Les chaînes de Markov: fondements, propriétés, calcul

Alain Jean-Marie
LIRMM/INRIA
ajm@lirmm.fr

Journée Mathématique et Informatique pour la Biodiversité
IFR 119
Montpellier, 31 octobre 2003

Plan de l'exposé

0. Généralités
1. Chaînes de Markov en temps discret: calcul Markovien, et algèbre linéaire
   - Probabilités d'état
   - Probabilités stationnaires
   - Temps d'atteinte
2. Chaînes de Markov en temps continu
   - Définition, interprétation, constructions
   - Relations avec le temps discret
   - Calcul de probabilités
   - Réversibilité
3. Composition de chaînes de Markov

Chaînes de Markov

Ce sont des processus stochastiques qui «vivent» dans un espace d'état $\mathcal{E}$.

Deux catégories:

en temps discret	$\{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$
en temps continu	$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$

Temps discret: suite de variables aléatoires.

Temps continu: famille de fonctions aléatoires $\omega \mapsto X(t; \omega)$.

Propriété de Markov

Propriété fondamentale: l'absence de «mémoire».

Étant donnés

- un instant t (le «présent»),
- un ensemble de n observations dans le «passé» du processus: à des dates $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, le processus a pris successivement les valeurs $j_0, j_1, \ldots, j_n$,
- un instant $t_{n+1} > t$ dans le «futur» du processus:

la probabilité que $X(t_{n+1}) = j$ ne dépend que du dernier événement observé:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} | X(t_n) = j_n, \ldots, X(t_0) = j_0\} \\ = \quad & \mathbb{P}\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} | X(t_n) = j_n\} \ . \end{aligned}$$

Si de plus cette probabilité ne dépend pas du temps, la chaîne est homogène.

Problèmes de chaînes de Markov

Analyse Étant donnée une chaîne de Markov, calculer ses statistiques:

- probabilités d'état transitoires, à tout instant t
- probabilités stationnaires $t \to \infty$
- fréquences de visite, nombre de transitions
- temps d'atteinte, temps de retour
- ...

Synthèse Étant données certaines statistiques, trouver une chaîne de Markov.

A besoin de formules, algorithmes résultant de l'analyse...

Puissance du modèle:

$$\text{Propriété de Markov} \quad \Longrightarrow \quad \text{problèmes linéaires}$$

Plan de l'exposé

Les chaînes de Markov en temps discret (CMTD)

En temps discret, la propriété de Markov peut se résumer à:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X(t+1) = j | X(t) = i, X(t-1) = j_{t-1}, \ldots, X(0) = j_0\} \\
&= \mathbb{P}\{X(t+1) = j | X(t) = i\} \\
&= P_{i,j} \ .
\end{aligned}$$

Les nombres $P_{i,j}$, $(i,j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ sont les probabilités de transition, et la matrice P dont les composantes sont les $P_{i,j}$ est la matrice de transition.

Exemple de chaîne de Markov

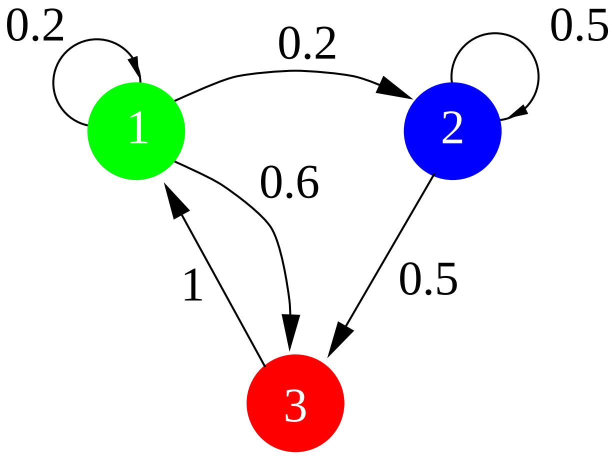


Diagramme de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Matrice de transition

Vecteurs de probabilité:

$$\begin{array}{lcllllr}
\boldsymbol{\pi}_0 & = & (& 1 & 0 & 0 &) \\
\boldsymbol{\pi}_1 & = & (& 0.2 & 0.2 & 0.6 &) \\
\boldsymbol{\pi}_2 & = & (& 0.64 & 0.14 & 0.22 &) \\
\boldsymbol{\pi}_3 & = & (& 0.348 & 0.198 & 0.454 &) \\
\boldsymbol{\pi}_4 & = & (& 0.5236 & 0.1686 & 0.3078 &) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\boldsymbol{\pi}_\infty & = & (& 5/11 & 2/11 & 4/11 &)
\end{array}$$

Dynamique des probabilités

Soit $\mathsf{P}(n)$ la matrice des probabilités de transition à n pas:

$$P(n)_{i,j} \;=\; \mathbb{P}\{X(n) = j \mid X(0) = i\}\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(n) \;=\; \mathsf{P}^n\ .}$$

Soient maintenant, les probabilités d'état:

$$\pi_n(j) \;=\; \mathbb{P}\{X(n) = j\}.$$

On a alors, sous forme matricielle:

$$\boldsymbol{\pi}_n \;=\; \boldsymbol{\pi}_{n-1}\,\mathsf{P} \qquad \text{ou bien} \qquad \boldsymbol{\pi}_n \;=\; \boldsymbol{\pi}_0\,\mathsf{P}^n\ .$$

Calculer ces probabilités transitoires revient donc à calculer P^n.

Probabilités stationnaires et équations d'équilibre

Si $\lim_n \boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}$ existe, alors on a les équations d'équilibre, dont sont solutions les probabilités stationnaires (ou mesures invariantes) :

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} \quad = \quad \boldsymbol{\pi}\, \mathsf{P}\ .}$$

Sous forme développée: $\forall i \in \mathcal{E}$,

$$\pi(i) \;=\; \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi(j)\; P_{j,i}\ .$$

$\Longrightarrow$ étude de l'existence, unicité et calcul de ces probabilités stationnaires: stabilité, ergodicité.

$\Longrightarrow$ Influence de la topologie de la chaîne.

$\Longrightarrow$ Classification des états: récurrents, transients, ...

Autre calcul Markovien: les temps d'atteinte

Soit T_{ij} le nombre de sauts nécessaires pour atteindre l'état j en partant de l'état i.

En conditionnant sur la première transition de la chaîne :

$$\begin{array}{lcll} T_{ij} & = & 0 & \text{si } i = j \\ & = & 1 + T_{kj} & \text{avec probabilité } p_{ik}, \text{ si } i \neq j \end{array} .$$

En moyenne :

$$\begin{array}{lcll} \overline{T}_{ij} & = & 0 & \text{si } i = j \\ & = & 1 + \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik} \, \overline{T}_{kj} & \text{si } i \neq j \end{array} .$$

$\Longrightarrow$ systèmes d'équations linéaires.

Plan de l'exposé

Chaînes de Markov en temps continu (CMTC)

Soient les probabilités de transition:

$$\mathsf{P}(t)_{i,j} \;=\; \mathbb{P}\{X(t) = j \mid X(0) = i\} \;.$$

Si le processus $\{X(t)\}$ est suffisamment «régulier», alors la propriété de Markov implique:

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}_{i,j}}{\mathrm{d}t}(t) \;=\; \sum_{k\in\mathcal{E}} q_{ik}\, \mathsf{P}_{k,j}(t) \qquad \text{(Chapman-Kolmogorov)} \;.$$

Il existe donc une matrice Q telle que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathsf{P}}{\mathrm{d}t}(t) \;=\; \mathsf{Q}\,\mathsf{P}(t) \;=\; \mathsf{P}(t)\,\mathsf{Q} \;.}$$

Cette matrice est le générateur infinitésimal.

Ses éléments sont les taux de transition, ou «vitesses» de transition (en événements/s): pour $i \neq j$,

$$\mathbb{P}\{X(t+\delta t) = j \mid X(t) = i\} \approx q_{ij} \times \delta t \ .$$

Alors:

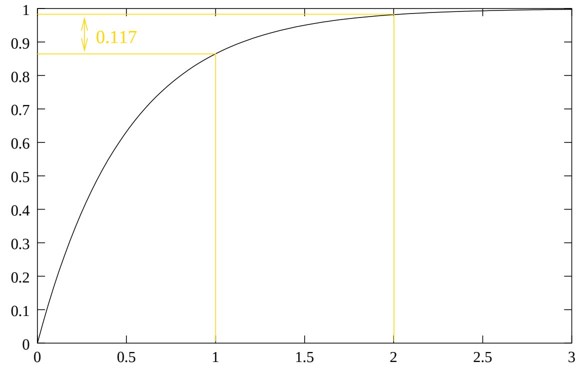
$$\boxed{\mathsf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n,}$$

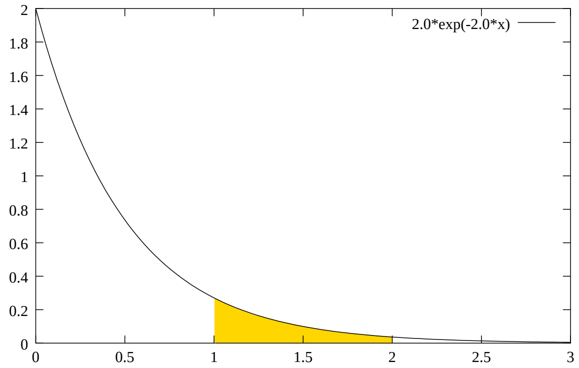
CMTC et distribution exponentielle

En temps continu, et en espace discret, la propriété de Markov implique que le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ séjourne dans chaque état pendant une durée aléatoire de distribution exponentielle.

Une variable aléatoire T a une distribution exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si:

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}\{T \leq x\} \;=\; 1 \;-\; e^{-\lambda x} \;.$$





Fonction de répartition de la variable exponentielle ($\lambda = 2$)

Interprétation/Construction des générateurs

Construction #1.

Soit un processus stochastique en temps continu, $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$, ayant les propriétés suivantes. Quand X entre dans l'état i:

- X reste en i un temps aléatoire, exponentiellement distribué avec paramètre τ_i, indépendamment du passé; puis
- X saute instantanément dans l'état j avec probabilité p_{ij}. On a $p_{ij} \in [0,1]$, $p_{ii} = 0$ et
$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

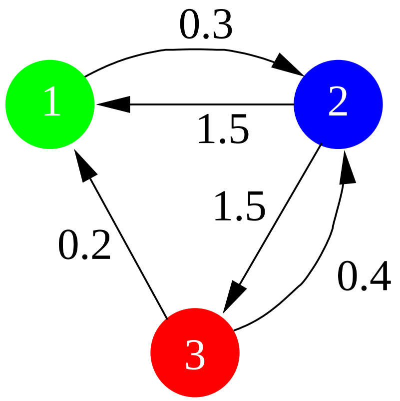
Alors $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est une CMTC de générateur infinitésimal:

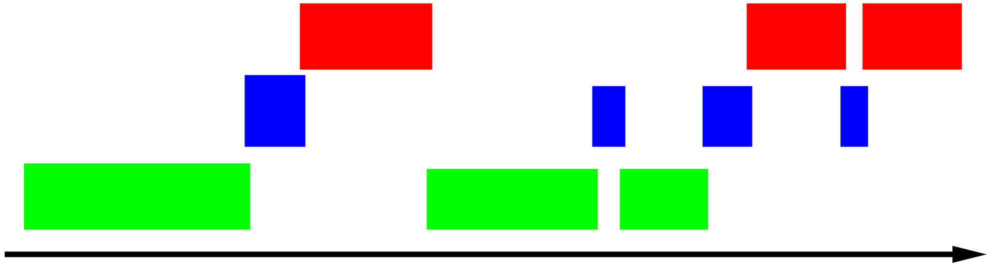
$$\begin{cases} q_{ij} = \tau_i \; p_{ij} & \text{si } i \neq j \\ q_{ii} = -\tau_i \; . \end{cases}$$

Exemple de CMTC

Une illustration de la Construction #1.

$$\tau = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 3 \\ 0.6 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{Q} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 & 0 \\ 1.5 & -3.0 & 1.5 \\ 0.2 & 0.4 & -0.6 \end{pmatrix}.$$





Interprétation/Construction des générateurs (suite)

Construction #2.

Soit un processus stochastique en temps continu, $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$, ayant les propriétés suivantes. Quand X entre dans l'état i:

- Pour chaque état $j \neq i$, on tire au hasard une variable aléatoire Y_{ij} de distribution exponentielle de paramètre μ_{ij}, indépendantes entre elles et du passé. On peut avoir $\mu_{ij} = 0$, auquel cas $Y_{ij} = +\infty$.
- Le minimum des Y_{ij} est l'un d'entre eux: Y_{ik}. A la date Y_{ik}, X saute instantanément dans l'état k.

Alors $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est une CMTC de générateur infinitésimal Q:

$$\begin{cases} q_{ij} = \mu_{ij} & \text{si } i \neq j \\ q_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij} \ . & \end{cases}$$

Relations entre continu et discret

Plusieurs relations existent entre CMTC et CMTD:

- les chaînes incluses
- l'uniformisation.

Chaînes incluses

Soit $\{T(n); n \in \mathbb{N}\}$ une suite de temps d'arrêt d'une CMTC X. Alors le processus

$$Y(n) \;=\; X(T(n))$$

est une CMTD (propriété de Markov forte). C'est une chaîne incluse dans X.

Exemples:

- chaîne incluse au moments des sauts
- chaîne incluse aux instants $T(n) = n \times T_0$
  $\Longrightarrow$ matrice de transition $\mathsf{P} = e^{T_0 \mathbf{Q}}$.
- échantillonnage selon un processus de Poisson de taux ν
  $\Longrightarrow$ matrice de transition $\mathsf{P} = (I - \frac{1}{\nu}\mathsf{Q})^{-1}$.
- chaîne incluse aux moments où le processus X entre dans un sous-espace $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$.

Uniformisation des CMTC

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ une CMTC de générateur Q, et soit un nombre ν tel que

$$\nu \geq \max_i \{|\mathsf{Q}_{ii}|\} \ .$$

Soit ensuite la matrice P:

$$\boxed{\mathsf{P} \quad = \quad \mathsf{I} + \frac{1}{\nu}\mathsf{Q} \ .}$$

C'est la matrice de transition d'une chaîne de Markov en temps discret $\{Y(n)\}$.

Cette construction est nommée uniformisation.

Propriété: distribution stationnaire de X = distribution stationnaire de Y.

Calcul des probabilités transitoires

Soit Q: on cherche à calculer $e^{t\mathsf{Q}}$.

Si Q est *diagonalisable*: il existe $\mathsf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale et S inversible tels que

$$\mathsf{Q} \;=\; \mathsf{S}\,\mathsf{D}\,\mathsf{S}^{-1}\;.$$

Alors:

$$\boxed{e^{t\mathsf{Q}} \;=\; \mathsf{S}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\mathsf{S}^{-1}\;.}$$

Les λ_i sont les valeurs propres de Q. Les colonnes/lignes de $\mathsf{S}/\mathsf{S}^{-1}$ sont ses vecteurs propres: c'est une décomposition spectrale :

$$e^{t\mathbf{Q}} \;=\; \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} A_i \;.$$

Doit-on diagonaliser entièrement? Approximations asymptotiques:

- si t et/ou $|\lambda_i|$ est grand pour $i > i_0$,

$$e^{t\mathbf{Q}} \;\simeq\; \sum_{i=1}^{i_0} e^{\lambda_i t} A_i \;.$$

- si t est petit,

$$e^{t\mathbf{Q}} \;\simeq\; \mathsf{I} \,+\, t\mathsf{Q} \,+\, \frac{t^2}{2}\mathsf{Q}^2 \,+\, \ldots$$

Autres méthodes:

- Calcul direct par les séries:
  Par la définition:

$$\boxed{e^{t\mathsf{Q}} \quad = \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\mathsf{Q}^n,}$$

  Par uniformisation, pour tout ν assez grand:

$$\boxed{e^{t\mathsf{Q}} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^n}{n!}\, e^{-\nu t} \, \left(\mathsf{I} \, + \, \frac{1}{\nu}\, \mathsf{Q}\right)^n \, .}$$

- Intégration numérique des équations différentielles.

- Simulation «de Monte Carlo» grâce à:
  - Construction #1 ou Uniformisation:
    1. Choisir la durée de séjour,
    2. Choisir la transition

    $\Longrightarrow$ simulation séquentielle.
  - Construction #2:
    1. Choisir les dates des changements possibles,
    2. Calculer la plus proche,
    3. Transition

    $\Longrightarrow$ simulation événementielle.

  $+$ statistiques.

Réversibilité des chaînes de Markov

Si $X(t)$ est une chaîne de Markov stationnaire la chaîne renversée est $X(-t)$.

C'est aussi une chaîne de Markov stationnaire. Elle a même distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ et a pour générateur infinitésimal :

$$q'_{i,j} \quad = \quad q_{j,i} \, \frac{\pi(j)}{\pi(i)} \ .$$

La chaîne est réversible si $\{X(t)\}$ et $\{X(-t)\}$ ont les mêmes propriétés statistiques, donc même générateur. C'est-à-dire si

$$\boxed{\pi(i) \; q_{i,j} \quad = \quad \pi(j) \; q_{j,i} \ .}$$

Propriétés:

Troncature Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. La chaîne de Markov **tronquée** sur $\mathcal{A}$ est également réversible, et a pour distribution stationnaire: si $i \in \mathcal{A}$

$$\pi(i) / \Big(\sum_{j \in \mathcal{A}} \pi(j) \Big) \ .$$

Symétrisation Soit Q le générateur d'une chaîne de Markov réversible. Soit $\mathbf{\Pi} = \text{diag}(\pi(1), \ldots, \pi(n))$. Alors il existe:

- une matrice symétrique S telle que

$$\mathsf{Q} \ = \ \mathsf{S} \, \mathbf{\Pi} \ ,$$

- une matrice symétrique R telle que

$$\mathsf{Q} \ = \ \mathbf{\Pi}^{-1/2} \, \mathsf{R} \, \mathbf{\Pi}^{1/2} \ .$$

Par conséquent, toutes les valeurs propres de Q sont **réelles et négatives**.

Plan de l'exposé

0. Généralités
1. Chaînes de Markov en temps discret: calcul Markovien, et algèbre linéaire
   - Probabilités d'état
   - Probabilités stationnaires
   - Temps d'atteinte
2. Chaînes de Markov en temps continu
   - Définition, interprétation, constructions
   - Relations avec le temps discret
   - Calcul de probabilités
   - Réversibilité
3. Composition de chaînes de Markov
   - Superposition
   - Modulation

Composition de chaînes de Markov

Il est possible de construire des chaînes de Markov composites à partir de chaînes de Markov «élémentaires»:

- par superposition (ou juxtaposition)
- par modulation
- par accumulation

Dans chaque cas, on exprime

- le générateur infinitésimal
- ses éléments spectraux

comme une «combinaison» de ceux des chaînes constitutives.

Superposition de Chaînes de Markov

Si X_1 et X_2 sont deux chaînes de Markov indépendantes, sur deux espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, alors $Z = (X_1, X_2)$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

Les matrices (générateur et taux) s'obtiennent comme des sommes de Kronecker (en temps continu):

$$\boxed{\mathbf{Q} \quad = \quad \mathbf{Q}_1 \oplus \mathbf{Q}_2 \ .}$$

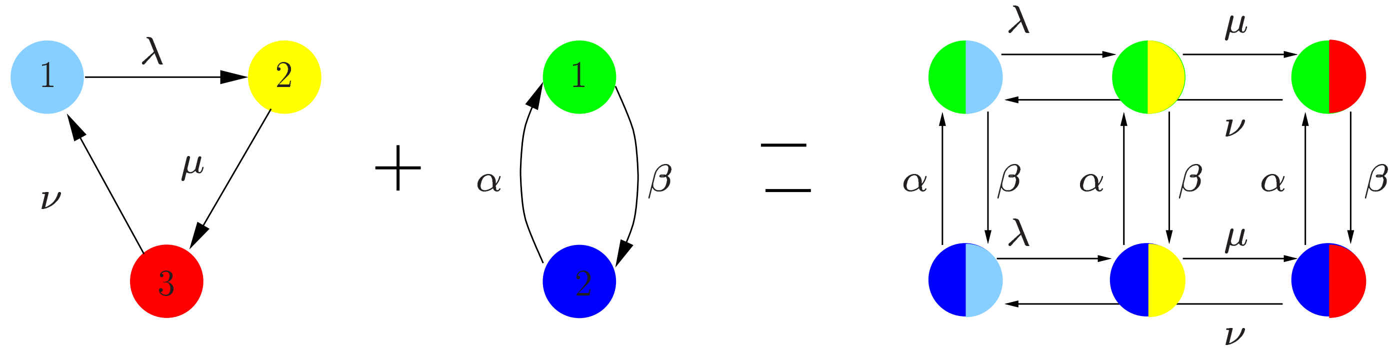
Produit de Kronecker de deux matrices A $(n \times n)$ et B $(m \times m)$: une matrice $nm \times nm$ avec

$$A \otimes B \;=\; \begin{pmatrix} A_{11}B & \ldots & A_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}B & \ldots & A_{nn}B \end{pmatrix} .$$

Somme de Kronecker:

$$\begin{aligned} A \oplus B \;&=\; A \otimes I(m) + I(n) \otimes B \\ &=\; \begin{pmatrix} A_{11}B & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11}I & \ldots & B_{1m}I \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1}I & \ldots & B_{nn}I \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Exemple: pour deux chaînes de Markov $\{X_1(t)\}$ et $\{X_2(t)\}$, on a:



$$
\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ \nu & 0 & -\nu \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \lambda & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & - & \mu & 0 & \alpha & 0 \\ \nu & 0 & - & 0 & 0 & \alpha \\ \hline \beta & 0 & 0 & - & \lambda & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & - & \mu \\ 0 & 0 & \beta & \nu & 0 & - \end{array} \right)
$$

Processus de Markov Modulés

Les processus de Markov modulés sont des processus dont les taux de transition dépendent de l'état d'un seconde chaîne de Markov, «l'environnement»:

- l'état de l'environnement, X, évolue dans un espace $\mathcal{E}$ selon une CMTC de générateur $\mathsf{G} = (g_{ij})$;
- le processus Z évolue dans un espace $\mathcal{A}$, selon un CMTC de générateur $\mathsf{M}(i)$ tant que $X(t)$ vaut i.

Le processus $(X(t), Z(t))$ est une chaîne de Markov dans l'espace $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$.

Modulation des vitesses de transition

Par exemple, supposons que quand X est dans l'état i, la vitesse de Z (taux de transition) est multipliée par v_i:

$$\mathsf{M}(i) \;=\; v_i \times \mathsf{M}\ .$$

Le générateur du processus $(X(t), Z(t))$ a pour transitions:

$$\begin{array}{rcll} (i,a) & \rightarrow & (i,b) & \text{avec taux } m_{ab}v_i \\ (i,a) & \rightarrow & (j,a) & \text{avec taux } g_{ij} \end{array}$$

Sous forme matricielle (par blocs):

$$\mathsf{Q} \;=\; \begin{pmatrix} v_1\mathsf{M} + g_{11}\mathsf{I} & g_{12}\mathsf{I} & \dots & g_{1K}\mathsf{I} \\ g_{21}\mathsf{I} & v_2\mathsf{M} + g_{22}\mathsf{I} & & g_{2K}\mathsf{I} \\ \vdots & & \ddots & \\ g_{K1}\mathsf{I} & g_{K2}\mathsf{I} & \dots & v_K\mathsf{M} + g_{KK}\mathsf{I} \end{pmatrix}$$

Et en utilisant le produit de Kronecker:

$$\boxed{\mathsf{Q} \;=\; \mathsf{G} \otimes \mathsf{I} + \mathsf{V} \otimes \mathsf{M} \,.}$$

où

$$\mathsf{V} \;=\; \mathtt{diag}(v_1, \dots, v_K) \;.$$

C'est une généralisation de la superposition (vitesses constantes):

$$\mathsf{Q} \;=\; \mathsf{G} \otimes \mathsf{I} + \mathsf{I} \otimes (v\mathsf{M}) \;.$$

Pour calculer $e^{\mathsf{Q}t}$, une méthode est de diagonaliser Q. On doit trouver ses valeurs propres et vecteur propres. Ayons l'idée de prendre x et y tels que

$$\begin{aligned} x\ \mathsf{M} &= \lambda\ x \\ y &= (a_1 x, \ldots, a_N x) = a \otimes x \\ a(\mathsf{G} + \lambda \mathsf{V}) &= \mu a\ . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y\ \mathsf{Q} &= (a \otimes x)\ (\mathsf{G} \otimes \mathsf{I} + \mathsf{V} \otimes \mathsf{M}) \\ &= a\mathsf{G} \otimes x\mathsf{I} + a\mathsf{V} \otimes x\mathsf{M} \\ &= a\ (\mathsf{G} + \lambda \mathsf{V}) \otimes x \\ &= \mu\ (a \otimes x) \\ &= \mu y\ . \end{aligned}$$

Brève bibliographie et sources

Chaînes de Markov

W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volumes I et II. J. Wiley & Sons, New York, troisième edition, 1968 et 1971.

J.G. Kemeny and Snell J.L. *Finite Markov Chains*, volume 76. Springer-Verlag, 1976.

S. Ross. *Stochastic Processes*. Wiley & Sons, 1996.

Chaînes de Markov et horloge variable en Phylogénie

W.M. Fitch. Rate of change of concomitantly variable codons. *J. Mol. Evol.*, 1:84-96, 1971.

P.J. Lockhart, M.A. Steel, A.C. Barbrook, D.H. Hudson et C.J. Howe. A covariotide model explains apparent phylogenetic structure of oxygenic photosynthetic lineages. *Mol. Biol. Evol.*, 15:1183–1188. 1998.

C. Tuffley and M.A. Steel. Modelling the covarion hypothesis of nucleotide substitution. *J. Mol. Evol.*, 17:496–508, 1998.

Ph. Lopez, P. Forterre et H. Philippe. The root of the tree of life in the light of the covarion model. *J. Mol. Evol.*, 49:496–508, 1999.

Ph. Lopez. *Deux approches de l'évolution moléculaire: Asymétries de composition et recherche des covarions*. Thèse de l'Université de Paris-Sud, décembre 2000.

N. Galtier, Maximum Likelihood phylogenetic analysis under a covarion-like model. *Mol. Biol. Evol.*, 18:866–873, 2001.

Modèles markoviens modulés

D. Anick, D. Mitra, and M.M. Sondhi. Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources. *Bell Sys. Tech. J.*, 61:1871–1894, October 1982.

D. Mitra. Stochastic theory of a fluid models of producers and consumers coupled by a buffer. *Adv. Appl. Prob.*, 20:646–676, 1988.

T.E. Stern and A.I. Elwalid. Analysis of separable Markov-modulated rate models for information-handling systems. *Adv. Appl. Prob.*, 23:105–139, 1991.

A.I. Elwalid, D. Mitra, and T.E. Stern. A theory of statistical multiplexing of Markov modulated sources: Spectral expansions and algorithms. In W.J. Stewart, editor, *Numerical solution of Markov Chains*, 1991.

A.I. Elwalid and D. Mitra. Statistical multiplexing with loss priorities in rate-based congestion control of high speed networks. *IEEE Trans. Comm.*, 42(11):2989–3002, November 1994.

A.I. Elwalid and D. Mitra. Markovian arrival and service communication systems: Spectral expansions, separability and Kronecker-product forms. In W.J. Stewart, editor, *Computations in the Markov Chains*, pages 507–546. Kluwer, 1995.

Processus de Markov modulés en théorie des files d'attente

M.F. Neuts. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models – An Algorithmic Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

M.F. Neuts. The fundamental period of a queue with Markov-modulated arrivals. In *Probability, Statistics and Mathematics: papers in honour of Samuel Karlin*. Academic Press, NY, 1989.

W. Fischer and K. Meier-Hellstern. The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook. *Performance Evaluation*, 18:149–171, 1992.

D.M. Lucantoni, G.L. Choudhury, and W. Whitt. The transient $BMAP/G/1$ queue. *Commun. Statist.-Stochastic Models*, 10(1):145–182, 1994.

A. Jean-Marie, Z. Liu, P. Nain and D. Towsley, "Computational Aspects of the Workload Distribution in the MMPP/GI/1 Queue". *JSAC*, 1999.