнозначных логик в 2000 году. За рубежом многозначная логика в наше время является сложной разветвлённой отраслью науки. Многие работы общетеоретического характера публикуются не отдельными авторами, а коллективами авторов, например, статья по секвенциальным исчислениям с метками для конечнозначных логик [11] или монография по алгебраическим основаниям многозначных логик [14].

Актуальность темы диссертации. Сегодня для бесконечнозначных логик не существует хорошо обоснованной теории доказательств, хотя для конечнозначных логик табличные исчисления без сечений были построены ещё Руссо [15] в 1967 году. Некоторые исчисления для бесконечнозначных логик Лукасевича всё же определяются в литературе, например, Агуццоли и Чиабаттони [9] в 2000 году строят секвенциальное исчисление для бесконечнозначной логики, опирающееся на идею Мундичи о сводимости проблемы разрешимости с бесконечнозначной логики на подходящий класс конечнозначных логик, и, следовательно, основанное на исчислениях для конечнозначных логик. В 2001 году Софрони-Стоккерманс [17] предложила метод доказательства теорем, основанный на теореме представления алгебр истинностных значений для большого класса многозначных логик. Кроме своей эффективности, этот метод интересен ещё и тем, что в нём посредством структур Крипке устанавливается соответствие между многозначными и модальными логиками. К сожалению, метод [17] неприменим к ряду широко распространённых бесконечнозначных логик. Данный метод исследован в диссертации, и на основе этого исследования сделан вывод о возможности его обобщения на класс бесконечнозначных логик на основе подходящей теоремы представления алгебр истинностных значений.

Цель диссертационного исследования — формирование единого подхода к теории вывода многозначных логик на основе изучения их семантик и исчислений.

Предмет исследования — это логические семантики различных видов, логические исчисления для многозначных логик, теории, в которых формализована концепция многозначности, и модели таких теорий.

Методы исследования. В работе использовалась логическая техника, как традиционная, например, секвенциальные логические исчисления, так и нетрадиционная: исчисления с «отмеченными формулами», S-классификация замкнутых классов функций многозначных логик, дуальные многозначным семантикам топологические модели. Автором работы вводится оригинальный метод на основе исчисления резолюций для доказательства теорем в многозначных логиках с линейно упорядоченными множествами истинностных значений.

Основные результаты работы и положения, выносимые на защиту:

- Определена специфика теории вывода в многозначных логиках, а именно определено, что решающей является связь логических исчислений с конкретными истинностно-функциональными семантиками, и суть эффективных выводов в многозначной логике состоит в нахождении упрощённых аналогов исходных семантических конструкций.

- Получено корректное исчисление резолюций для всего класса конечнозначных логик Поста. Этот метод служит схемой для создания аналогичных методов для других классов конечнозначных логик с линейно упорядоченными множествами истинностных значений.

- Получены результаты о мощности и границах применимости резолютивных методов поиска доказательства теорем на основе теорем представления к первопорядковым многозначным логикам.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней

- предпринята попытка целостного философского анализа феномена символических систем многозначных логик — от их возникновения в первой четверти XX века до наших дней;

- проведена существенная работа по систематизации и упорядочению знаний о многозначных логиках, их свойствах, интерпретациях и приложениях в науке, в этих целях, в частности, впервые в русскоязычной литературе указаны многие результаты современной зарубежной логики из области многозначных логик;

- использован ряд принципиально новых подходов к многозначным логикам, таких как подход на основе теорем представления для алгебр истинностных значений многозначных логик, подход к построению исчислений многозначных логик на основе «отмеченных формул»;

- получен ряд логико-математических результатов в теории доказательств многозначных логик, в частности, результаты о мощности и границах применимости резолютивных методов поиска доказательств теорем к первопорядковым многозначным логикам.

Теоретическая значимость работы обусловлена обобщённым характером полученных результатов. Например, предлагаемый в работе метод резолюций для смешанной логики Поста является схемой для построения подобных методов для широкого класса многозначных систем. Кроме того результаты работы позволяют сформулировать ряд открытых проблем в области теории вывода многозначных логик, благодаря чему можно оценить сравнительное состояние исследований в этой отрасли логики относительно других логических дисциплин.

Практическая значимость работы следует из прикладного характера той области, в которой проводится диссертационное исследование. С самого возникновения многозначные логики имели ясные семантики. Благодаря лёгкости задания интерпретаций и большому количеству разнообразных интерпретаций многозначные логики давно используются не только в академической деятельности, но и в промышленности и производстве. Они имеют множество инженерных приложений, а также они применимы в программировании задач из разных сфер практической деятельности. Теоретическая база, заложенная в диссертации, является необходимым условием для создания эффективных приложений на основе многозначных логик и внедрения этих приложений в производственные сферы. Особенного внимания с точки зрения практической значимости заслуживают результаты о бесконечнозначной логике Лукасевича. На основе этой логики строятся многие из т.н. *нечётких* логик, имеющих приложения в разнообразных задачах управления, например, в задачах управления сложными процессами, не имеющими простых математических моделей, таких как нелинейные процессы, а также в задачах обработки баз знаний, сформированных языковыми данными, полученными от экспертов. Приведём для наглядности некоторые промышленные реализации систем управления на основе нечётких логик: производство полупроводников (Canon), оптимизирование автобусных расписаний (Toshiba), система архивации документов (Mitsubishi Electric), система раннего предсказания землетрясений (Ин-т сейсмологии, Япония), диагностика раковых заболеваний (Kawasaki), распознавание написанных от руки текстов карманными компьютерами (Sony), однокнопочная система управления для стиральных машин (Matsushita, Hitachi), ядерные реакторы повышенной безопасности (Hitachi, Bernard), симуляция судебных разбирательств (ун-т г. Нагоя, Япония).

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на заседаниях исследовательского семинара логического центра ИФ РАН, а также на следующих научных конференциях:

- Смирновские чтения 3, сектор логики ИФ РАН, 2001 г.;
- Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке, СПбГУ, 2002 г.;
- 14th European Summer School for Logic, Language and Information, Тренто, Италия, 2002 г.;

- Смирновские чтения 4, сектор логики ИФ РАН, 2003 г.;
- Summer School and Workshop on Proof Theory, Computation and Complexity, Дрезден, Германия, 2003 г.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, приложения и списка литературы.

Основное содержание диссертации

Во **введении** раскрывается актуальность темы диссертации, формулируются проблемы исследования, определяется цель работы, обосновывается теоретическая и практическая значимость диссертации, вводятся необходимые обозначения.

В **первой главе** — «Истинностно-функциональные семантики» — осуществляется содержательное философское истолкование концепции истинностной функциональности, лежащей в основе явления многозначности. Раскрывается понятие истинностно-функциональной семантики, приводятся наиболее распространённые варианты таких семантик, и среди них: семантика голосования, семантика сходства, семантика рисков, семантика допустимости, семантика приближений.

Во **второй главе** — «Формализация многозначных логик» — даются строгие определения понятий многозначной теории вывода, таких как: логика высказываний, логика первого порядка, абстрактная алгебра, логический вывод, формула с метками, логическое исчисление (секвенциальное, табличное, гильбертовское, резолютивное).

Третья глава — «Функциональный анализ многозначных логик» — содержит изложение основных результатов анализа и классификации функций многозначных логик в классе функций n-значных логик Поста. Приводятся определения замкнутых и S-замкнутых классов функций многозначных логик, а также критерии полноты и S-полноты для этих классов. Даётся предикатная характеризация S-замкнутых классов по Марченкову. Перечисляются функциональные свойства известных многозначных логик.

Четвёртая глава — «Метод резолюций для смешанной логики Поста» — посвящена исследованию так называемой смешанной логики Поста $PostL$, предложенной Косовским и Тишковым [4], и обобщающей в своём исчислении свойства класса исчислений всех n-значных логик Поста. В главе строится исчисление резолюций в духе [10] для смешанной логики Поста.

У логики $PostL$ есть два уровня. На первом, *внутреннем*, уровне рассматриваются формулы многозначной логики. Множество истинностных значений и интерпретация логических связок определяются во внутренней сигнатуре. Предметные переменные — многосортные. На втором, *внешнем*, уровне имеется единственный предикат сравнения значения внутренних формул с нулём. Внешний язык не содержит функциональных символов. Множество внешних предметных переменных совпадает с множеством внутренних предметных переменных. Формулы второго уровня — это формулы двузначной (классической) логики.

Благодаря тому, что для любой $PostL$-формулы можно построить сколемизированную классическую КНФ (также мы будем называть её множеством дизъюнкций $PostL$), мы получаем схему правила резолюции. Пусть $\prec$ обозначает одно из отношений $\leqslant$ или $<$ на рациональных числах. Здесь мы предполагаем, что любой 2-значный литерал $(0 \prec A[+B])$ (т.е. формула внешнего уровня с отрицаниями или без), входящий в дизъюнкцию литералов $PostL$, является сколемизированной формулой, получающейся с помощью конечного числа применений специальной функции перевода δ (она определена в тексте) к некоторой $PostL$-формуле, A и B — это атомы (элементарные формулы) внутреннего уровня, с отрицаниями или без. Выражения в квадратных скобках (с одинаковыми индексами, если они присутствуют), при чтении можно одновременно опустить.

Определение (Резолюция). Пусть Δ_1 и Δ_2 — дизъюнкции со сколемизированными литералами вида $(0 \prec A[+B])$, тогда *бинарная резолюция* — это правило

$$\frac{\Delta_1 \cup \{(0 \prec A_1[+B]^1)\} \qquad \Delta_2 \cup \{(0 \prec \neg A_2[+C]^2)\}}{\big(\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(0 \prec [B]^1[+C]^2)\}\big)\sigma},$$

где знак $\prec$ в заключении обозначает $\leqslant$ тогда и только тогда, когда $\prec$ — это $\leqslant$ в обеих посылках, в противном случае $\prec$ обозначает $<$; σ — это наиболее общий унификатор формул A_1 и A_2. B и C — это атомы, возможно пустые; в частности, если оба эти атома пусты, мы получаем пустую дизъюнкцию литералов $0 \prec \emptyset$.

Вместе с бинарной резолюцией мы допускаем использование правила $(\prec Split)$, что позволяет перегруппировывать внутренние формулы в посылках. Внешние формулы в дизъюнкциях литералов могут быть произвольно расставлены, так как мы рассматриваем лишь неупорядоченную резолюцию. Кроме того допускается использование правила противоречия:

$$\frac{\Delta \cup (0 < A + \neg A)}{\Delta \cup (0 < \emptyset)}$$

Лемма (Основные дизъюнкции литералов). Пусть Φ — произвольное множество основных дизъюнкций литералов $PostL$. Если Φ невыполнимо, то пустая дизъюнкция $(0 \prec \emptyset)$ выводима из Φ конечным числом применений правила бинарной резолюции.

Лемма (подъёма). Если Δ_1' и Δ_2' — это подстановочные случаи дизъюнкций литералов Δ_1 и Δ_2 соответственно, и если Δ' — это резольвента Δ_1' и Δ_2', тогда существует резольвента Δ дизъюнкций Δ_1 и Δ_2, такая что Δ' есть подстановочный случай Δ.

Теорема (Полнота и непротиворечивость). Множество Φ дизъюнкций литералов $PostL$ невыполнимо, если и только если пустой дизъюнкт $(0 \prec \emptyset)$ выводим из Φ конечным числом применений правила бинарной резолюции.

Как следствие теоремы о полноте мы получаем результат:

Следствие. Проблема выполнимости в $PostL$ полна в классе проблем, разрешимых на недетерминированной машине Тьюринга полиномиальными по времени алгоритмами.

В **пятой главе** — «Теорема Чена» — впервые на русском языке даётся полное оригинальное доказательство теоремы Чена о полноте бесконечнозначной логики Лукасевича относительно многообразия MV-алгебр.

Лемма (компактности). Тождество E имеет силу в линейно упорядоченной MV-алгебре $([0,1], \oplus, \odot, \neg, 0, 1)$ тогда и только тогда, когда оно имеет силу в каждой линейно упорядоченной MV-алгебре.

Теорема (Чен). В бесконечнозначной логике Лукасевича всякая формула общезначима, если и только если она доказуема.

Даже в статье Чена [13], где он доказывал эту теорему алгебраическим способом, доказательство не было самодостаточным. Мы приводим полное самодостаточное доказательство теоремы с доказательствами необходимых лемм. Теорема Чена используется далее в главе 6 при получении результата об ограниченности класса многозначных логик, относительно которых корректен специфический метод резолюций, описываемый в той же главе.

Шестая глава — «Метод резолюций на основе теоремы представления дистрибутивных решёток с операторами» — освещает проблематику представления алгебр многозначных логик и знакомит с методом поиска доказательства теорем многозначных логик, основанном на результате [16]. В данной главе мы исследуем теорию вывода многозначных логик с алгебраической точки зрения. Целью исследования является формулировка критерия применимости к произвольной многозначной логике предложенного в [17] метода резолюций на основе теоремы представления Пристли для дистрибутивных решёток с операторами. Данный метод резолюций, как и все существующие методы резолюций, симулирует разрешающую процедуру первопорядковой логики предикатов, по причине чего любой резолютивный вывод может быть эквивалентным образом представлен, например, в гильбертовском исчислении соответствующей логики (пример такого эквивалентного преобразования см. приложение). Отличительной особенностью данного метода, благодаря которой он в ряде случаев более эффективен, чем гильбертовский, является использование специальных меток, которые ограничивают область оценки многозначной формулы некоторым подмножеством множества истинностных значений.

Так называемые *естественные теоремы представления* (см. [18]), к которым относится и теорема Пристли, мотивированы следующими соображениями. Пусть $\mathbf{L}$ — это некоторая логика. Если $\mathbf{L}$ полна и непротиворечива относительно класса $\mathbf{M}$ матриц, и этот класс матриц может быть представлен как множество подмножеств реляционных структур в классе $\mathbf{R}$, тогда реляционные структуры в $\mathbf{R}$ являются возможными кандидатами для определения класса $\mathbf{K}_{\mathbf{M},\mathbf{R}}$ моделей Крипке для $\mathbf{L}$. В частности, при определённых условиях полнота и непротиворечивость логики $\mathbf{L}$ относительно класса $\mathbf{K}_{\mathbf{M},\mathbf{R}}$ есть прямое следствие полноты и непротиворечивости $\mathbf{L}$ относительно $\mathbf{M}$.

Ниже мы приведём основные понятия, необходимые для формулировки базовой теоремы [18, 16].

Непустое множество L с определёнными на нём двухместными операциями $\wedge$ и $\vee$ называется *решёткой*, если

$\wedge$ и $\vee$ ассоциативны, коммутативны, идемпотентны и удовлетворяют законам поглощения. *Дистрибутивной решёткой* называется решётка, удовлетворяющая законам дистрибутивности $\wedge$ относительно $\vee$, а также $\vee$ относительно $\wedge$.

Непустое подмножество F решётки A называется *фильтром*, если для любых $x, y \in F$ имеет место $x \wedge y \in F$, и для любых $x, y \in A$, если $x \in F$ и $x \leqslant y$, тогда $y \in F$. Фильтр F, максимальный относительно свойства $0 \notin F$, называется *ультрафильтром*. Фильтр F называется *главным*, если $F \neq A$ и для всех $x, y \in A$, если $x \vee y \in F$, тогда $x \in F$ или $y \in F$. Далее, назовём *порядковым фильтром* множество $F_x = \{y : y \geqslant x\}$, где $x, y \in L$.

Множество A называется *открытым*, если оно содержит все объединения произвольного количества любых своих подмножеств и все пересечения произвольного конечного их количества, и *замкнутым* — если его дополнение является открытым множеством. Обозначим операцию замыкания произвольного множества как $\mathcal{C}$. Множество с определённой на нём операцией замыкания называется *пространством*.

Класс $\mathbf{B}$ открытых подмножеств пространства X называется *базисом* X, если каждое открытое подмножество X есть объединение некоторых множеств, принадлежащих $\mathbf{B}$. Класс $\mathbf{B}_0$ открытых подмножеств пространства X называется *подбазисом* X, если класс $\mathbf{B}$, состоящий из пустого множества $\emptyset$, самого пространства X и всех конечных пересечений вида $\mathbf{B}_1 \cap \cdots \cap \mathbf{B}_n$, где $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n \in \mathbf{B}_0$, есть базис пространства X.

Пусть X и Y — пространства. Взаимно однозначное отображение $f : X \longrightarrow Y$, сохраняющее операцию замыкания, т.е. удовлетворяющее $f(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(f(A))$, для каждого множества $A \in X$, и $f^{-1}(\mathcal{C}(B)) = \mathcal{C}(f^{-1}(B))$, для каждого $B \subseteq Y$, называется *гомеоморфизмом* X на Y.

Определим *дуал Пристли* для ограниченной дистрибутивной решётки A как частично упорядоченное топологическое пространство $D(A) = (FP(A), \subseteq, \tau)$, где $FP(A)$ — это множество главных фильтров на A, а τ — это *топология*, т.е. система замкнутых подмножеств, порождённая подбазисом, состоящим из множеств вида $X_a = \{F \in FP(A) : a \in F\}$, для всех $a \in A$, а также из их дополнений.

Пусть A — это ограниченная дистрибутивная решётка. *Гомоморфизмом* (*антиморфизмом*) на A называется функция $k : A \longrightarrow A$, сохраняющая (обращающая) порядок. *Гемиморфизмом относительно дизъюнкции* на A называется функция $f : A^n \longrightarrow A$, принимающая значение 0, если любой её аргумент принимает значение 0, и, если её i-тый аргумент равен $a_1 \vee a_2$, равная дизъюнкции двух функций f, у которых на i-тых аргументных местах находятся a_1 и a_2 соответственно. *Гемиморфизм относительно конъюнкции* определяется двойственным образом: в предыдущем определении 0 заменяется на 1, а дизъюнкция — на конъюнкцию. *Гемиантиморфизмом относительно дизъюнкции* на A называется функция $g : A^n \longrightarrow A$, принимающая значение 0, если любой её аргумент принимает значение 1, и, если её i-тый аргумент равен $a_1 \wedge a_2$, равная дизъюнкции двух функций g, у которых на i-тых аргументных местах находятся a_1 и a_2 соответственно. *Гемиантиморфизм относительно конъюнкции* также определяется двойственным образом.

Обозначим как Σ класс всех гомоморфизмов, антиморфизмов, геми(анти)морфизмов относительно дизъюнкции и геми(анти)морфизмов относительно конъюнкции на произвольной ограниченной дистрибутивной решётке A.

Теорема (Теорема представления Пристли, [16]). Каждая ограниченная дистрибутивная решётка A с операторами из специального множества Σ изоморфна решётке $O(D(A))$ открыто-замкнутых порядковых фильтров на $D(A)$. Изоморфизм $f : A \longrightarrow O(D(A))$ задаётся как $f(x) = \{F : F$ — открыто-замкнутый порядковый фильтр на A, и $x \in F\}$.

Правило бинарной резолюции на основе дуальности Пристли выглядит следующим образом (ср. [17], следствия 5 и 6):

> Из посылок $(\boxed{\alpha}L^t) \vee C_1$ и $(\boxed{\beta}L^f) \vee C_2$ выводится $C_1 \vee C_2$ при условии, что $\alpha, \beta \in D(A)$ и $\alpha \leqslant \beta$,

где запись $\boxed{\alpha}L^t$ (или $\boxed{\alpha}L^f$) обозначает, что многозначный литерал L (т.е. элементарная формула многозначной логики с отрицаниями или без) общезначим (соответственно, опровержим) на множестве истинностных значений α; C_1 и C_2 суть дизъюнкции литералов с метками вида $\boxed{\alpha}$; $D(A)$ есть множество всех главных фильтров на алгебре истинностных значений A рассматриваемой логики, упорядоченное по включению. Для ясности изложения мы предполагаем, что L, C_1 и C_2 уже унифицированы. Заметим, что упомянутое правило резолюции по сути своей остаётся классическим (ср., например, [5]), изменения касаются только структуры литералов.

Мы доказываем следующую теорему о методе резолюций на основе теоремы Пристли и о логиках Лукасевича:

Теорема (Корректность метода резолюций). Пусть Ł — это произвольная логика Лукасевича, тогда метод резолюций на основе дуальности Пристли корректен относительно Ł, е.т.е. Ł конечнозначна.

Также мы получаем следующий результат:

Теорема (Критерий применимости метода резолюций). Метод резолюций на основе теоремы представления Пристли корректен относительно произвольной многозначной логики, если и только если многообразие V, порождённое её алгеброй A истинностных значений, замкнуто относительно канонических расширений, т.е. для всех $A \in V$ верно, что $O(D(A)) \in V$.

В **седьмой главе** — «Эффективное доказательство теорем в логиках Лукасевича» — приводятся некоторые оптимизационные методы доказательства теорем в логиках Лукасевича. В частности, для бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_{\aleph_0}$ даётся метод (см. [12]), основанный на теореме Мак-Нотона [6].

Теорема Мак-Нотона установила связь между множеством функций, определённых на n-мерном единичном кубе, и формулами $Ł_{\aleph_0}$ с n различными переменными. Приведём несколько определений.

Определение. Пусть A — это формула $Ł_{\aleph_0}$, а f — это n-местная действительная функция. Формула A *представляет* функцию f (или функция f *представляется* формулой A), если и только если

1. A содержит в точности n различных пропозициональных переменных,

2. f определена на интервале $[0, 1]$ и

3. для любых элементов $x_1, \ldots, x_n$ интервала $[0, 1]$ и любой функции присваивания значений v, такой что $v(p_i) = x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, выполняется условие

$$f(x_1, \ldots, x_n) = v(A).$$

Определение. Действительная функция $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией приписывания значений* формулы $A(P_1, \ldots, P_n)$ логики $Ł_{\aleph_0}$, если верно, что

1. если $A = P_i$, тогда $f_A = x_i$,

2. если $A = \neg B$, тогда $f_A = 1 - f_B$,

3. если $A = B \to C$, тогда

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_B(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \\ & \quad f_C(x_1, \ldots, x_n) \\ 1 - f_B(x_1, \ldots, x_n) + f_C(x_1, \ldots, x_n) \\ & \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема. Если $A(P_1, \ldots, P_n)$ — формула $Ł_{\aleph_0}$, то A представляет её функцию приписывания значений $f_A(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема (Мак-Нотон). Если A — это формула $Ł_{\aleph_0}$, тогда её функция приписывания значений f_A удовлетворяет следующим условиям:

1. f_A непрерывна над $[0,1]^n$ и $\mathrm{Img}(f_A) \subseteq [0,1]$;

2. область определения, $[0,1]^n$, подразделяется на конечное число m подобластей $D_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, это деление исчерпывающее и внутренние части подобластей не пересекаются;

3. существует m многочленов $g_1, \ldots, g_m$ вида

$$g_i = a_{i,0} + a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n,$$

где все $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n)$ — это неотрицательные целые, такие что если $(x_1, \ldots, x_n) \in D_i$, то

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Задача проверки формулы A на общезначимость требует определения того, принимает ли функция f_A значение 1 надо всей её областью определения. А эта задача, в свою очередь, сводится к установлению, принимает ли каждая функция из $f_1, \ldots, f_m$ значение 1 над всей той частью области определения, на которой она определяет f_A. Совершенно закономерно, область определения D разделяется на подобласти $D_1, \ldots, D_m$, где f_i определяет f_A на D_i. Приводятся некоторые таблицы и диаграммы, иллюстрирующие сокращённый метод проверки формулы логики $\text{Ł}_{\aleph_0}$ на общезначимость.

В **заключении** показано, из каких вспомогательных результатов и посылок следуют основные результаты работы. Приводятся научно значимые следствия из основных результатов и общего содержания работы. В особенности указывается на открывающуюся перспективу создания общей теории вывода для большого класса логик, основанных на дистрибутивных решётках или полурешётках с оператором резидуации, т.е. для нечёткозначных логик (включая логики Лукасевича) и релевантных логик.

В **приложении** доказывается вложимость произвольного пропозиционального немодального гильбертовского исчисления в исчисление резолюций с одноместными предикатами и приводится пример, иллюстрирующий подобное вложение: доказательство рефлексивности импликации в аксиоматической системе $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1, \mathbf{X}_3\}$, рассмотренной в [7], с помощью программы автоматического поиска доказательства теорем OTTER. Таким образом доказано, что данная система аксиом является аксиоматизацией импликативного фрагмента классической логики высказываний.

Литература

[1] Ю. И. Янов и А. А. Мучник. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // . *Доклады АН СССР*, 127(1):44–46, 1959.

[2] Д. А. Бочвар и В. К. Финн. О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий I. // *Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам*, стр. 238–295. М.: Наука, 1972.

[3] О. М. Аншаков и С. В. Рычков. О многозначных логических исчислениях // . *Семиотика и информатика*, 19:90–117, 1982.

[4] Н. К. Косовский и А. В. Тишков. *Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств*. СПбГУ, 2000.

[5] Ч. Чень и Р. Ли. *Математическая логика и автоматическое доказательство теорем*. М.: Мир, 1983.

[6] Р. Мак-Нотон. Теорема о бесконечнозначной логике высказываний // . *Кибернетический сборник*, 3, 1961.

[7] А. С. Карпенко. *Многозначные логики*, Вып. 4 из серии *Логика и компьютер*. М.: Наука, 1997.

[8] А. С. Карпенко. Характеризация классов натуральных чисел посредством логических матриц. // *Труды семинара логического центра ИФ РАН*, Вып. XIV, стр. 217–225. М.: ИФРАН, 1999.

[9] S. Aguzzoli и A. Ciabattoni. Finiteness in infinite-valued logic // . *Journal of Logic, Language and Information*, 9(1):5–29, 2000.

[10] M. Baaz и C. G. Fermüller. Resolution based theorem proving for many-valued logics // . *Journal of Symbolic Computation*, 19(4):353–391, 1995.

[11] M. Baaz, C. G. Fermüller, G. Salzer, и R. Zach. Labeled calculi and finite-valued logics // . *Studia Logica*, 61:7–33, 1998.

[12] G. Beavers. Automated theorem proving for Lukasiewicz logics // . *Studia Logica*, 52(2):183–196, 1993.

[13] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics // . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.

[14] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, и D. Mundici. *Algebraic foundations of many-valued reasoning* , Вып. 7 из серии *Trends in logic*. Kluwer, Dordrecht, 1999.

[15] G. Rousseau. Sequents in many-valued logic I // . *Fundamenta Mathematicae*, LX:23–33, 1967.

[16] V. Sofronie-Stokkermans. Duality and canonical extensions of bounded distributive lattices with operators, and applications to the semantics of non-classical logics I // . *Studia Logica*, 64(1):93–132, 2000.

[17] V. Sofronie-Stokkermans. Automated theorem proving by resolution for finitely-valued logics based on distributive lattices with operators // . *Multiple-Valued Logic - An International Journal*, 5(4):289–344, 2001.

[18] V. Sofronie-Stokkermans. Representation theorems and the semantics of non-classical logics, and applications to automated theorem proving. // *Beyond Two: Theory and Applications of Multiple Valued Logic* . Редакторы M. Fitting и E. Orlowska, Studies in Fuzziness and Soft Computing, стр. 59–100. Springer, 2003.

Публикации автора по теме диссертации

[1'] В. Е. Комендантский. 3-значные изоморфы классической логики // *Современная логика: проблемы* *теории, истории и применения в науке. Материалы VI Общероссийской научной конференции*, стр. 199–200. СПбГУ, Июнь 2000.

[2'] В. Е. Комендантский. Незнание в логиках знания // *Смирновские чтения. III международная конференция*, стр. 135–136. М.: ИФ РАН, Май 2001.

[3'] В. Е. Комендантский. Otter и доказательство рефлексивности импликации // *Труды семинара логического центра ИФ РАН*, Вып. XV, стр. 57–60. М.: ИФ РАН, 2001.

[4'] В. Е. Комендантский. Об игровой семантике бесконечнозначной логики Лукасевича // *Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VII Общероссийской научной конференции*, стр. 245. СПбГУ, Июнь 2002.

[5'] В. Е. Комендантский. Метод резолюций в смешанной логике Поста // *Труды семинара логического центра ИФ РАН*, Вып. XVI, стр. 64–74. М.: ИФ РАН, 2002.

[6'] В. Е. Комендантский. Теорема представления Пристли и метод резолюций в многозначных логиках // *Логические исследования*, Вып. 10. М.: Наука, 2003. В печати.

[7'] V. Ye. Komendantsky. Resolution for mixed Post logic // *Proc. 4th ESSLLI Student Session*, Trento, August 2002. University of Trento.

[8'] V. Ye. Komendantsky. On automated theorem proving by means of representation theory in Łukasiewicz logics // *Smirnov's Readings. 4th International Conference* , стр. 78–79, Moscow, May 2003. IPhRAS.

Подписано в печать 18.09.2003. Зак. №001. Объём 0,84 уч.изд.л., 1,56 печ.л. Тир. 100 экз. Отпечатано на принтере сектора логики ИФРАН, Москва, Волхонка 14.