

Étude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par une méthode volumes finis

M. Benjemaa¹ N. Glinsky¹ S. Piperno¹ J. Virieux²

¹INRIA, projet CAIMAN, 2004 Route des Lucioles, BP 93
06902 Sophia Antipolis Cedex, France

²CNRS, UMR GÉOSCIENCES AZUR, 250, rue Albert Einstein,
06560 Sophia Antipolis-Valbonne, France

Séminaires croisés Caiman/Opale/Smash/Tropics
Propagation d'ondes : simulation, différentiation et optimisation
28 Mars 2007

- Description physique du phénomène de la rupture
- Motivation sur le choix de schémas volumes finis
- Introduction aux équations de l'élastodynamique et au schéma volumes finis
- Définition et étude d'énergie
 - Conditions aux limites absorbantes sur le bord extérieur du domaine
 - Conditions aux limites sur la faille
- Résultats numériques
- Conclusion et perspectives

Description physique du phénomène de la rupture

- Les tremblement de terre surviennent essentiellement dans des zones fragiles (frontières des plaques tectoniques et failles). On s'intéresse à simulation de la propagation des ondes émises lors d'un séismes, mais aussi et surtout, à la propagation de la faille elle même.
- Les lois qui gouvernent la propagation des ondes sismiques à l'intérieur de la terre sont en général bien comprises. Celles qui gouvernent le mécanisme des rupture le sont moins. Des relations constitutives, déduites principalement à partir des observations des failles exposées à la surface de la terre et des expériences en laboratoire, contrôlent le rapport entre déformations et contraintes au voisinage des failles.

movie

Description physique du phénomène de la rupture

- Les tremblement de terre surviennent essentiellement dans des zones fragiles (frontières des plaques tectoniques et failles). On s'intéresse à simulation de la propagation des ondes émises lors d'un séismes, mais aussi et surtout, à la propagation de la faille elle même.
- Les lois qui gouvernent la propagation des ondes sismiques à l'intérieur de la terre sont en général bien comprises. Celles qui gouvernent le mécanisme des rupture le sont moins. Des relations constitutives, déduites principalement à partir des observations des failles exposées à la surface de la terre et des expériences en laboratoire, contrôlent le rapport entre déformations et contraintes au voisinage des failles.

movie

- Bien adapté à des solutions discontinues
- Maillages non structurés, non-conformes
- Matrices de masses locales
- Schémas d'ordres élevés
- Hautement parallélisable

- Bien adapté à des solutions discontinues
- Maillages non structurés, non-conformes
- Matrices de masses locales
- Schémas d'ordres élevés
- Hautement parallélisable

- Bien adapté à des solutions discontinues
- Maillages non structurés, non-conformes
- Matrices de masses locales
- Schémas d'ordres élevés
- Hautement parallélisable

- Bien adapté à des solutions discontinues
- Maillages non structurés, non-conformes
- Matrices de masses locales
- Schémas d'ordres élevés
- Hautement parallélisable

- Bien adapté à des solutions discontinues
- Maillages non structurés, non-conformes
- Matrices de masses locales
- Schémas d'ordres élevés
- Hautement parallélisable

Équations de l'élastodynamique : formulation vitesses-contraintes

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\operatorname{div} \underline{\sigma}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} I_n + \mu (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t), \quad (2)$$

$n = 2, 3$ est la dimension de l'espace

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur vitesse des particules

$\underline{\sigma} \in \operatorname{sym}_n(\mathbb{R})$ est le tenseur des contraintes

ρ est la masse volumique et λ et μ sont les coefficients de Lamé locaux.

En deux dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

On introduit le changement de variables suivant

$$T = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \quad \text{et} \quad T' = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}.$$

On pose aussi

$$\vec{\sigma} = (T, T', \sigma_{xz})^t$$

donc

$$\underline{\sigma} \rightsquigarrow \vec{\sigma}$$

En deux dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

On introduit le changement de variables suivant

$$T = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \quad \text{et} \quad T' = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}.$$

On pose aussi

$$\vec{\sigma} = (T, T', \sigma_{xz})^t$$

donc

$$\underline{\sigma} \rightsquigarrow \vec{\sigma}$$

En deux dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

On introduit le changement de variables suivant

$$T = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \quad \text{et} \quad T' = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}.$$

On pose aussi

$$\vec{\sigma} = (T, T', \sigma_{xz})^t$$

donc

$$\underline{\sigma} \rightsquigarrow \vec{\sigma}$$

Le système (1)-(2) est équivalent

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\sum_{\alpha \in \{x,z\}} \mathbb{M}_\alpha \partial_\alpha \right) \vec{\sigma} \quad (3)$$

$$\Lambda \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \left(\sum_{\alpha \in \{x,z\}} \mathbb{N}_\alpha \partial_\alpha \right) \vec{v} \quad (4)$$

$$\mathbb{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{N}_\alpha = \mathbb{M}_\alpha^t, \quad \alpha = x, z$$

$$\Lambda = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda + \mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$$

Si on note

$$F(\vec{\sigma}) = (\mathbb{M}_x \vec{\sigma}, \mathbb{M}_z \vec{\sigma}) \quad \text{et} \quad G(\vec{v}) = (\mathbb{N}_x \vec{v}, \mathbb{N}_z \vec{v})$$

on obtient en intégrant les équations (3)-(4) sur un volume \mathcal{T} ,

$$\int_{\mathcal{T}} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \int_{\partial \mathcal{T}} F(\vec{\sigma}) \vec{n} dS \quad (5)$$

$$\int_{\mathcal{T}} \Lambda \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = \int_{\partial \mathcal{T}} G(\vec{v}) \vec{n} dS \quad (6)$$

où \vec{n} est la normale unitaire à \mathcal{T} , dirigée vers l'extérieur.

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 , et désignons par $\partial\Omega$ son bord. Soit $V(\Omega)$ une partition en triangles de Ω . Pour chaque volume de contrôle ou cellule \mathcal{T}_i supposée polygonale de $V(\Omega)$, on désigne par ρ_i , λ_i et μ_i respectivement la densité et les coefficients de Lamé, supposés constants dans chaque cellule.

Notations

- 1 $\mathcal{A}_i = \int_{\mathcal{T}_i} dS$ volume de la cellule \mathcal{T}_i .
- 2 $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$ interface entre les deux cellules voisines \mathcal{T}_i et \mathcal{T}_j .
- 3 $\vec{l}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{n}_{ij} dS$ où \vec{n}_{ij} est la normale unitaire dirigée de \mathcal{T}_i vers \mathcal{T}_j .
- 4 $l_{ij} = \|\vec{l}_{ij}\|$ longueur de \mathcal{T}_{ij} .

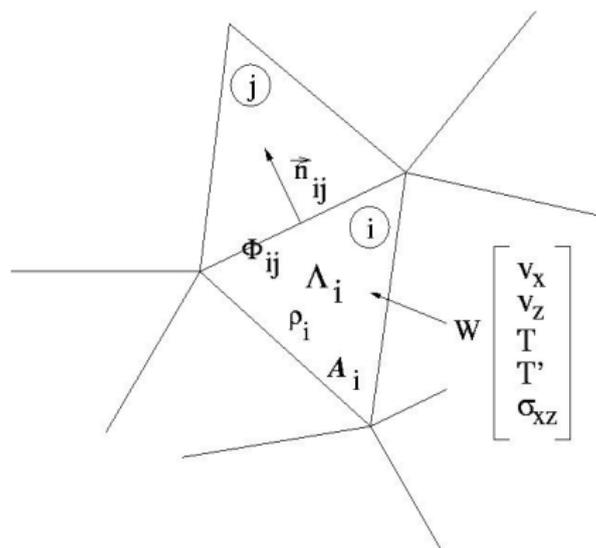


Figure: Deux cellules (volumes de contrôle) adjacentes dans le maillage.

Le système (5)-(6) peut s'écrire

$$\mathcal{A}_i \rho_i \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} l_{ij} F_{ij} \quad (7)$$

$$\mathcal{A}_i \Lambda_i \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} \right)_i = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} l_{ij} G_{ij} \quad (8)$$

$\left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} \right)_i$ et $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_i$ sont respectivement des approximations, supposées constantes, de $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ dans chaque cellule \mathcal{T}_i .

$l_{ij} F_{ij}$ et $l_{ij} G_{ij}$ sont des approximations des flux $\int_{\partial \mathcal{T}_i} F(\vec{\sigma}) \vec{n} dS$ et $\int_{\partial \mathcal{T}_i} G(\vec{v}) \vec{n} dS$ respectivement

- Flux centrés en espace

$$F_{ij} = F(\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j, \vec{n}_{ij}),$$

avec

$$F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{F(\vec{u}) + F(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{\left(\sum_{k \in \{x,z\}} n_k \mathbb{M}_k \right)}_{\mathbb{P}} \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$$

et

$$G_{ij} = G(\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{n}_{ij}),$$

avec

$$G(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{G(\vec{u}) + G(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{\left(\sum_{k \in \{x,z\}} n_k \mathbb{N}_k \right)}_{\mathbb{Q}} \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$$

- Flux centrés en espace

$$F_{ij} = F(\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j, \vec{n}_{ij}),$$

avec

$$F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{F(\vec{u}) + F(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{\left(\sum_{k \in \{x,z\}} n_k \mathbb{M}_k \right)}_{\mathbb{P}} \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$$

et

$$G_{ij} = G(\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{n}_{ij}),$$

avec

$$G(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{G(\vec{u}) + G(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{\left(\sum_{k \in \{x,z\}} n_k \mathbb{N}_k \right)}_{\mathbb{Q}} \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$$

- Schéma saute-mouton en temps

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \frac{\vec{v}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} \sim \frac{\vec{\sigma}^{n+1} - \vec{\sigma}^n}{\Delta t}$$

On obtient le système suivant

$$\mathcal{A}_i \rho_i \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} l_{ij} F_{ij}^n \quad (9)$$

$$\mathcal{A}_i \Lambda_i \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\Delta t} = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} l_{ij} G_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\text{avec } F_{ij}^n = \mathbb{P}_{ij} \frac{\sigma_i^n + \sigma_j^n}{2} \quad \text{où} \quad \mathbb{P}_{ij} = \sum_{k \in \{x,z\}} n_{ijk} \mathbb{M}_k$$

$$\text{et } G_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{Q}_{ij} \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} + v_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{où} \quad \mathbb{Q}_{ij} = \sum_{k \in \{x,z\}} n_{ijk} \mathbb{N}_k$$

L'énergie du système est donnée par

$$E = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2}_{E_c} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{\sigma})^t \Lambda \vec{\sigma}}_{E_m}$$

On définit alors l'énergie discrète par

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i \left(\rho_i \left(v_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t v_i^{n+\frac{1}{2}} + (\sigma_i^n)^t \Lambda_i \sigma_i^n \right)$$

L'énergie du système est donnée par

$$E = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|^2}_{E_c} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{\sigma})^t \Lambda \vec{\sigma}}_{E_m}$$

On définit alors l'énergie discrète par

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i \left(\rho_i \left(v_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t v_i^{n+\frac{1}{2}} + (\sigma_i^n)^t \Lambda_i \sigma_i^n \right)$$

Définition et étude d'énergie

La variation de l'énergie entre $n \Delta t$ et $(n + 1) \Delta t$ est donnée par

$$\Delta E = \Delta t \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{spéciales}}} l_{ij} \left[\left(v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \left(F_{ij}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right) + \left(\sigma_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right)^t G_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

avec $w^{[n+\frac{1}{2}]} = \frac{w^n + w^{n+1}}{2}$, et le terme “interfaces spéciales” désigne toute surface à travers laquelle le champ subit une modification (discontinuité, réflexion, absorption, etc ...)

- **Conditions aux limites absorbantes**

Sur $\partial\Omega$, on propose les flux absorbants suivants

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} v_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$G_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbb{B} \sigma_i^n \quad (12)$$

où \mathbb{A} et \mathbb{B} sont deux matrices symétriques positives.

$$\mathbb{A} \simeq \text{diag}(V_p, V_s)$$

$$\mathbb{B} \simeq \text{diag}(V_p, 2V_s, 0)$$

avec $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de pression P,

et $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de cisaillement S.

- **Conditions aux limites absorbantes**

Sur $\partial\Omega$, on propose les flux absorbants suivants

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^n - \frac{1}{2} \mathbb{A} v_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$G_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbb{B} \sigma_i^n \quad (12)$$

où \mathbb{A} et \mathbb{B} sont deux matrices symétriques positives.

$$\mathbb{A} \simeq \text{diag}(V_p, V_s)$$

$$\mathbb{B} \simeq \text{diag}(V_p, 2V_s, 0)$$

avec $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de pression P,

et $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ est la vitesse de l'onde de cisaillement S.

La variation d'énergie s'écrit

$$\Delta E = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{absorbantes}}} l_{ij} \left[\left(v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \left(v_i^{n-\frac{1}{2}} + v_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + (\sigma_i^n)^t \mathbb{B} (\sigma_i^n + \sigma_i^{n+1}) \right]$$

Termes correctifs

$$\mathcal{E}^n = E^n + \Delta t \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \frac{l_{ij}}{8} \left(\left(v_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} v_i^{n-\frac{1}{2}} - (\sigma_i^n)^t \mathbb{B} \sigma_i^n \right)$$

$$\Delta \mathcal{E} = - \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} l_{ij} \left[\left(v_i^{n-\frac{1}{2}} + v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \left(v_i^{n-\frac{1}{2}} + v_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + (\sigma_i^n + \sigma_i^{n+1})^t \mathbb{B} (\sigma_i^n + \sigma_i^{n+1}) \right]$$

\mathbb{A} et \mathbb{B} positives $\implies \Delta \mathcal{E} \leq 0$

Termes correctifs

$$\mathcal{E}^n = E^n + \Delta t \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} \frac{l_{ij}}{8} \left(\left(v_i^{n-\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} v_i^{n-\frac{1}{2}} - (\sigma_i^n)^t \mathbb{B} \sigma_i^n \right)$$

$$\Delta \mathcal{E} = - \frac{\Delta t}{8} \sum_{\text{absorbantes}}^{\text{interfaces}} l_{ij} \left[\left(v_i^{n-\frac{1}{2}} + v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t \mathbb{A} \left(v_i^{n-\frac{1}{2}} + v_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + (\sigma_i^n + \sigma_i^{n+1})^t \mathbb{B} (\sigma_i^n + \sigma_i^{n+1}) \right]$$

\mathbb{A} et \mathbb{B} positives $\implies \Delta \mathcal{E} \leq 0$

Conditions CFL

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \text{Sur les interfaces internes } \mathcal{T}_{ij}, \quad \Delta t^2 < \frac{16}{3} \frac{\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{\rho_i \rho_j} \min \left(\frac{\rho_i}{\lambda_j + \mu_j}, \frac{\rho_j}{\lambda_i + \mu_i} \right) \\ (ii) \quad \text{Sur les interfaces absorbantes } \mathcal{T}_i, \quad \Delta t < \frac{4}{V_p} \frac{\mathcal{A}_i}{\rho_i} \min \left(\frac{V_s}{V_p}, \frac{1}{2} \right) \end{array} \right.$$

\mathcal{E}^n est une forme quadratique définie positive, décroissante

\implies Stabilité L^2 du système

Conditions aux limites sur la faille

Idée : Sur une surface de la faille, le champ est totalement (ou partiellement) réfléchi, donc ne dépend pas (ou partiellement) du champ voisin. mesh

Conditions aux limites sur la faille

Idée : Sur une surface de la faille, le champ est totalement (ou partiellement) réfléchi, donc ne dépend pas (ou partiellement) du champ voisin. mesh

Flux centré

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^n + \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_j^n$$

Conditions aux limites sur la faille

Idée : Sur une surface de la faille, le champ est totalement (ou partiellement) réfléchi, donc ne dépend pas (ou partiellement) du champ voisin. mesh

Flux centré

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^n + \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \cancel{\sigma_j^n}$$

Conditions aux limites sur la faille

Idée : Sur une surface de la faille, le champ est totalement (ou partiellement) réfléchi, donc ne dépend pas (ou partiellement) du champ voisin. mesh

Flux sur la faille

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^n + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ij} \sigma_i^n + \mathbb{B}_{ij} \sigma_j^n)$$

Ainsi

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{ij} \sigma_i^n + \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{ij} \sigma_i^n + \mathbb{B}_{ij} \sigma_j^n) \quad (13)$$

$$G_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbb{Q}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ij} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{D}_{ij} v_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (14)$$

où \mathbb{A}_{ij} , \mathbb{B}_{ij} , \mathbb{C}_{ij} et \mathbb{D}_{ij} sont des matrices à déterminer.

Conditions aux limites sur la faille

La variation de l'énergie s'écrit

$$\Delta E = \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{réfléchissantes}}} l_{ij} \left[\left(v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t) \sigma_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \left(v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t) \sigma_j^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\ \left. - \left(v_j^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t) \sigma_j^{[n+\frac{1}{2}]} - \left(v_j^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t) \sigma_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right].$$

Condition suffisante de stabilité

$$\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t = 0 \quad (15)$$

et

$$\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t = 0 \quad (16)$$

La variation de l'énergie s'écrit

$$\Delta E = \frac{\Delta t}{2} \sum_{\substack{\text{interfaces} \\ \text{réfléchissantes}}} l_{ij} \left[\left(\mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t) \sigma_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \left(\mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t) \sigma_j^{[n+\frac{1}{2}]} \right. \\ \left. - \left(\mathbf{v}_j^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t) \sigma_j^{[n+\frac{1}{2}]} - \left(\mathbf{v}_j^{n+\frac{1}{2}} \right)^t (\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t) \sigma_i^{[n+\frac{1}{2}]} \right].$$

Condition suffisante de stabilité

$$\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij}^t = 0 \quad (15)$$

et

$$\mathbb{B}_{ij} - \mathbb{D}_{ij}^t = 0 \quad (16)$$

Fracture : mode II (plan)

$$\vec{t}^t \underline{\sigma} \vec{n} = g \quad (17)$$

$g \in L^\infty(\mathbb{R})$ représente les forces extérieures exercées sur la surface de la faille.

Dans le cas général, on a vu que F_{ij} s'écrit

$$F_{ij} = \mathbb{P}_{ij} \frac{\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_j}{2}.$$

On peut vérifier que

$$F_{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij}$$

donc le flux F_{ij} à travers une surface \mathcal{T}_{ij} n'est autre que l'ensemble des forces extérieures exercées sur cette surface.

En écrivant

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (F_{ij})_T + (F_{ij})_N \\ &= \underbrace{\vec{t}_{ij} \left(\vec{t}_{ij}^t \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij} \right)}_g + \vec{n}_{ij} \left(\vec{n}_{ij}^t \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij} \right) \end{aligned}$$

et par l'équation (17), on déduit les conditions aux limites sur la faille

$$\mathbb{A}_{ij} = (\vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} - \mathbb{I}_2) \mathbb{P}_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{ij} = \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} \mathbb{P}_{ij},$$

Équations (15) et (16) \implies

$$\mathbb{C}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij} (\mathbb{I}_2 - \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}) \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij} \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}$$

En écrivant

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (F_{ij})_T + (F_{ij})_N \\ &= \underbrace{\vec{t}_{ij} \left(\vec{t}_{ij}^t \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij} \right)}_g + \vec{n}_{ij} \left(\vec{n}_{ij}^t \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij} \right) \end{aligned}$$

et par l'équation (17), on déduit les conditions aux limites sur la faille

$$\mathbb{A}_{ij} = (\vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} - \mathbb{I}_2) \mathbb{P}_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{ij} = \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} \mathbb{P}_{ij},$$

Équations (15) et (16) \implies

$$\mathbb{C}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij} (\mathbb{I}_2 - \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}) \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij} \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}$$

En écrivant

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (F_{ij})_T + (F_{ij})_N \\ &= \underbrace{\vec{t}_{ij} \left(\vec{t}_{ij}^t \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij} \right)}_g + \vec{n}_{ij} \left(\vec{n}_{ij}^t \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \vec{n}_{ij} \right) \end{aligned}$$

et par l'équation (17), on déduit les conditions aux limites sur la faille

$$\mathbb{A}_{ij} = (\vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} - \mathbb{I}_2) \mathbb{P}_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{ij} = \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} \mathbb{P}_{ij},$$

Équations (15) et (16) \implies

$$\mathbb{C}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij} (\mathbb{I}_2 - \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}) \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij} \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}$$

Faille plane évolutive à vitesse constante prédéfinie

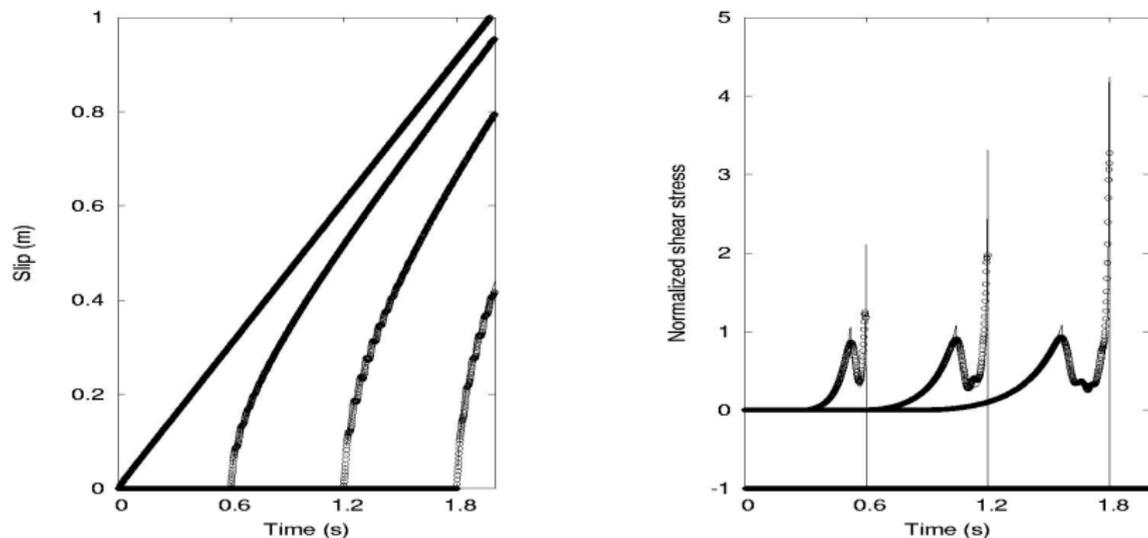


Figure: Comparison of the numerical (circles) and analytical (solid lines) solutions for the self-similar dynamic crack growth problem

Faïlle plane évolutive à vitesse non prédéfinie

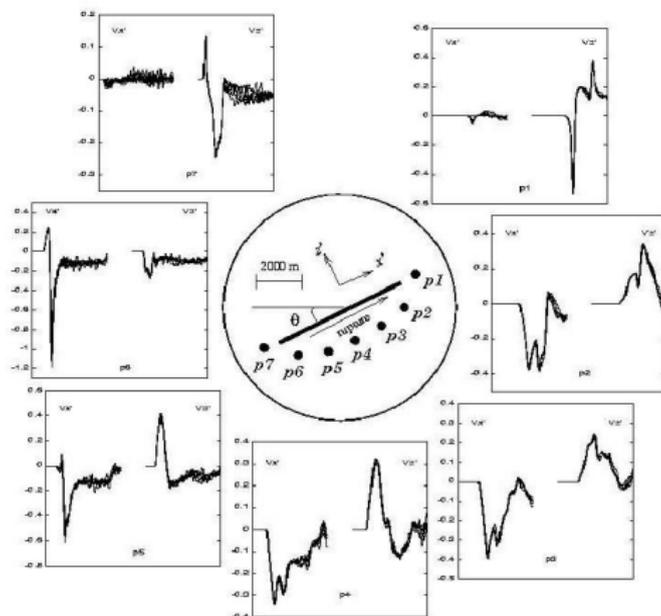


Figure: Velocity seismograms computed at seven points located around the fault, for six different orientations ($\theta = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ, 45^\circ$)

Faille plane évolutive à vitesse non prédéfinie

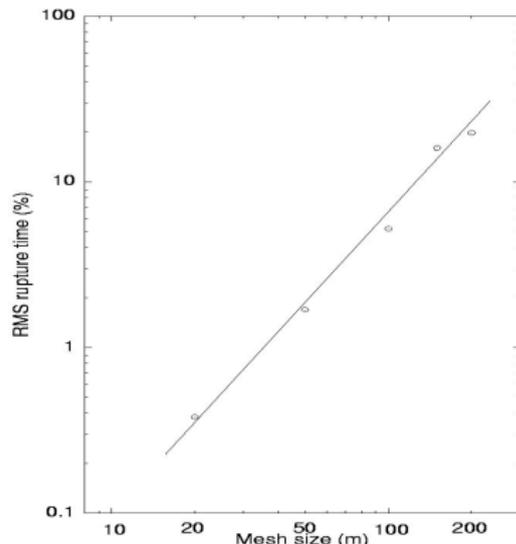
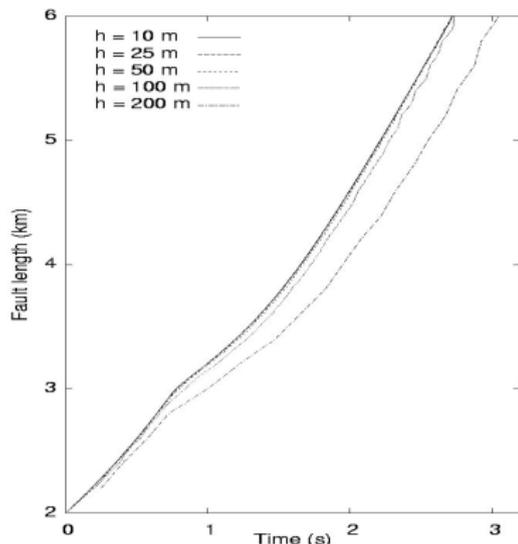


Figure: Comparison of the rupture length (left) and the L^2 -norm time difference (right) for the spontaneous rupture zone.

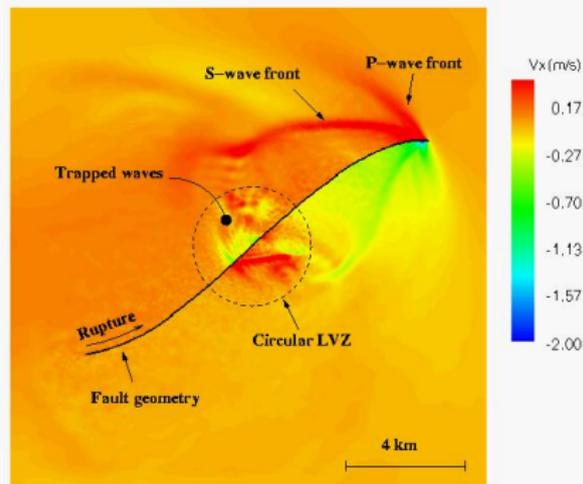
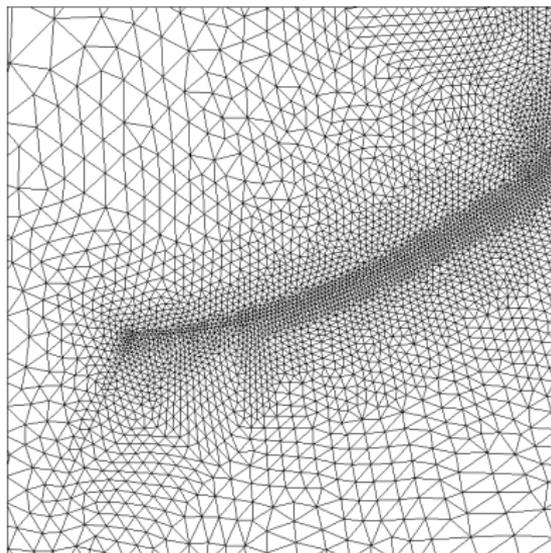
Propagation d'une faille courbe dans un milieu hétérogène

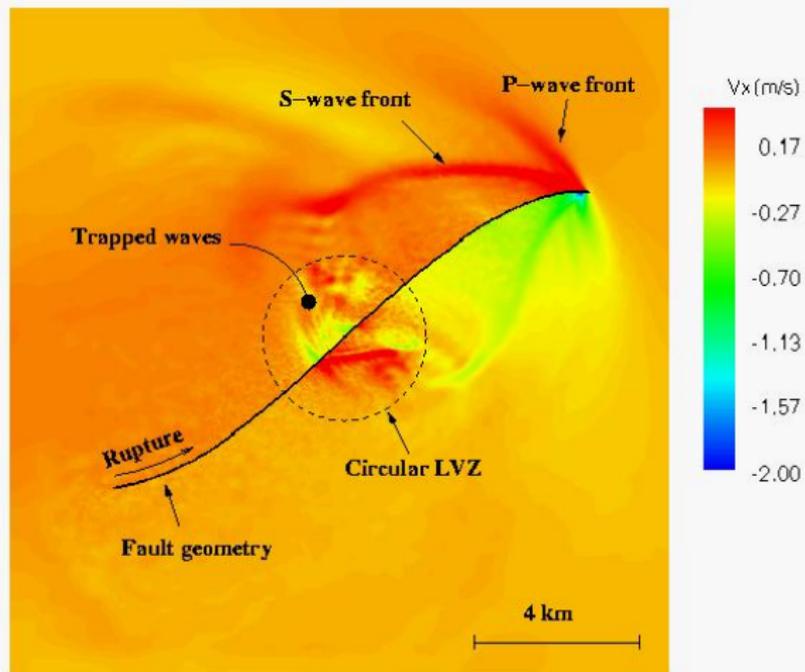
Medium: $V_p = 4000$ m/s , $V_s = 2300$ m/s and $\rho = 2500$ Kg/m³

LVZ (Lower Velocity Zone, 4 Km diameter): $V_p = 2200$ m/s , $V_s = 1300$ m/s and $\rho = 1400$ Kg/m³

Rupture is 14.3 Km long with a 1 Km long nucleation zone

Contour lines of v_x (4 sec after rupture initiation)





back



- Schéma volumes finis en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'énergie permettant de déterminer les bonnes conditions aux limites sur la faille
- Cas tridimensionnel et parallélisation.

- Schéma volumes finis en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'énergie permettant de déterminer les bonnes conditions aux limites sur la faille
- Cas tridimensionnel et parallélisation.

- Schéma volumes finis en maillage non structuré, bien adapté à des géométries complexes des failles
- Étude d'énergie permettant de déterminer les bonnes conditions aux limites sur la faille
- Cas tridimensionnel et parallélisation.

Merçi!