Méthode de domaines fictifs s'appuyant sur une formulation de type Galerkin discontinu.

A. Bouquet² C. Dedeban² S. Piperno¹

 ¹INRIA, projet CAIMAN, 2004 Route des Lucioles, BP 93 06902 Sophia Antipolis Cedex, France
 ² France Telecom Recherche et Developpement, Fort de la tête de Chien, 06320 La Turbie, France

> Séminaire croisé INRIA 28 Mars 2007

< □ >

Plan

- Objectifs
- Méthodes de type Galerkin discontinu pour les équations de Maxwell en domaine temporel
 - Formulation
 - Traitement des motifs métalliques
 - Stabilité du schéma
 - Choix des fonctions de base
 - Etude de dispersion
 - Conditions aux limites absorbantes
 - Etude de structures planaires
- Methode des domaines fictifs
 - Principe
 - Formulation
 - Propriétés
 - Couplage avec la méthode Galerkin discontinu
- Conclusion et perspectives

 Objectif général: développer une methode de domaines fictifs couplée avec une méthode type élément finis discontinus dans le domaine temporel afin d'utiliser des maillages localement non-conformes pour les zones très inhomogènes.

Schéma Galerkin Discontinu

Equations de Maxwell:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - rot \vec{H} + \vec{j} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot \vec{E} = 0$$
$$div \vec{D} - \rho = 0$$
$$div \vec{B} = 0$$

où \vec{D} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} sont respectivement l'induction et le champ électrique, l'induction et le champ magnétique, avec

$$\vec{D} = \varepsilon(x)\vec{E}$$

 $\vec{B} = \mu(x)\vec{H}$

 $\varepsilon(x)$ la permittivité électrique, $\mu(x)$ la perméabilité magnétique.

 \vec{j} la densité de courant électrique et ρ la densité de charge volumique.

A. Bouquet (FRANCE TELECOM)

Notations:

- \mathcal{T}_i un polyèdre de \mathbb{R}^3
- $a_{ik} = T_i \cap T_k$ face séparant les cellules T_i et T_k .
- \vec{n}_{ik} la normale unitaire orientée de \mathcal{T}_i vers \mathcal{T}_k .
- V_i l'ensemble des cellules voisines de T_i .
- ε_i et μ_i les valeurs moyennes de ε et μ sur T_i .

Discrétisation en espace (1/3):

- Représentation locale des champs dans chaque cellule T_i
 - Un espace vectoriel de dimension d_i
 - Un ensemble de fonctions de bases vectorielles φ_{ij} , $1 \le j \le d_i$.

$$\vec{E} \simeq \sum_{i} \vec{E}_{i} = \sum_{i} \sum_{1 \le j \le d_{i}} E_{ij} \vec{\varphi}_{ij}, \ \vec{H} \simeq \sum_{i} \vec{H}_{i} = \sum_{i} \sum_{1 \le j \le d_{i}} H_{ij} \vec{\varphi}_{ij}$$

- Les fonctions de base n'assurent aucune continuité d'un élément à l'autre
- Formulation faible des équations de Maxwell dans chaque élément

$$\int_{\mathcal{T}_i} \varepsilon_i \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \cdot \vec{\varphi}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_i} (\vec{rot} \vec{H}_i - \vec{j}) \cdot \vec{\varphi}_{ij}, \ \int_{\mathcal{T}_i} \mu_i \frac{\partial \vec{H}_i}{\partial t} \cdot \vec{\varphi}_{ij} = -\int_{\mathcal{T}_i} \vec{rot} \vec{E}_i \cdot \vec{\varphi}_{ij}$$

Discrétisation en espace (2/3):

•
$$\vec{rot}(\vec{X}) \cdot \vec{\Phi} = \vec{rot}(\vec{\Phi}) \cdot \vec{X} - div(\vec{\Phi} \times \vec{X})$$

$$\int_{\mathcal{T}_{i}} \varepsilon_{i} \frac{\partial \vec{E}_{i}}{\partial t} \cdot \vec{\varphi}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_{i}} \vec{rot} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{H} - \int_{\mathcal{T}_{i}} \vec{j} \cdot \vec{\varphi}_{ij} - \int_{\partial \mathcal{T}_{i}} (\vec{\varphi}_{ij} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}$$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \mu_i \frac{\partial \ddot{\mathcal{H}}_i}{\partial t} \cdot \vec{\varphi}_{ij} = -\int_{\mathcal{T}_i} \vec{rot} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{E} + \int_{\partial \mathcal{T}_i} (\vec{\varphi}_{ij} \times \vec{E}) \cdot \vec{n}$$

 Sur chaque interface a_{ik}, les valeurs des champs sont à définir ⇒ utilisation d'une approximation centrée des flux aux interfaces:

$$k \in \mathcal{V}_i, orall x \in F_{ik}, \vec{E}(x) = rac{ec{E}_i(x) + ec{E}_k(x)}{2}, \ \vec{H}(x) = rac{ec{H}_i(x) + ec{H}_k(x)}{2}$$

Schéma Galerkin discontinu

Discrétisation en espace (3/3):

On obtient alors le système semi-discret

$$\begin{cases} (\varepsilon_{i}M_{i}\frac{\partial \vec{E}_{i}}{\partial t})_{j} = \int_{\mathcal{T}_{i}} \vec{rot}\vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{H} - \int_{\mathcal{T}_{i}} \vec{j} \cdot \vec{\varphi}_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_{i}} \int_{a_{ik}} (\vec{\varphi}_{ij} \times \frac{\vec{H}_{i} + \vec{H}_{k}}{2}) \cdot \vec{n}_{ik} \\ (\mu_{i}M_{i}\frac{\partial \vec{H}_{i}}{\partial t})_{j} = -\int_{\mathcal{T}_{i}} \vec{rot}\vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{E} + \sum_{k \in \mathcal{V}_{i}} \int_{a_{ik}} (\vec{\varphi}_{ij} \times \frac{\vec{E}_{i} + \vec{E}_{k}}{2}) \cdot \vec{n}_{ik} \end{cases}$$

où M_i est la matrice de masse locale associée à la cellule T_i

$$(M_i)_{jk} = \int_{V_i} \vec{\varphi}_{ij} \vec{\varphi}_{ik}$$

Discrétisation temporelle

- Schéma saute mouton d'ordre 2
- Pas de temps fixe Δt
 - $\Rightarrow \vec{E}$ approché aux instants $t^n = n\Delta t$
 - \Rightarrow $ec{H}$ approché aux instants $t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$
- Schéma explicite (matrice de masse locale à inverser)

$$\int_{\mathcal{T}_{i}} \left(\varepsilon_{i} M_{i} \frac{\vec{E}_{i}^{n+1} - \vec{E}_{i}^{n}}{\partial t} \right)_{j} = \int_{\mathcal{T}_{i}} r \vec{o} t \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{H}^{n+1/2} - \int_{\mathcal{T}_{i}} \vec{j}^{n+1/2} \cdot \vec{\varphi}_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_{i}} \int_{a_{ik}} (\vec{\varphi}_{ij} \times \frac{\vec{H}_{i}^{n+1/2} + \vec{H}_{k}^{n+1/2}}{2}) \cdot \vec{n}_{ik}$$

$$(\mu_{i} M_{i} \frac{\vec{H}_{i}^{n+3/2} + \vec{H}_{i}^{n+1/2}}{\partial t}) = -\int_{\mathcal{T}_{i}} r \vec{o} t \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{E}^{n+1} + \sum_{k \in \mathcal{V}_{i}} \int_{F_{ik}} (\vec{\varphi}_{ij} \times \frac{\vec{E}_{i}^{n+1} + \vec{E}_{k}^{n+1}}{2}) \cdot \vec{n}_{ik}$$

Traitement des motifs métalliques

Porté par les interfaces a_{ik} du maillage respectant les propriétés physiques:

- Nullité de la trace tangentielle de \vec{E} sur a_{ik}
- Discontinuité de la trace tangentielle de \vec{H} sur a_{ik}

Pour toute face métallique a_{ik} , on utilise les relations:

$$\forall x \in a_{ik}, \begin{cases} \vec{E}_i(x) = -\vec{E}_k(x), \\ \vec{H}_i(x) = \vec{H}_k(x) \end{cases}$$
(1)

Stabilité du schéma(L.Fezoui et al., 2005) On définit une énergie électromagnétique discrète \mathbb{E}^n au temps $n\Delta t$:

$$\mathbb{E}^{n} = \sum_{i} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_{i}} ({}^{t}\vec{E}_{i}^{n}\bar{\bar{\varepsilon}}\vec{E}_{i}^{n} + {}^{t}\vec{H}_{i}^{n-1/2}\bar{\bar{\mu}}\vec{H}_{i}^{n+1/2})$$

• \mathbb{E}^n exactement conservée

⇒schéma non diffusif

• \mathbb{E}^n est une forme quadratique définie positive de \vec{E}_i^n et $\vec{H}_i^{n-1/2}$, sous une condition de type CFL sur Δt

 \Rightarrow Stabilité du schéma

Schéma Galerkin Discontinu

Choix des fonctions de base:

Pour chaque cellule V_i d'un maillage cubique, nous choisissons l'espace des éléments finis de plus bas degré de Nédélec pour $H(\vec{rot})$ pour représenter \vec{E} et \vec{H} .

- Fonctions de bases identiques pour \vec{E} et \vec{H}
- Champs approchés par des fonctions de bases linéaires
- Soit l'espace $\mathbb{Q}_{1}^{div} = \{ \vec{F} = (F_x, F_y, F_z), F_x \in Q_{0,1,1}, F_y \in Q_{1,0,1}, F_z \in Q_{1,1,0} \}$ dans lequel le champ s'écrit $(\vec{F} = \vec{E} \text{ ou } \vec{H})$

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 yz \\ F_y(x, y, z) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z + \beta_4 xz \\ F_z(x, y, z) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_3 xy \end{cases}$$

 \Rightarrow Champ à divergence nulle dans chaque cellule

• Fonctions de base polynomiales de \mathbb{Q}_1^{div}

$$\vec{\varphi}_{i,1} = (1-y)(1-z)\vec{e}_x \quad \vec{\varphi}_{i,2} = z(1-y)\vec{e}_x \quad \vec{\varphi}_{i,3} = y(1-z)\vec{e}_x \quad \vec{\varphi}_{i,4} = yz\vec{e}_x \\ \vec{\varphi}_{i,5} = (1-z)(1-x)\vec{e}_y \quad \vec{\varphi}_{i,6} = x(1-z)\vec{e}_y \quad \vec{\varphi}_{i,7} = z(1-x)\vec{e}_y \quad \vec{\varphi}_{i,8} = zx\vec{e}_y \\ \vec{\varphi}_{i,9} = (1-x)(1-y)\vec{e}_z \quad \vec{\varphi}_{i,10} = y(1-x)\vec{e}_z \quad \vec{\varphi}_{i,11} = x(1-y)\vec{e}_z \quad \vec{\varphi}_{i,12} = xy\vec{e}_z$$

Schéma Galerkin Discontinu

Erreur de dispersion \mathbb{Q}_1^{div} sur un maillage cubique

• Relation de dispersion en continu

$$\omega_{ex}^2 = |\vec{k}|^2 C^2$$

 ω_{ex} la pulsation, \vec{k} le vecteur d'onde, C la vitesse des ondes.

- Relation de dispersion discrète: Elle dépend de la direction du vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ considéré:
 - Si \vec{k} est tel que $|\vec{k}| = 3k_x, \; 3k_y$ ou $3k_z$, l'erreur de dispersion est d'ordre 1

$$\omega^{2}/\omega_{ex}^{2} = 1 \pm 2\sqrt{|\frac{W'(\vec{k})}{U(\vec{k})}|} |\vec{k}|h + \frac{\omega_{ex}^{2}\Delta t^{2}}{12} + O(|k|^{2}h^{2}, \omega_{ex}^{3}\Delta t^{3})$$

• sinon, l'erreur de dispersion est d'ordre 2

$$\omega^{2}/\omega_{ex}^{2} = 1 - 2\frac{W'(\vec{k})}{V(\vec{k})}|\vec{k}|^{2}h^{2} + \frac{\omega_{ex}^{2}\Delta t^{2}}{12} + O(|k|^{3}h^{3}, \omega_{ex}^{3}\Delta t^{3})$$

 $W'(\vec{k})$, $V(\vec{k})$ et $U(\vec{k})$ sont des fonctions du vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$.

Erreur de dispersion

Etude de quelques ondes particulières ($h = \lambda/12$)



Conditions aux limites: Parois absorbantes

Introduction d'un milieu à pertes électriques et magnétiques à la périphérie du volume de calcul. Le milieu à perte est entouré de parois metalliques. Les équations de Maxwell y sont de la forme:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} &= -rot \vec{H} \\ \chi \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma^* \vec{H} &= rot \vec{E} \end{aligned}$$

Contraintes:

- Pas de reflexions d'ondes lors du changement de domaine
- Coefficient de reflexion nul \forall l'angle d'incidence
- Atténuation progressive de l'amplitude de l'onde dans le milieu à perte
- ⇒ Utilisation de couches absorbantes parfaitement adaptées de Bérenger (PML)

Conditions aux limites: unsplit PML

Principe: Partir des équations splittées PML de Bérenger et revenir aux équations de Maxwell sans dédoublement des champs avec des variables auxilliaires

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + M \vec{E} + S \vec{P} = r \vec{o} t \vec{H}$$
$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + N \vec{P} - \vec{E} = 0$$
$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + M \vec{H} + S \vec{Q} = -r \vec{o} t \vec{E}$$
$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + N \vec{Q} - \vec{H} = 0$$

Où les opérateurs *M*, *N*, *S* sont des opérateurs fonctions de $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \mu, \varepsilon)$. Avec le changement de variable ,

$$egin{array}{rcl} ec{E}_lpha &=& ec{E}_lpha + (\sigma_lpha/arepsilon)ec{P}_lpha \ ec{H}_lpha &=& ec{H}_lpha + (\sigma^*_lpha/\mu)ec{Q}_lpha, \quad lpha = x,y,z \end{array}$$

Discrétisation des équations unsplit PML

- Discrétisation en espace: Méthode Galerkin discontinu présentée avec base de fonction Q^{div}.
- Discrétisation temporelle: Méthode de differentiation exponentielle.
- \Rightarrow On obtient un système hyperbolique bien posé dont les caractéristiques de la matrice source assurent la stabilité du sytème.

Propagation d'un dipôle électrique dans le vide

- Fréquence centrale du dipôle: 1GHz
- Position du dipôle: centre du domaine.
- Pas d'espace: 15 points par longueur d'ondes
- Dimension du domaine: $3.5\lambda \times 3.5\lambda \times 3.5\lambda$
- Nombre de couche PML: 5

Propagation d'un dipôle électrique dans le vide



Figure: Evolution temporelle de E_z au centre du domaine de calcul

Propagation d'un dipôle électrique dans le vide



Figure: Coupe fréquencielle à 1GHz du champ électrique dans le plan Oxy

Propagation d'un dipôle électrique dans le vide



Figure: Coupe fréquencielle à 1GHz du champ électrique dans le plan Oyz

ligne microruban infinie:

Nous calculons ici les principales caractéristiques d'une ligne microruban de longueur infinie: constante de propagation $\beta(f)$ et impedance caractéristique Z_c en fonction de la fréquence.



Ligne microruban

Domaine de calcul

Schéma Galerkin Discontinu: Etude de structures planaires



Schéma Galerkin Discontinu: Etude de structures planaires

Antenne imprimée rectangulaire: Nous calculons le paramètre S_{11} et le taux d'onde stationnaire (T.O.S.) d'une antenne imprimée rectangulaire avec la méthode DGTD



Antenne imprimée rectangulaire

Antenne imprimée rectangulaire: Resultats

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par un logiciel FDTD.



Principe



Problème initial

Problème final

Figure: Principe des domaines fictifs

- Etendre la solution à l'intérieur de l'obstacle.
- Introduction d'une nouvelle variable définie sur le bord de l'obstacle: prend en compte la CL de l'obstacle

A. Bouquet (FRANCE TELECOM)

Principe

- 2 maillages indépendants:
 - Un maillage volumique pour le domaine de calcul: structuré, cubique, uniforme
 - Un maillage surfacique pour l'obstacle: triangulaire



maillage volumique

maillage surfacique

maillage domaines fictifs

Figure: Maillage domaines fictifs

Application aux équation de Maxwell

Formulation Domaine fictifs: on cherche $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{j}) \in H(\vec{rot}, \Omega) \times H(\vec{rot}, \Omega) \times H^{-1/2}(div_{\Gamma}, \Gamma_{obs})$ verifiant:

$$\forall E^* \in H(r\vec{o}t, \Omega), \forall H^* \in L^2(\Omega) \forall j^* \in H^{-1/2}(div_{\Gamma}, \Gamma_{obs} \\ \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}, \vec{E}^*) - (c\vec{u}r|\vec{E}^*, \vec{H}) + b(\vec{E}^*, \vec{j}) &= 0 \\ \\ \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}, \vec{H}^*) + (c\vec{u}r|\vec{E}, \vec{H}^*) &= 0 \\ \\ b(\vec{E}, \vec{j}^*) &= 0 \\ \\ \vec{E}(t=0) = 0 \text{ and } \vec{H}(t=0) = 0 \end{cases}$$

où le champ électrique \vec{E} et le courant électrique \vec{j} sont couplés par

$$b(\vec{E},\vec{j}) = \int_{\Gamma_{obs}} ((\vec{E}\times\vec{n})\times\vec{n})\cdot\vec{j}d\gamma$$

Propriétés

• Conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}_{3}}(\frac{\varepsilon^{2}}{2}||\vec{E}(t)||^{2}+\frac{\mu^{2}}{2}||\vec{H}(t)||^{2})dx=0$$

- Stabilité: l'obstacle metallique n'intervient pas dans la condition de stabilité.
- Existence de la solution (*E*, *H*, *j*), convergence de la methode: demonstration d'une condition inf-sup uniforme et discrète (via les éléments finis d'arêtes).
 ⇒ Relation de comptabilité entre le maillage volumique et le maillage surfacique (Girault, Glowinski)

 \Rightarrow Le plus petit triangle impose la taille de la maille volumique dans tout le domaine.

 \Rightarrow Ressource rédhibitoires pour des problèmes très inhomogènes.

 \Rightarrow Utilisation de sous domaines avec un maillage local basé sur un schéma GD (N. Canouet, 2003)

Discrétisation

• Champs \vec{E}_h et \vec{H}_h discrets: Maillage cubique sans objet metallique

$$ec{E}_h = \sum_{h \in \mathcal{I}} \sum_{j=1}^{d_h} E_{h,j} ec{\varphi}_{h,j}$$

 \Rightarrow E.F. de Nedelec par éléments

 Courant surfacique discret j_{h'}: Maillage surfacique triangulaire de l'interface metallique

$$\vec{j}_{h'} = \sum_{l=1}^{n_a} \Phi_l \vec{\chi}_l$$

 \Rightarrow E.F. de Raviart-Thomas

• Matrice de couplage entre le champs et le courant électrique:

$$\int_{\Gamma_{h'}} ((\vec{E}_h \times \vec{n}) \times \vec{n}) \cdot \vec{j}_{h'} d\gamma = \sum_{h \in \mathcal{I}} \sum_{l=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{d_h} [\int_{\Gamma_{h'}} ((\vec{\varphi}_{h,j} \times \vec{n}) \times \vec{n}) \cdot \vec{\chi}_l d\gamma] E_{h,j} \Phi_l$$

Algorithme de calcul

Chaque pas de temps comprend cinq étapes successives:

• Calcul de \vec{E}_{GD} par le schéma GD dans tout le volume de calcul, métaux compris.

$$\vec{E}_{GD} imes \vec{n} \neq 0$$

• Résolution du problème donnant le courant électrique.

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon} B \cdot B^* \dot{j}^{n+1/2} = B \cdot \vec{E}_{GD}^{n+1}$$

• Correction du champ électrique en tenant compte du champ diffracté par l'objet métallique.

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}_{GD}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} B^* \cdot j^{n+1/2}$$

• Calcul de \vec{H} par le schéma GD dans tout le volume de calcul, métaux compris.

Propagation d'un dipôle électrique à proximité d'une plaque métallique

- Fréquence centrale du dipôle: 1GHz
- Position du dipôle: centre du domaine.
- Pas d'espace volumique: 20 points par longueur d'ondes
- Pas d'espace surfacique: 10 points par longueur d'ondes
- Dimension du domaine: $5\lambda \times 5\lambda \times 5\lambda$
- Nombre de couche PML: 5
- Position de la plaque metallique placé à $5/4\lambda$ du dipôle
 - 1^{er} cas: Parallèle au plan vertical
 - 2^{em} cas: Inclinée de $\theta = 45^{\circ}$ par rapport au plan vertical

Méthode domaines fictifs, Résultats Numériques

Propagation d'un dipôle électrique à proximité d'une plaque métallique



Figure: Coupe fréquencielle à 1GHz du champ électrique dans le plan Oyz

Guide d'onde circulaire

Nous simulons la propagation d'un dipôle électrique localisé à l'intérieur d'un guide d'onde circulaire

- Fréquence centrale du dipôle: 7.5GHz
- Maillage surfacique en $\lambda/10$
- Maillage volumique en $\lambda/20$

Méthode domaines fictifs, Résultats Numériques

Results





maillage surfacique du guide d'onde Champ électrique à 7.5*Ghz* dans le guide d'onde

Conclusions

- Schéma Galerkin Discontinu
 - Conserve une énergie discrète
 - Stable
 - Peu dispersif
 - Adapté à l'étude de structures planaires
- Méthode domaines fictifs
 - Avantages du Schéma Galerkin Discontinu sur maillage structuré: schéma explicite, stable, peu dispersif.
 - Avantages des élements finis: bon respect de la géométrie de l'obstacle.
 - Gains d'espaces mémoires et de temps de calculs.

Perspectives

- Utiliser les sous maillages avec les domaines fictifs.
- Introduire une condition sur \vec{H} à la surface de l'obstacle.