

# La théorie des jeux non-coopératifs appliquée aux réseaux de télécommunication

Eitan Altman\*  
INRIA, B.P. 93,  
2004 Route des Lucioles,  
06902 Sophia-Antipolis Cedex, France

Rachid El-Azouzi  
LIA, University of Avignon,  
Agroparc BP 1228  
84911 Avignon, France

Avril 2007

**Résumé** Dans cet article, nous exposons divers outils provenant de la théorie des jeux non-coopératifs qui permettent d'étudier des situations de compétition dans les réseaux de télécommunication. Nous décrivons les outils mathématiques tout en offrant des exemples des domaines variés des réseaux de télécommunication.

**Mots clé :** Théorie des jeux, Réseaux de télécommunications

## 1 Introduction

La théorie des jeux est un outil central dans bien des disciplines : dans l'économie (c.f. [58]), la biologie (surtout avec les jeux évolutifs définis par Maynard Smith [54, 55]), les affaires et la finance [1], le transport routier [59, 47], le marketing [35], les sciences politiques [45] et sociales, l'écologie et l'environnement, la recherche opérationnelle, et bien d'autres. Elle joue aussi un rôle dans la recherche militaire, dans la théorie de contrôle [12], en droit [13], dans les réseaux de télécommunication et dans les réseaux

---

\*Le travail de cet auteur a été effectué en partie dans le cadre du projet européen Bionets

informatiques. Mais la recherche en théorie des jeux ne se limite pas aux applications mentionnées précédemment. En effet, les fondements mêmes de la théorie des jeux sont un domaine mathématique toujours très actif, qui fait appel à un grand nombre d'outils mathématiques qui paraissent souvent bien plus sophistiqués que le problème à résoudre. C'est le cas de la logique algébrique, de la géométrie algébrique [16, 53], et de l'approche des solutions de viscosité pour des équations différentiels [14] qui apparaissent dans les jeux dynamiques en temps continu.

La théorie des jeux est probablement la plus connue dans le contexte des sciences économiques, surtout depuis 1994, quand le prix Nobel d'économie a été attribué à des chercheurs pour leur contribution à l'analyse des équilibres et la théorie des jeux non-coopératifs : J. C. Harsanyi, J. F. Nash et R. Selten. Rappelons que bien avant cela, K. Arrow et J. Hics (1972) et G. Debreu (1983) ont reçu des prix Nobel sur leur contribution à la théorie de l'équilibre, liée à la théorie des jeux. La reconnaissance du rôle de la théorie des jeux en économie a été renforcée avec l'attribution du prix Nobel d'économie à Robert Aumann et à Thomas Schelling en Octobre 2005.

Dans cet article, nous présentons quelques facettes de la théorie des jeux non-coopératives qui fournissent un cadre de modélisation et d'analyse pour des situations de compétition dans les réseaux de télécommunication.

Quelques mots sur la structure de l'article : dans la section 2, nous faisons un rappel sur des concepts de base dans la théorie des jeux. Nous mettons en avant des aspects hiérarchiques de prises de décisions, ainsi que des aspects multi-critère. Dans la section 3, nous introduisons des modèles mathématiques pour traiter ces jeux. Puis, nous présentons dans la section 4 des outils de base qui servent à répondre aux questions de l'existence et de l'unicité d'équilibres. Dans la section 5, nous traitons de problèmes de coordination dans les jeux en introduisant la notion d'équilibres corrélés. Les jeux évolutifs, une approche de la théorie des jeux qui vient de la biologie mathématique, est décrite dans la section 6, ainsi que son apport potentiel aux réseaux. La section 7 est consacrée au routage non-coopératif, et l'article se clot avec une discussion dans la section 8.

## 2 Rappel des notions de base de la théorie des jeux

La théorie des jeux s'intéresse à des situations où des "joueurs" ou "agents" prennent des décisions, chacun étant conscient que ses gains dépendent non seulement de sa propre décision, mais aussi des décisions prises par les autres joueurs. Un joueur peut prendre plusieurs décisions et il en choisit une

qui sera la meilleure pour lui. En termes mathématiques, on traduit la phrase "la meilleure pour lui" par l'introduction d'une fonction pour chacun des joueurs qui reflète ses préférences, appelée "utilité". L'utilité d'un joueur peut dépendre non seulement de ses décisions mais aussi de celles de tous les autres joueurs. L'utilité est une fonction croissante par rapport aux préférences: l'utilité d'un joueur est plus élevée pour un choix de décisions par rapport à un autre s'il préfère le premier choix à l'autre. Le concept de solution d'un jeu non-coopératif est souvent l'équilibre de Nash: c'est un choix de décision de tous les joueurs tel qu'aucun ne peut tirer avantage (ne peut augmenter sa fonction d'utilité) en changeant **seul** (unilatéralement) sa décision.

## 2.1 Jeux hiérarchiques.

Les situations de compétition peuvent se manifester à plusieurs niveaux. Par exemple, on pourrait imaginer qu'un fournisseur de services propose plusieurs classes de services qui se distinguent par la qualité de chaque service (le débit offert, les délais etc) mais aussi par le coût du service. On peut alors identifier une situation de jeux non-coopératif entre les abonnés. En effet, la qualité de service perçue par un abonné peut dépendre des choix de chaque autre abonné. L'équilibre qui décrit les décisions prises par les abonnés va déterminer les gains du fournisseur de service. Ce dernier a donc intérêt à choisir les qualités de service qu'il offre ainsi que leurs coûts d'une manière à maximiser ses profits, et cela en tenant compte de l'équilibre entre les abonnés qui sera engendré par ses décisions. Les choix de qualité de service imposent bien sûr des choix d'architecture du réseau ainsi que des politiques de gestion du réseau, ce qui rend le problème pertinent pour l'ingénierie de réseau.

Le résultat de cette situation de choix de la meilleure décision au niveau du fournisseur qui tient compte de la réaction des abonnés, est décrite par un équilibre appelé Stackleberg [56] que nous décrivons plus tard. On parle alors d'optimisation bi-niveau. On pourrait imaginer des situations de compétition encore plus complexes, où la demande, et donc les gains d'un fournisseur de services, dépend non seulement de la réaction des abonnés aux décisions de leur fournisseur, mais aussi des choix faits par d'autres fournisseurs de services concurrents.

Appelons "agent" quelqu'un qui prend des décisions. Un agent dans notre exemple peut être un abonné ou un fournisseur de services. On peut cependant imaginer d'autres niveaux qui font intervenir d'autres agents. Par exemple, un fournisseur de services n'est pas nécessairement celui à qui le réseau appartient. Dans ce cas, on pourrait avoir un agent représentant le

propriétaire du réseau qui peut être confronté à des choix de tarification proposée aux fournisseurs de service, pour l'allocation de ressources du réseau.

## 2.2 L'aspect multi-critère

L'approche qui consiste à considérer un seul critère qu'un agent souhaite maximiser, n'est souvent pas suffisante pour décrire les besoins et le comportement des agents. Par exemple, pour des services interactifs de voix sur Internet, la qualité perçue dépend du codec utilisé, du débit, du taux de perte de paquets, du délai, ainsi que de sa variabilité.

Une approche simpliste souvent utilisée pour traiter cet aspect multi-critère est de définir un seul critère qui prend en compte plusieurs qualités de service. D'autres approches plus sensibles à chaque critère consistent à séparer les critères et à définir des notions d'équilibre qui sont sensibles à chacun d'eux : l'équilibre Nash-Pareto et l'équilibre de Nash sous contraintes. Nous décrivons ces notions dans la section suivante.

## 3 Modélisation mathématique et Équilibres

### 3.1 Équilibre de Nash

Dans le cas où chaque utilisateur n'a qu'un unique critère d'évaluation, l'objectif est de déterminer des décisions pour chacun d'entre eux, optimales au sens de la notion *d'équilibre de Nash* :

Supposons qu'il y a  $N$  abonnés pour l'accès au réseau, chacun cherchant à maximiser une (unique) fonction d'utilité. Notons  $u_n$  la décision de l'abonné  $n$ , et  $J^n(\mathbf{u}, x)$ , sa fonction d'utilité. Cette fonction dépend de l'action  $u_n$  de l'abonné  $n$ , mais aussi des actions de tous les autres utilisateurs ; la variable  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$  est donc le  $N$ -uplet de décisions prises par les  $N$  utilisateurs,  $x$  est un paramètre représentant l'architecture et la politique de gestion du réseau. Pour une architecture et une politique du réseau,  $x$ , fixées, un  $N$ -uplet de décisions  $\mathbf{u}^*(x) = (u_1^*, \dots, u_N^*)$  est dit *équilibre de Nash* si aucun des  $N$  abonnés ne peut améliorer sa fonction d'utilité en modifiant seul sa décision. Plus précisément, pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ , on a

$$J^n(\mathbf{u}^*(x), x) = \max_{u_n} J^n(u_1^*, \dots, u_{n-1}^*, u_n, u_{n+1}^*, \dots, u_N^*, x). \quad (1)$$

(Parfois il est plus naturel de parler de minimisation d'un coût plutôt que de maximisation d'un gain. Dans de tels cas nous remplacerons  $J^n$  par le symbole  $C^n$ .)

Comme nous l'avons noté précédemment, chaque utilisateur peut chercher à prendre des décisions afin de maximiser plusieurs critères. Nous allons considérer deux extensions à la notion d'équilibre de Nash afin de pouvoir étudier le cas multi-critère. Dans ce contexte, la fonction d'utilité  $J^n$  d'un utilisateur  $n$  est un vecteur,  $J^n = (J_1^n, \dots, J_k^n)$ . Nous considérons dans ce cas deux types d'équilibres:

### 3.2 Équilibre multi-critère, ou Équilibre Pareto-Nash

Le maximum dans l'équation (1) est compris dans le sens de Pareto. Plus précisément, nous disons qu'un vecteur  $x$  de dimension  $k$  domine un vecteur  $y$  de même dimension si pour tout  $i = 1, \dots, k$  on a  $x_i \geq y_i$  avec une inégalité stricte pour au moins un des  $i$ . Dans ce cas, nous notons  $x \text{ dom } y$ .  $\mathbf{u}^*$  est dit *équilibre multi-critère* si aucun abonné ne peut en bénéficier (au sens de la relation d'ordre  $\text{dom}$ ) en modifiant sa prise de décision de manière unilatérale : pour tout  $n$ , il n'existe pas de politique  $u_n$  qui donne de meilleures performances au joueur  $n$ , c'est-à-dire, telle que

$$J^n(u_1^*, \dots, u_{n-1}^*, u_n, u_{n+1}^*, \dots, u_N^*, x) \text{ dom } J^n(\mathbf{u}^*, x).$$

### 3.3 Équilibre de Nash avec contraintes:

Dans ce cas, on suppose qu'un joueur  $n$  cherche à maximiser le critère  $J_1^n$  tout en maintenant ses autres critères  $J_2^n \dots J_k^n$  dans certaines limites. Il s'agit donc de rechercher un équilibre de Nash sous contraintes. La notion d'optimisation sous contraintes dans le cas multi-critère est naturelle dans une architecture A.T.M. où les abonnés expriment leurs demandes de qualité de service par des contraintes sur les délais, les taux de pertes, *etc...* Par exemple, une application audio interactive est insensible à un délai tant que celui-ci reste inférieur à environ 100msec. Une application audio pourrait donc chercher à minimiser le taux de pertes tout en essayant de respecter une contrainte sur les délais.

Notons  $\Pi_n(x) = (\mathbf{u} : J_i^n(\mathbf{u}, x) \leq V_i^n, i = 2, \dots, k_n)$  l'ensemble des  $N$ -uplet d'actions des  $N$  abonnés respectant les  $k_n - 1$  contraintes de l'abonné  $n$ ,  $V_i^n$  étant les bornes définissant ces contraintes.  $\mathbf{u}^*$  est alors un équilibre de Nash sous contraintes si pour tout  $n$ ,  $\mathbf{u}^* \in \Pi_n(x)$ , et si de plus

$$J^n(\mathbf{u}^*, x) = \max_{u_n} J^n(u_1^*, \dots, u_{n-1}^*, u_n, u_{n+1}^*, \dots, u_N^*, x) \quad (2)$$

où on se restreint dans la maximisation à  $u_n$  tel que

$$(u_1^*, \dots, u_{n-1}^*, u_n, u_{n+1}^*, \dots, u_N^*) \in \Pi_n(x). \quad (3)$$

Les jeux avec contraintes ont été étudiés dans [23, 25, 27, 28, 49]. Nous revenons aux jeux avec contraintes dans les Sections 4 et 5.2.

### 3.4 Optimisation hiérarchique multi-critère

Nous considérons que l'opérateur (administrateur ou concepteur du réseau, fournisseur de services) cherche lui aussi à maximiser un certain nombre de critères. Ces critères peuvent entre autres inclure les critères des abonnés (l'opérateur ayant probablement intérêt à ce que les abonnés soient satisfaits), mais aussi des critères d'utilisation efficace des ressources ainsi que des critères plus purement économiques. Nous noterons  $R(\mathbf{u}, x)$  la fonction d'utilité de l'opérateur ; celle-ci dépend, d'une part, de l'architecture et de la politique de gestion du réseau (à travers  $x$ ), et d'autre part, du comportement  $\mathbf{u}$  des abonnés.

Dans le cas où l'équilibre  $\mathbf{u}^*(x)$  défini dans la sous-section 3 existe et est unique, l'objectif de l'opérateur du réseau est de déterminer  $x$  qui maximise ses fonctions d'évaluation (l'utilité), en supposant que les abonnés choisissent les actions  $\mathbf{u}^*$  d'équilibre. En d'autres termes, l'objectif de l'opérateur du réseau est de trouver  $x^*$  qui vérifie

$$R(\mathbf{u}^*(x^*), x^*) = \max_x R(\mathbf{u}^*(x), x). \quad (4)$$

Quand les abonnés et l'opérateur du réseau ont chacun une fonction d'évaluation  $J^n$  et  $R$  scalaire (un seul critère pris en compte pour chacun), l'ensemble  $(\mathbf{u}^*(x^*), x^*)$  est un *Équilibre de Stackelberg*. On peut considérer le cas plus général où  $J^n$  et  $R$  sont des vecteurs. Dans ce cas, l'équation (4) signifie qu'il n'existe pas de  $x$  tel que  $R(\mathbf{u}^*(x), x) \succ R(\mathbf{u}^*(x^*), x^*)$ .

Dans le cas où il existe un ensemble  $U^*(x)$  qui contient *plusieurs équilibres* pour les abonnés (ce qui est souvent le cas quand il s'agit d'un équilibre Pareto-Nash pour les abonnés), l'objectif du réseau est de garantir le meilleur rendement pour tout équilibre possible, c'est-à-dire chercher  $x^*$  qui vérifie

$$R(\mathbf{u}^*(x^*), x^*) = \max_x \min_{\mathbf{u}^* \in U^*} R(\mathbf{u}^*(x), x). \quad (5)$$

Nous envisageons aussi le cas où plusieurs opérateurs sont en compétition sur le réseau. Si le comportement des abonnés était fixé, on en reviendrait au cadre des jeux définis dans les sous-sections précédentes, les joueurs étant cette fois-ci les opérateurs. De nouveau, le concept de solution pour l'optimisation multi-objectif serait l'une des extensions dans les sections 3.2 ou 3.3.

Dans le cas où les abonnés peuvent eux aussi choisir leur comportement dans le réseau, on en revient à la situation plus complexe d'un *jeu à deux niveaux, ou jeu hiérarchique*. En prenant en compte les réactions,  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ , des  $N$  abonnés aux décisions,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$  des  $M$  opérateurs, le concept de solution serait une extension de l'équation (4) sous la forme

$$R^i(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^*) = \max_{x^i} R^i(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{-i}^*; x_i), \mathbf{x}_{-i}^*; x_i), \quad (6)$$

où  $\mathbf{x}_{-i}^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}, \dots, x_M)$ ,  $R^i$  représente l'utilité (scalaire dans le cas mono-critère ou vectorielle dans le cas multi-critère) de l'opérateur  $i$ , et  $x_i$  ses décisions.

## 4 Existence et unicité d'équilibre

### 4.1 Les jeux concaves

Considérons des jeux où l'ensemble des stratégies est convexe dans  $R^m$  pour  $m \geq n$ .

En général, l'ensemble des stratégies  $U_i(u^{-i})$  disponibles pour un joueur  $i$  quelconque dépend des actions d'autres joueurs. Nous avons vu une telle dépendance dans la formulation (3). Pour illustrer le besoin d'une telle définition, considérons l'exemple suivant.

**Exemple 4.1.** Considérons le lien montant dans un réseau cellulaire avec une station de base et  $N$  mobiles. Soit  $u_i$  la puissance reçue à la station de base qui provient du mobile  $i$ . Le rapport signal/bruit à la station de base qui correspond au mobile  $i$  est donc

$$SIR_i = \frac{u_i}{N_0 + \sum_{j \neq i} u_j}$$

où  $N_0$  est la puissance du bruit thermique à la station de base. Nous supposons que le mobile  $i$  a besoin d'obtenir un rapport signal/bruit  $SIR_i$  supérieur ou égal à un seuil  $\gamma_i$  (pour garantir un taux de pertes suffisamment faible et un débit de transmission suffisant). Imaginons que le mobile  $i$  a pour objectif de minimiser sa puissance  $u_i$ . Etant donné les puissances de transmission  $u_j$  d'autres joueurs, les stratégies disponibles du mobile  $i$  sont données par

$$U_i(u^{-i}) = \left\{ u_i : u_i \geq \gamma_i \left( N_0 + \sum_{j \neq i} u_j \right) \right\}$$

Deux cas particuliers de dépendance entre les stratégies d'un joueur et les stratégies d'autres joueurs sont étudiés dans [49]:

1. Contraintes communes : il y a un ensemble convexe de politiques  $U$ . On dit qu'une politique  $u = (u_1, \dots, u_n)$  satisfait les contraintes si elle appartient à  $U$ . En d'autres termes, pour tout  $i$ ,  $U_i(u^{-i}) = \{(u_i, u^{-i}) \in U\}$ .
2. Contraintes orthogonales : c'est le cas où  $U_i(u^{-i})$  ne dépend pas du joueur  $i$ .

Le jeu de routage dans un réseau, décrit dans la section 7.1, est un exemple où les contraintes sont communes dans le sens de Rosen [49].

Dans les deux cas, on a le résultat suivant, a le résultat suivant sous l'hypothèse de convexité sur les ensembles des politiques.

**Théorème 4.1.** *(Rosen [49]) Supposons que  $J^n$  est concave par rapport à  $u^i \in U_i$  et qu'il est continu par rapport à  $u^j$ , pour tout  $j \neq i$ . Alors le jeu possède un équilibre.*

## 4.2 Jeux avec un nombre fini d'actions

Considérons le cas de  $N$  joueurs non-coopératifs ayant chacun un seul critère à maximiser. Quand chaque agent a un nombre fini d'actions, il se peut qu'il n'existe pas d'équilibre du tout. Souvent, on se permet cependant d'élargir la classe d'actions des joueurs : au lieu de choisir une des actions, un agent choisit une probabilité sur les actions qui sont disponibles pour lui. Puis, au lieu de s'intéresser à maximiser ses revenus, l'agent maximise l'espérance mathématique de son revenu. Dans l'équilibre il peut y avoir plusieurs joueurs qui font des choix aléatoires. Ces choix se font indépendamment les uns des autres.

Quand le jeu a un nombre fini d'actions, on peut le représenter comme un jeu matriciel de dimension  $N$ . A chaque multi-stratégie  $u_1, \dots, u_N$  on associe un élément de la matrice. Cet élément contient les  $N$  valeurs correspondant aux utilités  $J^i(u_1, \dots, u_N)$  où  $i = 1, \dots, N$ .

**Exemple 4.2.** [9] Nous considérons le jeu matriciel suivant à deux joueurs. Les joueurs 1 et 2 ont chacun deux actions: les actions 1.a et 1.b pour le joueur 1 et les actions 2.i et 2.ii pour l'autre. Le jeu possède deux équilibres "purs" (qui ne demandent pas de randomisation) :



	action 1.a	action 1.b
action 2.i	2, 1	0, 0
action 2.ii	0, 0	1, 2

Table 1: Un jeu matriciel non-coopératif de dimension 2

- L'équilibre en utilisant la multi-stratégie (1,a, 2.i) donne les utilités (2,1). Plus précisément, si le joueur 1 choisit la stratégie 1.a et l'autre joueur la stratégie 2.i, alors le joueur 1 gagne 2 unités et le joueur 2 en gagne 2. Si l'un des joueurs change sa stratégie, celui-ci (ainsi que l'autre) gagne zéro unité, ce qui montre que la multi-stratégie (1,a, 2.i) est un équilibre de Nash.
- L'autre équilibre "pur" est celui de la multi-stratégie (1.b , 2.ii) qui donne les valeurs (1,2).

De plus, les joueurs peuvent utiliser des probabilités pour choisir les actions. Supposons que le joueur 1 choisit parmi ses actions en utilisant les probabilités (2/3,1/3), (c'est-à-dire que le joueur 1 choisit 1.a avec la probabilité 2/3 et choisit 1.b avec la probabilité 1/3). Le joueur 2 choisit 2.i avec la probabilité 1/3 et autrement choisit 2.ii. Alors l'espérance des revenus est de 2/3 pour chacun des deux joueurs. ■

Notons que dans les jeux matriciels, l'utilité de la stratégie est concave (et même linéaire) par rapport à la politique utilisée (car l'espérance mathématique est un opérateur linéaire). De plus, étant linéaire, l'utilité d'un joueur est continue par rapport aux politiques des autres joueurs. Cela nous permet d'utiliser le cadre de Rosen de la Section 4.1 pour conclure qu'un équilibre de Nash existe.

## 5 Coordination dans les jeux non-coopératifs

Comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 4.2, il existe souvent des équilibres de Nash qui utilisent des politiques mixtes, c'est-à-dire des politiques utilisant un choix aléatoire entre plusieurs stratégies. Dans l'équilibre de Nash, quand plusieurs joueurs font des choix aléatoires, ces choix se font indépendamment les uns des autres. Or, cette indépendance peut entraîner des équilibres qui donnent des utilités faibles.

## 5.1 Le cas mono-critère

**Suite de l'Exemple 4.2** Considérons l'exemple 4.2, et supposons que les joueurs peuvent coordonner leurs choix aléatoires comme suit. Supposons qu'un arbitre leur conseille avec la probabilité de 0.5 de jouer (1.a, 2.i) et avec la probabilité de 0.5 de jouer (1.b, 2.ii). Alors l'espérance du rendement pour chaque joueur est de  $3/2$ . Malgré la "coopération" pour la réalisation de cette politique, cette coordination ne change pas la nature non-coopérative du jeu, car il n'y a pas d'obligation à suivre le conseil. La politique conseillée est dite "équilibre corrélé" si aucun joueur n'a intérêt à changer par rapport à la politique qui lui est conseillée. Dans le cas de notre exemple, la politique conseillée est bien un équilibre corrélé. Pour l'illustrer, supposons que le joueur 1 change de politique et choisisse (avec la probabilité de 1) la politique (1.a). L'espérance de ce qu'il reçoit est alors  $2/3$ . On voit bien que le joueur 1 n'a pas tiré profit du changement de politique.

Les valeurs  $(3/2, 3/2)$  de l'équilibre corrélé ne sont pas atteignables sans un mécanisme de coordination. Notons que dans cet exemple, l'équilibre corrélé ne domine pas les équilibres de Nash purs. Cependant, plusieurs exemples sont présentés dans [9] où des équilibres corrélés dominent tous les équilibres de Nash. ■

## 5.2 Jeux avec contraintes

Dans l'exemple suivant nous montrons l'intérêt de la coordination pour les jeux avec contraintes.

**Exemple 5.1.** Considérons deux joueurs, 1 et 2, chacun ayant deux actions:  $i.\alpha$  et  $i.\beta$  (où  $i$  vaut 1 ou 2).

**Utilités:** Les deux joueurs ont la même utilité : elle est  $1-b$  (où  $0 < b < 1$ ) si les actions des joueurs sont différentes, elle est de  $-b$  si les deux choisissent l'action  $a$  et elle est de zéro si les deux jouent l'action  $b$ . Ces utilités, résumées dans le tableau qui suit, représentent un cas "coopératif" entre agents, car les deux agents ont exactement la même évaluation de chaque couplet d'actions des joueurs.

	action 1. $\alpha$	action 1. $\beta$
action 2. $\alpha$	$-2b, -2b$	$1-b, 1-b$
action 2. $\beta$	$1-b, 1-b$	$0, 0$

**Stratégies:** Soient  $p$  et  $q$  la probabilité que le joueur 1 et le joueur 2 choisissent respectivement l'action  $a$ .

**Contraintes :** Chaque joueur a une contrainte : la probabilité de choisir l'action  $a$  par un joueur doit être inférieure à  $v$  où  $0 < v < 1$ .

**Interprétation :** Considérons deux mobiles qui utilisent un protocole de type ALOHA : si un seul mobile transmet dans une unité de temps, alors la transmission est réussie. Si les deux transmettent, alors il y a une collision et la transmission échoue. Chaque tentative de transmission nécessite de l'énergie dont le coût est  $b$ . Le seuil  $v$  représente une contrainte sur l'énergie moyenne qu'un mobile peut dépenser. Dans cet exemple, l'objectif de chaque mobile est de maximiser le débit global moins la consommation globale de l'énergie. Dans ce sens, le jeu est coopératif.

■

**Exemple 5.2.** Nous considérons le même problème de l'exemple 5.1. Avec l'interprétation proposée dans l'exemple précédent, on voit que chaque mobile maximise son propre débit moins le coût de son énergie.

■

## 6 Les jeux évolutifs

Parmi les applications de la théorie des jeux, on retrouve la biologie à nous devons le concept des "jeux évolutifs". On suppose des grandes populations d'animaux, ou bien des populations se caractérisant par ses types de comportement (y compris parmi la population d'un animal donné). Cependant, l'interaction entre les différentes populations ou entre des comportements différents se fait à travers beaucoup d'interactions locales entre un petit nombre d'individus.

Comme nous l'avons déjà vu dans d'autres types de jeux, les comportements adoptés par les individus lors de l'interaction déterminent l'utilité (ou la fonction d'évaluation) pour chaque joueur. Dans le contexte biologique, plus la fonction d'évaluation est élevée, plus les chances d'accéder à la nourriture sont élevées, ce qui peut augmenter le taux de reproduction de l'individu [48].

Les nouveautés ces jeux évolutionnaires (que nous décrivons en détail au paragraphe suivant) par rapport aux jeux non-coopératifs se résument ainsi :

1. La notion de solution d'équilibre, appelée **Stratégie Evolutivement Stable** (Evolutionary Stable Strategie - ESS), est différente, et

2. Ces jeux modélisent souvent une dynamique de l'évolution (Replicator Dynamics) de chaque population ou de chaque comportement en fonction des stratégies utilisées et des utilités obtenues. Plusieurs modèles ont été proposés, voir [22] et [33].

## 6.1 Stratégies

Considérons un jeu évolutif où il existe deux stratégies (ou actions) : l'action 1 et l'action 2 pour chaque joueur. Nous permettons l'utilisation de stratégies mixtes. Nous disons qu'une population entière utilise une stratégie mixte  $q \in [0, 1]$  si la part des individus de la population qui utilisent l'action 1 est  $q$ , et la part de ceux qui utilisent l'action 2 est  $1 - q$ . À noter: la notion de stratégie peut aussi s'appliquer à des individus. On considère alors le cas où chaque individu se trouve fréquemment en situation de jeu (interaction) avec d'autres individus, et on dira qu'il suit une stratégie mixte  $p$  si la fraction de fois qu'il a joué 1 est de  $p$ , et la fraction de fois qu'il a utilisé 2 est de  $1 - p$ . On supposera que les choix d'actions de cet individu se font d'une manière indépendante avec la probabilité  $p$ .

## 6.2 Utilités

Nous définissons  $J(p, q)$  l'utilité moyenne d'un individu qui utilise la stratégie  $p$  tandis que les autres individus qu'il rencontre utilisent tous la stratégie  $q$ .

Supposons que la population utilise une stratégie mixte  $q^*$  et qu'une petite fraction (appelée "mutations") adopte une autre stratégie (pure ou mixte)  $p$ . Si pour tout  $p \neq q^*$  on a

$$J(q^*, q^*) > J(p, q^*) \quad (7)$$

alors la fraction relative des mutations dans la population diminue (car leur utilité qui représente le taux de croissance est inférieure à ceux du reste de la population). On dit alors que  $q^*$  est immunisé par rapport aux mutations.

## 6.3 Nouvelle notion d'équilibre: ESS

S'il y a  $n$  stratégies pures ( $n = 2$  dans notre cas) dénomées  $s_1, \dots, s_n$ , alors une condition suffisante pour (7) est que

$$J(q^*, q^*) > J(s_i, q^*), \quad s = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Dans le cas particulier où nous avons

$$J(q^*, q^*) = J(p, q^*) \text{ et } J(q^*, p) > J(p, p) \quad \forall p \neq q^*, \quad (9)$$

on pourrait dire que la population qui utilise  $q^*$  est faiblement immunisée contre le comportement  $p$  des mutations car, si la proportion des mutations augmente, alors on aura souvent des individus utilisant la stratégie  $q^*$  qui interagiront avec les mutations. Dans ce cas, la condition  $J(q^*, p) > J(p, p)$  assure que le taux de croissance de la population originale domine celui des mutants.  $q^*$  qui satisfait (7) ou (9) est appelé une stratégie évolutivement stable (ESS).

L'ESS a été défini en 1972 par M. Smith dans l'ouvrage [54]. En 1982, le travail pionnier de Maynard Smith "Evolution et la Théorie des Jeux" [55]) a paru, suivi peu après par le travail bien connu de Axelrod [10].

Bien que le ESS avait déjà été défini dans le contexte des systèmes biologiques, il est bien approprié dans le contexte de l'automatique en général et dans le contrôle des réseaux en particulier (voir [57]).

## 6.4 Administration de l'énergie

Nous pouvons adopter des notions de biologie, non pas seulement à travers le concept des jeux évolutionnaires, mais aussi à travers des applications liées à la gestion de l'énergie. Cette dernière joue un rôle principal dans les réseaux mobiles et les réseaux de capteurs. Dans le contexte de la biologie, la survie, la durée de vie et, par conséquent, le taux de reproduction sont liés à la quantité d'énergie d'un animal, et donc au comportement de l'animal lors d'une compétition avec d'autres animaux sur des ressources. Des exemples de travaux sur l'administration de l'énergie en biologie en utilisant les jeux évolutifs sont [34, 43].

Par analogie, nous pouvons nous attendre à ce que des réseaux de capteurs qui sont conçus avec des stratégies énergétiques efficaces aient une durée de vie plus longue [44].

## 6.5 Jeux évolutifs et réseaux

A présent peu de travaux en réseaux de télécommunication utilisent les jeux évolutifs. Nous mentionnons [50, 51, 52] qui les utilisent dans le contexte du trafic routier, à travers des modèles qui peuvent servir aussi pour les réseaux de télécom. Citons aussi [7] qui utilise l'ESS dans le contexte du contrôle de la puissance et du débit dans les réseaux sans fil.

Que peut offrir le concept des jeux évolutifs aux réseaux de télécommunication?

Le premier avantage des jeux évolutifs et de la notion d'équilibre ESS par rapport à l'équilibre de Nash est la robustesse de l'ESS. Pour qu'une multi-stratégie  $u^*$  soit un équilibre de Nash, il faut qu'un seul joueur (n'importe lequel) ne puisse pas profiter en changeant sa stratégie. Mais avec l'équilibre de Nash, si plusieurs joueurs changent leur décision, il se peut qu'ils en tirent un gain. La notion de ESS est plus robuste en permettant à toute une fraction d'une population (les mutants) de changer leur décision. Donc, même quand plusieurs joueurs (une fraction petite de la population) changent leur décision, ils ne peuvent profiter de ce changement.

Le deuxième avantage du cadre des jeux évolutionnaires est de proposer des dynamiques qui mènent à l'ESS, et qui donnent une justification de l'utilisation de l'ESS.

## 7 Jeux de routage

Nous présentons dans cette section les jeux de routage [46] qui sont parmi les sujets les plus étudiés dans les réseaux.

### 7.1 Le modèle

Considérons un réseau avec une topologie générale composé d'un ensemble  $\mathcal{V}$  contenant  $V$  nœuds (représentant des routeurs, ou des commutateurs, ou des sources, ou des destinations de trafic) et d'un ensemble  $\mathcal{L}$  contenant  $L$  liens directionnés. Un lien directionné est identifié par deux nœuds que ce lien relie. Pour chaque  $v \in \mathcal{V}$  nous définissons

- $In(v)$  l'ensemble de liens de la forme  $(w, v)$  (c'est-à-dire les liens qui peuvent acheminer du trafic au nœud  $v$ )
- $Out(v)$  l'ensemble de liens de la forme  $(v, w)$  (c'est-à-dire les liens par lesquels du trafic peut sortir du nœud  $v$ ).

Soit  $\Pi$  un ensemble de couples de nœuds  $(o, d)$  où  $o$  est une source origine de trafic qui est destiné à une destination  $d$ .

$N$  joueurs partagent le réseau. Chaque joueur  $i$  est caractérisé par un couple  $p^i = (o^i, d^i) \in \Pi$  de source-destination et par une demande  $\phi_p^i$  de débit à acheminer de l'origine  $o^i$  à la destination  $d^i$ .

On définit un chemin  $h_p^i$  pour le trafic du joueur  $i$  comme étant une suite de liens entre une origine  $o$  et une destination  $d$  où  $p = (o, d)$ . Soit  $H^i$  l'ensemble de tels chemins pour un joueur  $i$  donné.

**Stratégies.** Chaque joueur décide comment acheminer son trafic à travers le réseau. Un joueur  $i$  n'est pas obligé de faire suivre toute sa demande par un seul chemin entre l'origine et la destination ; il peut partager son trafic entre plusieurs chemins dans  $H^i$ . Plus précisément, on définit par  $u_l^i$  la quantité de trafic qu'un joueur  $i$  envoie sur un lien  $l$ . Une stratégie  $\mathbf{u}^i$  du joueur  $i$  est un ensemble  $u_l^i, l \in \mathcal{L}$  qui satisfait

$$u_l^i \geq 0 \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$In_v^i + \sum_{w \in In(v)} u_{vw}^i = Out_v^i + \sum_{w \in Out(v)} u_{vw}^i, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (10)$$

où

$$In_v^i = \begin{cases} \phi^i & \text{si } v = o^i \\ -\phi^i & \text{si } v = d^i \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

**Coûts.** Soit  $f_l(u_l)$  le coût de l'utilisation d'un lien par unité de flux quand la quantité de trafic sur ce lien est  $u_l := \sum_{i=1}^N u_l^i$ . En particulier, le coût pour le joueur  $i$  de l'utilisation du lien  $l$  est

$$C_l^i(u) = u_l^i f_l(u_l).$$

Ce coût dépend donc non seulement de la stratégie du joueur  $i$ , mais aussi des stratégies des autres joueurs. Cependant, la dépendance des stratégies des autres joueurs se retrouve seulement à travers la somme de leur trafic sur ce lien. Le coût global  $C^i(\mathbf{u})$  du joueur  $i$  est supposé être la somme des coûts sur les liens:

$$C^i(\mathbf{u}) = \sum_{l \in \mathcal{L}} C_l^i(u)$$

Le coût du joueur  $i$  est donc la somme des coûts de tous les liens, pondéré par le flux que ce joueur y envoie. Cette propriété additive rend cette fonction de coût bien adaptée pour modéliser le délai moyen.

**Remarque 7.1.** *Il existe des mesures de performances qui ne sont pas additives. Mentionnons en particulier la probabilité des pertes ou la probabilité de rejet (voir [4]). Pour ce dernier, même dans le cas de liens en parallèle, l'équilibre n'est pas unique.*

## 7.2 Applications

Dans le contexte de réseaux de télécommunication, les jeux de routages ont été introduits en [46]. Un joueur peut correspondre alors à un fournisseur de service qui souhaite minimiser les délais moyens de ses abonnés.

Ce type de jeux a été utilisé aussi dans l'étude du partage de charge dans un réseau distribué d'ordinateurs [39]. Chaque joueur a un flux de tâches à exécuter. Les nœuds du réseau correspondent à des ordinateurs. Chaque joueur doit déterminer les nœuds vers lesquels il va acheminer ses tâches. Nous illustrons ce scénario dans l'exemple suivant,

**Exemple 7.1.** Supposons que nous ayons deux centres de calcul, 1 et 2 (voir Figure 7.1). Un flux de  $\phi_i$  tâches par seconde arrive au centre  $i$ . La source  $i$  des tâches qui arrivent au centre  $i$  est considérée comme un joueur. Elle doit déterminer quelle partie de ses tâches sera exécutée dans le centre de calcul  $i$  et quelle sera exécutée dans l'autre centre. Soient  $x_{ij}$  le flux des tâches de source  $i$  exécutées dans le centre  $i$ . Le flux total des tâches exécutées dans le centre  $i$  est donné alors par

$$\beta_i = x_{ii} + x_{ji} \text{ où } j \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2\}, i \neq j.$$

Le délai moyen pour l'exécution d'une tâche dans le centre  $i$  est donné par

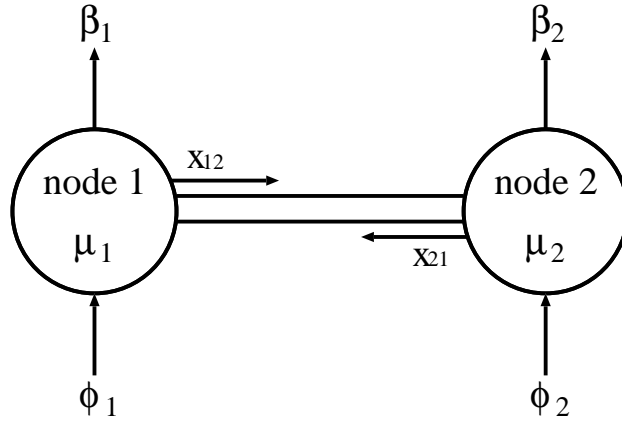


Figure 1: Système de calcul distribué

$$D_i(\beta_i) = \frac{1}{\mu_i - \beta_i}$$



tant que  $\beta_i < \mu_i$ , est il est autrement infini. Cette équation décrit le délai d'une file d'attente, souvent utilisée pour modéliser le temps d'exécution de tâches dans des réseaux distribués. Un élément supplémentaire contribuant au délai moyen est le temps de communication nécessaire pour les tâches que la  $i$  renvoie du centre  $i$  pour être exécutés dans l'autre centre. Nous supposons que ce délai est constant.

Nous montrons comment ce problème peut être transformé à un jeu de routage. Nous considérons un graphe avec

- trois sommets : 1,2 et  $d$ ; Le sommet  $i$  représente la source  $i$ , où  $i = 1, 2$ . Le sommet  $d$  représente la "destination" d'une tâche: une tâche qui arrive à  $d$  représente une tâche dont l'exécution vient de s'achever.
- quatre liens:  $(1,b)$ ,  $(2,b)$ ,  $(1,2)$  et  $(2,1)$ . Le lien  $(i,d)$  représente le centre de calcul  $i$ , et les autres liens  $(i,j)$  représentent les liens du réseau connectant le centre  $i$  au centre  $j$ .
- Le flux  $x_{ij}$  correspond donc à notre variable  $u_{(i,j)}^i$  pour  $j \neq i$ . Le flux  $x_{ii}$  correspond à notre variable  $u_{(i,d)}^i$ .

### 7.3 Quelques résultats

Les questions qui se posent lorsqu'on analyse une situation de jeux non-coopératifs sont :

1. Y a-t-il un équilibre de Nash?
2. Est-ce qu'on a l'unicité de l'équilibre?
3. Converge-t-on vers l'équilibre à partir d'un état initial quelconque?
4. Que peut-on faire pour améliorer les performances? En particulier, y aurait-il des politiques (tarification et autres) prises par les fournisseurs du réseau qui permettraient d'améliorer les performances des abonnés?

**Existence et Unicité** Dans [46], les auteurs démontrent l'existence d'un équilibre en suivant l'approche de [49]. Cependant, les critères d'unicité de Rosen [49] ne s'appliquent pas ici (sauf des cas particuliers de débits faibles) et une autre approche est proposée et utilisée à la place. La topologie des liens parallèles est étudiée en particulier. Les fonctions de coût pour lesquelles on obtient l'unicité de l'équilibre dans cette topologie sont suffisamment générales pour couvrir un grand nombre de fonctions utilisées dans la théorie des files

d'attente pour décrire les délais moyens. Pour des topologies générales, la question d'unicité de l'équilibre reste ouverte. Cependant, un exemple simple de quatre nœuds est proposé à l'annexe de [46] pour montrer la non-unicité d'équilibre. D'autres travaux ont établi d'autres topologies ou d'autres fonctions de coût [6] pour lesquelles on a l'unicité.

**Convergence** A part des topologies simples [5, 19, 46], peu de résultats existent sur la question de convergence vers l'équilibre. Il serait particulièrement intéressant d'étudier la convergence dans le cas de plusieurs équilibres.

**Le paradoxe de Braess, et comment l'éviter** Une approche plausible (utilisée souvent dans le contexte du trafic routier) pour améliorer les performances dans un réseau est celle qui consiste à identifier des goulots d'étranglement, et à y ajouter des ressources. Or, il est surprenant de découvrir que cette approche peut boutir à une détérioration des performances de *tous* les usagers (joueurs). Ce phénomène déjà observé dans le contexte du trafic routier [20, 26] a été découvert aussi dans le contexte de routage dans les réseaux [4, 15, 24, 36, 41].

Le paradoxe de Braess se produit aussi dans le partage de charge dans le calcul distribué, et en particulier, dans le modèle décrit dans l'exemple 7.1. En effet, il a été montré dans [37] que pour certaines valeurs des paramètres  $(\beta_i, \mu_i, \lambda_i)$ , on trouve en équilibre une situation où chaque source  $i$  envoie une part non-nulle de ses tâches au chacun des deux centre de calcul. Il est montré dans [37] qu'en éliminant la possibilité d'une source  $i$  d'envoyer ses tâches au centre  $j \neq i$ , on peut réduire les délais moyens des deux flux des tâches !

Afin d'éviter des situations qui pourraient entraîner le paradoxe de Braess, plusieurs règles ont été élaborées et proposées [3, 40] pour l'allocation de ressources dans les réseaux.

## 7.4 Extentions

Nous mentionnons dans ce qui suit des extentions des jeux de routage qui ont un intérêt dans les réseaux.

**Le multicast** Le routage non-coopératif dans le cas multicast a été étudié dans [17]. Nous résumons la différence avec le routage unicast.

Une propriété de base dans les jeux de routage décrits dans les sous-sections précédentes est l'équation (10) qui établit que la somme des flux entrant à chaque nœud est égale à la somme des flux qui en sortent. Cette propriété n'est plus valable dans le contexte multicast.

Dans des applications multicast, une seule source peut transmettre à  $m > 1$  destinations. Pour le faire tout en réduisant la congestion dans le réseau, on essaye d'éviter de créer à la source et de transmettre  $m$  copies du paquet. On considère des arbres dont la source est la racine et les destinations sont les feuilles. Puis, quand on utilise un arbre pour atteindre chaque destination, un paquet est dupliqué dans un unique nœud de l'arbre qui a plusieurs liens sortants (appartenant à l'arbre).

L'étude du routage multicast non-coopératif est donc lié à un routage entre arbres plutôt qu'au routage entre chemins ou entre liens.

**Jeux de routage avec contraintes.** Les extensions de l'équilibre de Nash décrites au début de cet article sont d'un grand intérêt dans les jeux de routage, car des applications peuvent être sensibles à plusieurs qualités de service. Des premiers pas dans cette direction ont été faits dans [29, 11].

**Jeux non-atomiques : l'équilibre de Wardrop.** On est souvent confronté à des jeux où le nombre de joueurs est très grand. Une démarche naturelle est alors d'étudier les jeux non-atomiques, c'est-à-dire les jeux où il y a une infinité de joueurs, et où un seul joueur a une influence négligeable sur les utilités des autres joueurs. L'équilibre obtenu en suivant cette démarche est souvent une bonne approximation pour un jeu d'un nombre  $n$  fini (où  $n$  est grand) de joueurs, comme l'avaient montré Haurie et Marcotte dans [32]. Il est d'ailleurs souvent beaucoup plus simple à calculer. Dans le contexte de jeux de routage, l'équilibre est connu sous le nom d'"Equilibre de Wardrop". Il a été défini en 1952 par Wardrop [59]. Pour en savoir plus, le lecteur est invité à lire le survey [8]. Mentionnons finalement qu'il existe aussi des notions d'équilibres mixtes qui permettent de modéliser une combinaison d'un grand nombre de joueurs non-atomiques avec d'autres joueurs qui ont un "grand poids" et qui sont modélisés comme dans les sous-sections précédentes, voir [18, 38, 60].

## 8 Commentaires et Autres directions

Dans cette section, nous décrivons brièvement d'autres directions de la théorie des jeux qui ont eu ou qui pourraient avoir un impact sur les réseaux de télécommunication.

## 8.1 Perspective de modélisation

Il y a plusieurs cas intéressants où l'analyse mathématique du comportement d'un protocole (de routage ou de contrôle de congestion) est obtenue par des outils de la théorie des jeux, bien que les joueurs dans le modèle de jeu ne prennent pas de décisions dans le protocole réel. Nous en décrivons deux cas. Cela montre que la théorie des jeux peuvent être utile même dans des situations où il n'y a pas des joueurs réels.

**Routage dans les réseaux adhoc** L'article [31] considère un problème de routage dans les réseaux adhoc. Un protocole de routage est proposé qui a pour objectif d'envoyer chaque paquet de chaque source par le chemin le plus court jusqu'à sa destination. Les décisions de routage se font dans les terminaux mobiles qui servent de routeurs. Les choix des routes que les auteurs obtiennent avec cette approche sont les mêmes que ceux obtenus à l'équilibre de Wardrop (que nous avons présenté dans la section précédente), où un joueur serait l'équivalent d'un paquet. Cet équilibre est dit "sans joueur" car ni les paquets ni leur source ne prennent de décision en réalité.

**Débit de connexions TCP.** Une ligne de recherche très fructueuse a été celle du calcul du débit des connexions TCP dans un réseau à topologie générale [2, 21, 42]. L'approche de [42] consiste à montrer que le partage de bande passante entre les connexions peut être calculé en résolvant un problème d'optimisation où la fonction objectif dépend de la variante de TCP utilisée. Cette approche permet d'obtenir des propriétés du partage de bande passante, et de montrer sous des conditions assez standards que la solution obtenue est unique. Ces résultats ont été généralisés au cas où le réseau contient des connexions de plusieurs types. Le débit de TCP peut alors être calculé comme un équilibre de Nash d'un certain jeu, malgré le fait qu'en réalité, aucune connexion TCP n'est un joueur.

## 8.2 De vrais jeux?

Nous portons dans ce paragraphe une réflexion sur l'applicabilité et l'importance de la théorie des jeux dans les réseaux.

Un grand nombre de situations de compétition existe dans le contexte des réseaux. Quelques exemples :

1. La compétition entre opérateurs ou fournisseurs de services concernant le type et la qualité de service offerts ainsi que la politique de tarification [30].

2. Les enchères jouent un rôle très important dans les réseaux. Les opérateurs doivent passer par des enchères pour l'attribution des ressources radio qui sont souvent très chères. D'autre part, les enchères ont bien pénétré Internet à travers lequel les internautes peuvent vendre ou acheter des biens en utilisant des enchères (tel que eBay). La connaissance des caractéristiques d'Internet pourrait apporter des avantages à cette activité.

D'autre part, il y a un effort important de recherche pour analyser des situations de compétition "artificielle", dans le sens où, en réalité, les individus concernés se comportent d'une manière coopérative. Cependant, les réflexions liées à ces situations pourraient aboutir à de nouveaux protocoles plus robustes et plus décentralisés (et donc potentiellement plus simples pour une mise à l'échelle dans de grands réseaux).

Voici quelques exemples :

1. Plusieurs versions de protocoles TCP (contrôle de congestion) existent ; ils sont tous des protocoles qui s'adaptent à la congestion et cèdent des ressources lors d'une congestion. Nous n'avons pas observé de comportement non-coopératif parmi les internautes qui se traduirait par l'utilisation de protocoles agressifs.
2. Le contrôle de puissance dans les réseaux cellulaire a été beaucoup étudié dans le contexte non-coopératif. En réalité, il semble que les abonnés des téléphones cellulaires n'ont pas adopté de comportement non-coopératif.

Nous tirons la conclusion qu'un comportement coopératif est souvent adopté dans les réseaux, même quand il semblerait qu'on puisse tirer avantage et obtenir plus en jouant cavalier seul. Nous expliquons ce phénomène par le fait que les services télécom sont probablement suffisamment satisfaisants (du point de vue qualité et prix) pour que les avantages d'un comportement non-coopératif ne valent pas l'effort que nécessite un changement de technologie pour rendre la compétition entre usagers possible.

## References

- [1] F. Allen and S. Morris. Finance applications of game theory. In K. Chatterjee and W. Samuelson, editors, *Advances in Business Applications of Game Theory*, pages 17–48, Boston, 2001. Kluwer Academic Publishers.

- [2] E. Altman, K. Avrachenkov, and C. Barakat. Tcp network calculus: The case of large delay-bandwidth product. In *IEEE INFOCOM*, New-York, USA, June 2002.
- [3] E. Altman, R. El Azouzi, and O. Pourtallier. *Computer Networks*, 43(2):133–146, October 2003.
- [4] E. Altman, R. El Azouzi, and A. Vyacheslav. Non-cooperative routing in loss networks. 49, Issue 1-4:43–55, 2002.
- [5] E. Altman, T. Başar, T. Jimenez, and N. Shimkin. Routing into two parallel links: Game-theoretic distributed algorithms. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 61(9):1367–1381, September 2001.
- [6] E. Altman, T. Başar, T. Jiménez, and N. Shimkin. Competitive routing in networks with polynomial cost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:92–96, 2002.
- [7] E. Altman, N. Bonneau, M. Debbah, and G. Caire. An evolutionary game perspective to ALOHA with power control. In *Proceedings of the 19th International Teletraffic Congress*, Beijing, 29 August - 2 September 2005.
- [8] E. Altman and L. Wynter. Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks. *Networks and Spatial Economics (Special Issue on Crossovers Between Transportation and Telecommunication Modelling, E. Altman and L. Wynter, Guest Eds.)*, 4(1), March 2004.
- [9] R. J. Aumann. Subjective and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics*, pages 67–96, 1974.
- [10] R. Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. New York: Basic Books, 1984.
- [11] R. El Azouzi, M. El Kamili, E. Altman, M. Abbad, and T. Basar. Combined competitive flow control and routing in mult-user communication networks with hard side constraints, analysis control and optimization of complex dynamic systems, Editors E. K. Boukas and R. P. Malhamé. 2005.
- [12] T. Başar and P. Bernhard.  *$H^\infty$ -Optimal Control and Relaxed Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. Birkhauser, Boston, MA, USA, 1991 (2nd edition, 1995).
- [13] Douglas G. Baird, Robert H. Gertner, and Randal C. Picker. *Game Theory and the Law*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1994.
- [14] M. Bardi, T. Parthasarathy, and T.E. Raghavan. In *Annals of Dynamic Games: Stochastic and Differential Games, Theory and Numerical Methods*, volume 5, Berlin, 1999. Birkhauser.

- [15] N. G. Beans, F. P. Kelly, and P. G. Taylor. Braess's paradox in a loss network. *J. Appl. Prob.*, 34:155–159, 1997.
- [16] Lawrence E. Blume and William R. Zame. The algebraic geometry of competitive equilibrium. In W. Neuefeind, editor, *Essays in General Equilibrium and International Trade: In Memoriam Trout Rader*, New York, 1993. Springer-Verlag.
- [17] T. Boulogne and E. Altman. Competitive routing in multicast communications networks, 2005.
- [18] T. Boulogne, E. Altman, H. Kameda, and O. Pourtallier. Mixed equilibrium in multiclass routing games. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(6):903–916, June 2002.
- [19] T. Boulogne, E. Altman, and O. Pourtallier. On the convergence to nash equilibrium in problems of distributed computing. *The Annals of Operations Research, special volume on applications of game theory*, 109(1), Jan 2002.
- [20] D. Braess. Über ein paradoxen der werkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12:256–268, 1968.
- [21] Te Bu and D. Towsley. Fixed point approximation for tcp behaviour in an aqm network. June 2001.
- [22] A. Cabrales. Stochastic replicator dynamics. *International Economic Review, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association*, 41(2):451–481, May 2000.
- [23] A. Charnes. Constrained games and linear programming. *Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A.*, 39:639–641, 1953.
- [24] J. E. Cohen and F. P. Kelly. A paradox of congestion in a queuing network. *J. Appl. Prob.*, 27:730–734, 1990.
- [25] P. Cubiotti. Existence of nash equilibria for generalized games without upper semicontinuity. *International Journal of Game Theory*, 26:267–273, 1997.
- [26] S. Dafermos and A. Nagurney. On some traffic equilibrium theory paradoxes. *Transportation Research B*, 18:101–110, 1984.
- [27] G. Debreu. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 38:886–893, 1952.
- [28] G. Debreu. Existence of competitive equilibrium. *Handbook of Mathematical Economics*, 1982.

- [29] R. El-Azouzi and E. Altman. Constrained traffic equilibrium in routing. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(9):1656–1660, Sept. 2003.
- [30] R. El-Azouzi, E. Altman, and L. Wynter. Telecommunications network equilibrium with price and quality-of-service characteristics. In *Proceedings of the International Teletraffic Conference (ITC)*, Berlin, 2003.
- [31] P. Gupta and P. R. Kumar. A system and traffic dependent adaptive routing algorithm for Ad Hoc networks. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2375–2380, San Diego, USA, Dec. 1997.
- [32] A. Haurie and P. Marcotte. On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria. *Networks*, 15:295–308, 1985.
- [33] J. Hofbauer and K. Sigmund. Evolutionary game dynamics. *American Mathematical Society*, 40(4):479–519, 2003.
- [34] A. I. Houston and J. M. McNamara. Evolutionarily stable strategies in the repeated hawk-dove game. *Behavioral Ecology*, pages 219–227, 1991.
- [35] S. Jorgensen and G. Zaccour. *Differential games in marketing*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 2004.
- [36] H. Kameda. How harmful the paradox can be in braess/cohen-kelly-jeffries networks. In *IEEE INFOCOM*, New York, NY, USA, June 2002.
- [37] H. Kameda, E. Altman, T. Kozawa, and Y. Hosokawa. Braess-like paradoxes in distributed computer systems. *IEEE Transaction on Automatic control*, 45(9):1687–1691, 2000.
- [38] H. Kameda, E. Altman, and O. Pourtallier. Analytic study of mixed optima in symmetric distributed computer systems. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Dynamic Games and Applications*, Adelaide, Australia, Dec. 18-21 2000.
- [39] H. Kameda and O. Pourtallier. Paradoxes in distributed decisions on optimal load balancing for networks of homogeneous computers. *Journal of the ACM*, 49(3):407–433, 2002.
- [40] Y. A. Korilis, A. A. Lazar, and A. Orda. Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks. *Journal of Applied Probability*, 36:211–222, 1999.
- [41] Y. A. Korilis and A. Orda. Incentive-compatible pricing strategies for QoS routing. In *Proceedings of IEEE INFOCOM’99*, New York, NY, USA, March 1999.



- [42] S. H. Low. A duality model of TCP and queue management algorithms. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 11(4):525–536, August 2003.
- [43] J. M. McNamara, S. Merad, and E. J. Collins. The hawk-dove game as an average cost problem. *Advances of Applied Probability*, 23:667–682, 1991.
- [44] V. Mhatre and C. Rosenberg. Energy and cost optimizations in wireless sensor networks: A survey. *in the 25th Anniversary of GERAD, Kluwer Academic Publishers*, Jan 2004.
- [45] J. D. Morrow. *Game Theory for Political Scientists*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [46] A. Orda, N. Rom, and N. Shimkin. Competitive routing in multi-user communication networks. *IEEE/ACM Transaction on Networking*, 1:614–627, 1993.
- [47] M. Patriksson. *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*. VSP BV, The Netherlands, 1994.
- [48] K. Prestwich. *Game Theory*.
- [49] J. B. Rosen. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N-person games. *Econometrica*, 33:153–163, 1965.
- [50] W. H. Sandholm. *Evolutionary Justification of Nash Equilibrium*. PhD thesis, Northwestern University, 1998.
- [51] W. H. Sandholm. Evolutionary implementation and congestion pricing. *SSRI Working Paper*, (9938), 1999.
- [52] W. H. Sandholm. Potential games with continuous player sets. *Journal of Economic Theory*, 97:81–108, 2001.
- [53] S. Schanuel, L. K. Simon, and W. R. Zame. The algebraic geometry of games and the tracing procedure. In R. Selten, editor, *Game Equilibrium Models, II: Methods, Morals and Markets*, pages 9–44, Berlin, 1991. Springer-Verlag.
- [54] M. Smith. Game theory and the evolution of fighting. In John Maynard Smith, editor, *On Evolution (Edinburgh: Edinburgh University Press)*, pages 8–28, 1972.
- [55] M. Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
- [56] H. V. Stackelberg. *Marktform und Gleichgewicht*. Julius Springer, Vienna, Austria, 1934.

- [57] T. L. Vincent and T. L. S. Vincent. Evolution and control system design. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(5):20–35, Oct. 2000.
- [58] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [59] J. G. Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research communication networks. *Proc. Inst. Civ. Eng.*, Part 2, 1:325–378, 1952.
- [60] B. W. Wie. A differential game approach to the dynamic mixed behavior traffic network equilibrium problem. *European Journal of Operational Research*, 83:117–136, 1995.