Sur la convergence des développements de Taylor dans les systèmes à événements discrets poissonniens

A. Jean-Marie

INRIA Sophia-Antipolis
BP 93 – 2004 Route des Lucioles
F-06902 Sophia Antipolis

Adresse électronique: Alain.Jean-Marie@sophia.inria.fr

19 janvier 1998

Plan

1. Le problème
2. Résultats généraux
3. Systèmes Markoviens: le «Power Series Algorithm»
4. Deux cas particuliers
   - la file à services déterministes alternés $(M/D_d/1)$
   - la file a services exponentiels, Markov modulés

Le problème

On considère un système à événements discrets qui évolue en réponse à des événements qui surviennent selon un processus de Poisson d'intensité λ: $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

On suppose le système stationnaire.

Suite de réponses: $d_0, d_1, \ldots$. On définit le temps d'attente:

$$W_n \;=\; d_n \;-\; t_n \;.$$

Problème: Calculer la distribution stationnaire de W_n.
En particulier, son espérance $\mathbb{E}W$.

Méthode: Considérer $\mathbb{E}W$ comme fonction de λ et écrire:

$$\mathbb{E}W(\lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{n} w_n\, \lambda^n \;+\; o(\lambda^n) \;.$$

Question #1: Est-ce possible?

Question #2: Est-ce que la série converge?

Exemples d'applications

Quelques systèmes utiles en RO et dont on ne connaît pas toujours de solution exacte:

Files d'attente: la $M/G/1$

Systèmes/Réseaux de Files d'attente

Réseaux de Petri

Systèmes de Particules

Résultats généraux

La file $M/GI/1$

D'après la formule de Pollaczek-Khinchine:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W(\lambda) &= \frac{\lambda}{2}\frac{\mathbb{E}\sigma^2}{1-\rho} \\ &= \frac{\mathbb{E}\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{\mu^k}. \end{aligned}$$

La série converge pour tout $\lambda < \mu$.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}W(\lambda) \text{ analytique dans } \{|\lambda| < \mu\}.$$

Autres systèmes. Ca ne marche plus aussi bien...

Stabilité et Analyticité

Note: Par la formule de Little, pour une file d'attente:

$$\mathbb{E}W = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}N - \frac{1}{\mu}.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{E}W$ et $\mathbb{E}N$ ont même domaine d'analyticité.

La file $M/M/1/K$

$$\mathbb{E}N = \frac{\rho + 2\rho^2 + \ldots + K\rho^K}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^K}$$

... possède des pôles en $\rho = e^{2i\pi k/K}$, $k = 1..K$.

$\Longrightarrow$ analytique dans $\{|\lambda| < \mu\}$ bien que stable pour tout λ.

Stabilité et Analyticité *(suite)*

La file $M/M/\infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \frac{\rho^k}{k!}\, e^{-\rho} \\ \mathbb{E}N &= \rho \end{aligned}$$

... sont des fonctions entières (analytiques dans tout $\mathbb{C}$).

La file $M/M/K/K$

$$\mathbb{E}N = \rho \, \frac{1 + \rho + \ldots + \rho^{K-1}/(K-1)!}{1 + \rho + \rho^2/2 + \ldots + \rho^K/K!}$$

... est une fonction rationnelle

$\Longrightarrow$ pas analytique dans tout $\mathbb{C}$.

Approches théoriques

Jonction de courants de recherche

- approximations en trafic faible («Light Traffic Approximations»)
- analyse de perturbations (IPA =«Infinitesimal Perturbation Analysis»)

Résultats recherchés

- conditions d'existence des dérivées par rapport à λ
- conditions d'analyticité en λ
- estimations du rayon de convergence

Quelques travaux:

- Reiman et Simon (89)
- Zazanis (92)
- Gong et Hu (92), Hu (95)
- Błaszczyszyn (95)
- Baccelli, Hasenfuss et Schmidt (95), (98).

Exemple de résultats

Soit $(T, Z) = \{(T_n, Z_n), n \in \mathbb{Z}\}$ un processus de Poisson marqué, stationnaire. Soit ψ une fonctionnelle de ce processus.

Sous certaines conditions (voir [RS89][1] et [BHS98][2])

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} \mathbb{E}\psi(T, Z) = \int_{-\infty}^{0} \cdots \int_{-\infty}^{0} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} \, \mathbb{E}\psi(T + \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{s_j}, Z) \, ds_1 \ldots ds_k$$

1. M. Reiman & B. Simon, «Open Queueing Systems in Light Traffic», *Maths. OR*, 14 (1), 1989
2. F. Baccelli, S. Hasenfuss, V. Schmidt, «Differentiability of Functionals of Poisson Processes via Coupling», janvier 1998

L'algorithme des Séries (PSA)

PSA = «Power Series Algorithm»

– inventé par Hooghiemstra, Keane, van de Ree [HKR87][3]
– développé par Blanc, ex: [Bla93][4]

Ingrédients:

- un processus de naissance et de mort multidimensionnel

$$\text{arrivées} \quad a_j(\vec{n}) \;=\; \rho\alpha_j(\vec{n}), \qquad \text{départs} \quad d_j(\vec{n})$$

- une partition des états en niveaux sans cycles $l(\vec{n})$
- existence d'une transition «vers le bas» de tout $\vec{n}$

3. G. Hooghiemstra, M. Keane et S. van de Ree, «Power Series for stationary distributions of coupled processor models», *SIAM J. Appl. Math.*, **48**, 1159–1166, 1988
4. J.P.C. Blanc, «Performance Analysis and Optimization with the Power Series Algorithm», *Performance Evaluation of Computer and Comunication Systems*, L. Donatiello and R. Nelson (eds.), LNCS 729, Springer Verlag, 1993

L'algorithme des Séries (PSA) *(suite)*

Principe:

$$
\begin{aligned}
p(\vec{n}) &= \sum_k b_{k;\vec{n}}\ \rho^{l(\vec{n})+k} \\
\Longrightarrow \quad b_{k;\vec{n}} &= f\left(b_{k';\vec{m}},\, l(\vec{m}) < l(\vec{n})\right) \\
\Longrightarrow \quad & \text{calcul récursif en partant de } b(\vec{0})
\end{aligned}
$$

Convergence du PSA

En théorie: pas de résultats généraux.

En pratique: dépend du système:

- La file «éclatement/regroupement» («fork/join»)

  converge pour $|\rho| < 1$

- La file «joindre la file la plus courte»

  converge pour $|\rho| < \rho_0 < 1$, ρ_0 inconnu.

- Les systèmes Markoviens finis

  fonctions rationnelles: converge seulement pour $|\rho| < \rho_1 < 1$

- Les systèmes de «polling»

  converge pour $|\rho| < \rho_0 < 1$, ρ_0 inconnu.

La file $M/D_d/1$

Soit une file avec serveur simple,

- arrivées Poisson(λ)
- services $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1}, \sigma_0, \ldots$

Suite de services $\{S_n\}$ stationnaire: on choisit la suite

$$\sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{d-1}, \sigma_0, \sigma_1, \ldots$$

avec probabilité $1/d$.

$$\Longrightarrow \qquad \text{file } M/G/1$$

Le processus de service n'est *pas* i.i.d. Autocorrélation stationnaire (pour $d = 2$):

$$\text{cov}\{S_0, S_n\} \;=\; (-1)^n \, \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)^2}{4} \, .$$

Facteur de charge:

$$\rho \;=\; \lambda \, \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{d-1}}{d} \, .$$

La file $M/D_d/1$ *(suite)*

Calcul de $\mathbb{E}W(\lambda)$

Dans [Jea97][5], on trouve que pour $d = 2$,

$$\mathbb{E}W(\lambda) \;=\; \frac{1}{2}\left(f_1(\lambda) \;+\; f_2(\lambda)\right) \;,$$

avec

$$f_1(\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-2\rho+2\rho^2}{1-\rho} - \frac{1-\lambda\sigma_1}{1+e^{\frac{\lambda}{2}(\sigma_0-\sigma_1)(1-w_1(\rho))}}\right)$$

$$f_2(\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-2\rho+2\rho^2}{1-\rho} - \frac{1-\lambda\sigma_0}{1+e^{\frac{\lambda}{2}(\sigma_1-\sigma_0)(1-w_1(\rho))}}\right)$$

Ici:

$$w_1(\rho) = -\frac{1}{\rho}\,W_0(\rho e^{-\rho}), \qquad W_0(z)e^{W_0(z)} \;=\; z \;.$$

W_0 est la branche principale de la Fonction de Lambert.

5. A. Jean-Marie, «The Waiting Time Distribution in Poisson-Driven Deterministic Systems», RR INRIA 3083, Janvier 1997

La file $M/D_d/1$ *(suite)*

Développement de Taylor de $\mathbb{E}W(\lambda)$

Théorème (Cauchy-Taylor): *Le rayon de convergence de la série de Taylor d'une fonction analytique $f(z)$ est le module de la singularité la plus proche de 0.*

$\Longrightarrow$ analyse de singularité de f_1 et f_2

Les fonctions f_1 et f_2 sont analytiques quand:

- $\rho \neq 1$, i.e. $\lambda \neq 1/\gamma$,
- la fonction $w_1(\rho)$ est analytique, sauf si $\sigma_0 = \sigma_1$,
- $1 + e^{\frac{\lambda}{2}(\sigma_0 - \sigma_1)(1 - w_1(\rho))} \neq 0$ for f_1,
- $1 + e^{\frac{\lambda}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - w_1(\rho))} \neq 0$ for f_2.

La fonction $w_1(\rho)$ est analytique tant que

$$\rho\, e^{-\rho} \quad \notin \quad]-\infty, \frac{1}{e}].$$

La file $M/D_d/1$ *(suite)*

Le cas général

Dans le cas général, $\mathbb{E}W(\lambda)$ s'exprime à l'aide des fonctions:

$$w_{d,j}(\rho) = -\frac{1}{\rho} W_0(-\omega^j \rho e^{-\rho}), \qquad \omega = e^{2i\pi/d}.$$

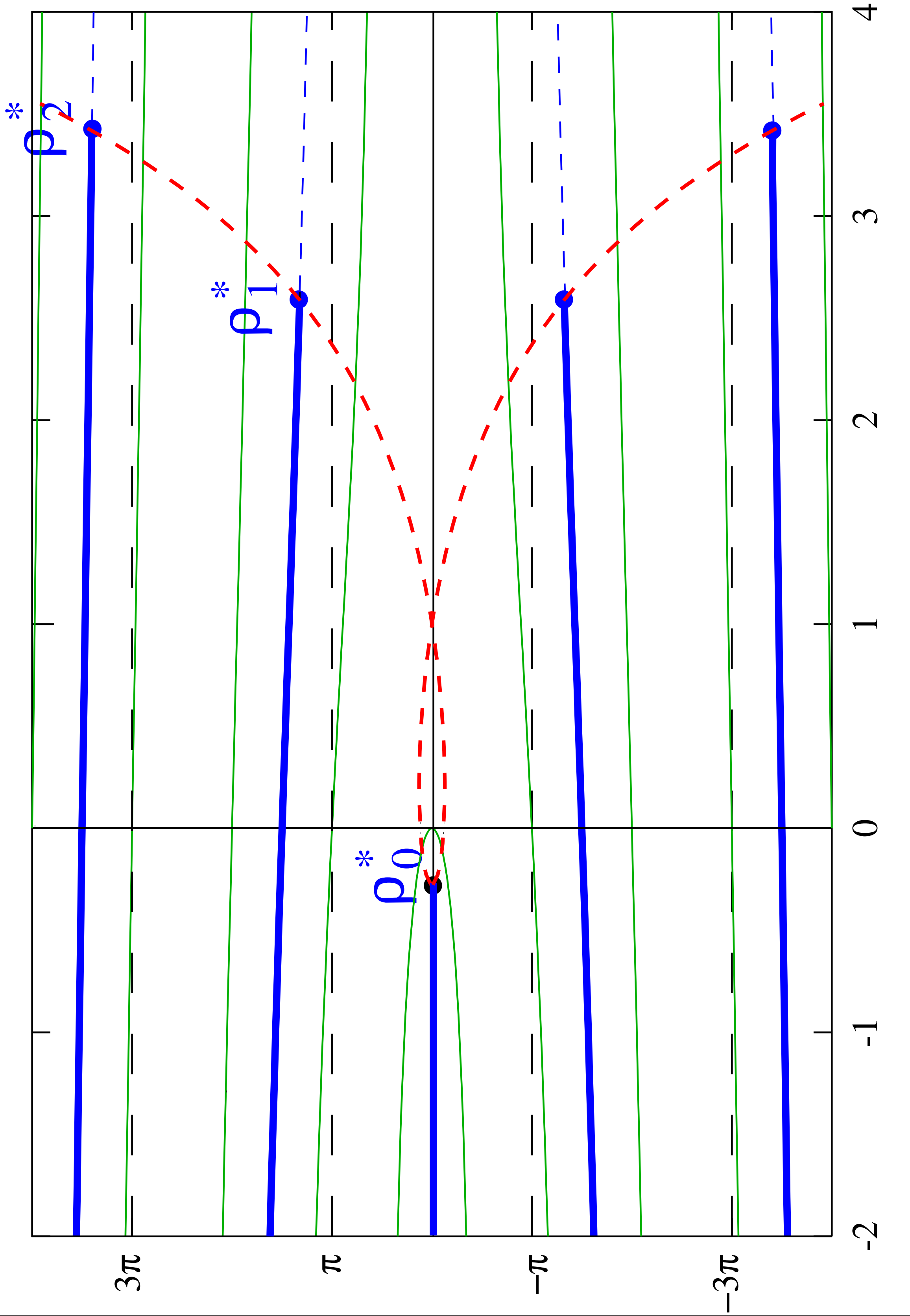
On obtient une *borne supérieure* sur le rayon de convergence: R_d.

$$R_{2n} = W_0(1/e) \qquad R_d = W_0(\omega^{-1/2}/e), \quad d \text{ impair.}$$

d	R_d
pair	0.2784645428
3	0.3001789365
5	0.2859587279
7	0.2822452755
9	0.2807411720
11	0.2799850423
13	0.2795517386
15	0.2792804679

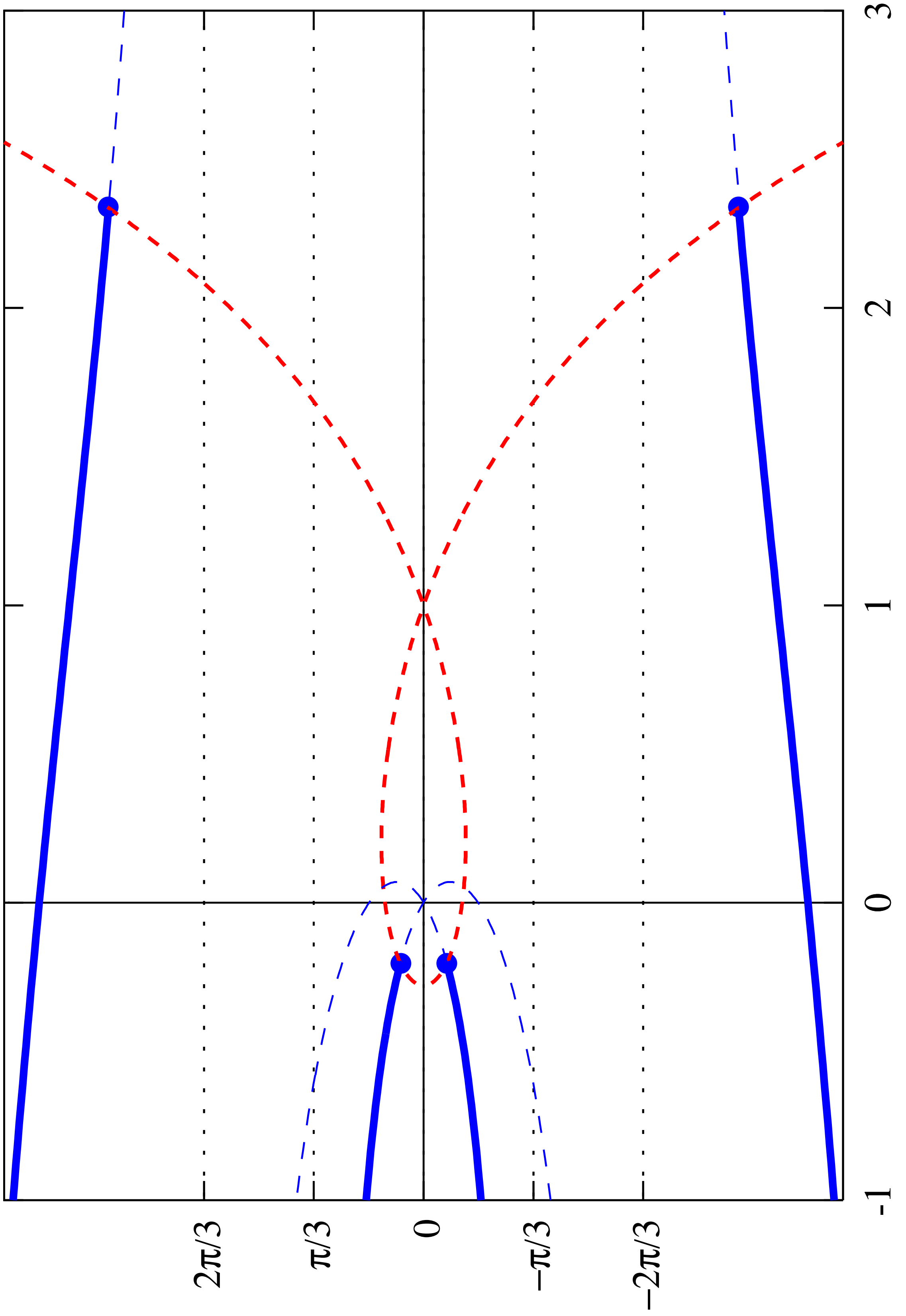
$\Longrightarrow$ ne converge pas quand ρ trop grand.

Constaté expérimentalement par S. Hasenfuss.



Domaine d'analyticité de EW(ρ) pour la M/D/1_2

INRIA



Domaine d'analyticité de EW(ρ) pour la $M/D_3/1$

La file $M/MME/1$

MME = «Markov Modulated Exponential»

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov en temps discret, de matrice de transition:

$$P \;=\; \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} .$$

Soit $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables indépendantes conditionnellement sur $\{X_n\}$ et telles que:

$$\mathbb{P}(S_n \leq x \mid X_n = i) \;=\; 1 \;-\; e^{-\mu_i x} .$$

La suite $\{S_n\}$ n'est (en général) pas i.i.d. Autocorrélation:

$$\mathrm{cov}\{S_0, S_n\} \;=\; (a+b-1)^n \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) \frac{(1-a)(1-b)}{(2-a-b)^2} .$$

La file $M/MME/1$ *(suite)*

On considère la file avec serveur simple,

- arrivées Poisson(λ)
- services $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Facteur de charge:

$$\rho \;=\; \lambda \mathbb{E} S \;=\; \frac{1}{2-a-b}\left(\frac{1-b}{\mu_1}+\frac{1-a}{\mu_2}\right) \;.$$

C'est une $M/GI/1$ quand:

- $\mu_1 = \mu_2$, ou
- $a + b = 1$.

La file $M/MME/1$ *(suite)*

Calcul de $\mathbb{E}W$

Le processus $\{(N(t), X(t)), t \in \mathbb{N}\}$ est un «QBD» [Neuts81]. Après résolution par séries génératrices, on trouve que:

$$\mathbb{E}W(\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}N(\lambda) \;=\; f(\lambda, z_0(\lambda)),$$

où $z_0(\lambda)$ est l'unique racine dans le disque unité de $K(z) = 0$:

$$\begin{aligned} K(z) \;&=\; (1-z)(\lambda z + \mu_1(z-1))(\lambda z + \mu_2(z-1)) \\ &\quad +(\lambda z - \mu_1)(1-b)\mu_2 + (\lambda z - \mu_2)(1-a)\mu_1. \end{aligned}$$

Exemple: dans le cas $a = b = 0$:

$$\mathbb{E}N(\lambda) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1 + z_0(\lambda)}{z_0(\lambda)(1 - z_0(\lambda))} + \frac{3\mu_1\mu_2\rho - \lambda^2}{\mu_1\mu_2(1-\rho)}\right).$$

La file $M/MME/1$ *(suite)*

Développement de Taylor de $\mathbb{E}W(\lambda)$

$\Longrightarrow$ analyse de singularité de $z_0(\lambda)$

Théorème: *les racines d'un polynôme sont analytiques en fonction des coefficients tant que les racines sont distinctes.*

On forme le discriminant de $K(z)$. Exemple, pour $a = b = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) &= \mu_1\mu_2\lambda^2 \\ &= (4\,\lambda^4 + 12(\mu_1+\mu_2)\lambda^3 \\ &\quad + 4\left(3\,\mu_2{}^2 + 3\,\mu_1{}^2 - 5\,\mu_1\,\mu_2\right)\lambda^2 \\ &\quad + 4(\mu_1-\mu_2)^2(\mu_1+\mu_2)\lambda + \mu_1\mu_2(\mu_1-\mu_2)^2)\ .\end{aligned}$$

Et on cherche ses racines dans le cercle unité...

Pour en savoir plus

Light traffic et analyticité

M. Reiman & B. Simon «Open Queueing Systems in Light Traffic», *Maths. OR*, **14** (1), 26–59, 1989.

M. Zazanis «Analyticity of Poisson-Driven Stochastic Systems», *Adv. Appl. Prob.*, **24**, 532–541, 1992.

J.Q. Hu «Analyticity of Single-Server Queues in Light Traffic», *Queueing Systems*, **19**, 63–80, 1995.

F. Baccelli & V. Schmidt «Taylor Series Expansions for Poisson-Driven $(\max, +)$-Linear Systems», *Ann. Appl. Prob.*, **6** (1), 138–185, 1996.

F. Baccelli, S. Hasenfuss & V. Schmidt «Differentiability of Functionals of Poisson Processes via Coupling», Rapport INRIA, à paraître, 1998.

Power Series Algorithm

G. Hooghiemstra, M. Keane et S. van de Ree «Power Series for stationary distributions of coupled processor models», *SIAM J. Appl. Math.*, **48**, 1159–1166, 1988.

J.P.C. Blanc «A Note on Waiting Times in Systems with Queues in Parallel», *J. Appl. Prob.*, **24**, 540–546, 1987.

J.P.C. Blanc «The Power Series Algorithm Applied to the Shortest-Queue Model», *Op. Res.*, **40** (1), 157–167, 1992.

J.P.C. Blanc «Performance Analysis and Optimization with the Power Series Algorithm», *Performance Evaluation of Computer and Comunication Systems*, L. Donatiello and R. Nelson (eds.), LNCS 729, Springer Verlag, 1993.

G. Koole «On the Power Series Algorithm», *in: Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems – Solution Methods*, CWI Tracts # 105, 139–155, 1994.

La file $M/D_d/1$

A. Jean-Marie «The Waiting Time Distribution in Poisson-Driven Deterministic Systems», RR INRIA 3083, Janvier 1997.

La file $M/MME/1$

Neuts *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, John Hopkins University Press, 1981.