Modèles de trafic modulés par chaînes de Markov

Alain Jean-Marie
LIRMM, University of Montpellier
161 Rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 5, France
ajm@lirmm.fr

Séminaire Réseaux de Grenoble
17 janvier 2002

Plan de l'exposé

Introduction

Les processus de Markov modulés sont des processus d'arrivée d'une certaine quantité:

$N(t)$	$\in \mathbb{N}$	quantité de clients dans une file d'attente
$N(t)$	$\in \mathbb{R}$	quantité d'information (bits, octets) arrivés à un élément de réseau
$N(t)$	$\in \mathbb{R}$	quantité de «temps» écoulée (vidéo, temps-réel, biologie,...)

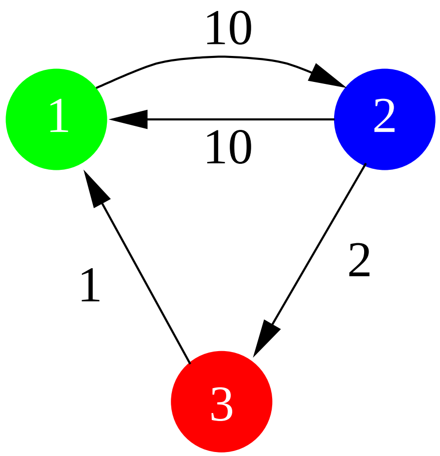
Ils constituent une famille de modèles pour lesquels on arrive à

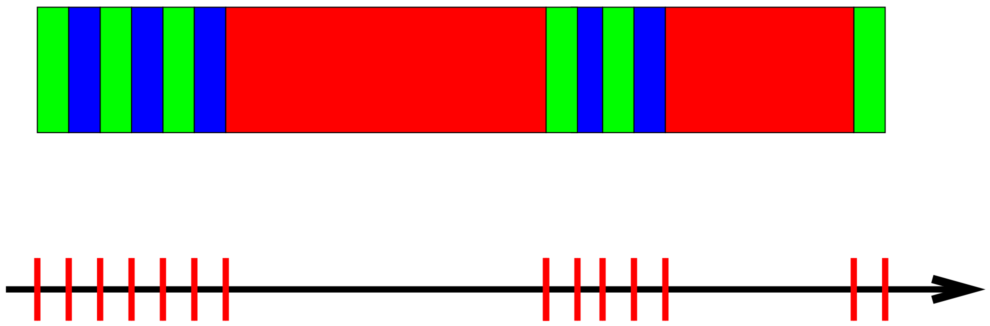
- modéliser des processus complexes (rafales, dépendances dans le temps),
- maîtriser le nombre de sources,
- faire du calcul stochastique: distributions, files d'attente, asymptotiques...

MAP: Markov Arrival Process

Soit $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ une chaîne de Markov en temps continu dans un espace fini.

$\{N(t); t \in \mathbb{R}\}$ compte le nombre de sauts de X dans $[0, t[$.





BMAP: Batch Markov Arrival Process

Aussi nommé « N-process » (N comme Neuts), processus « versatile » modulé par Markov.

$\{(X(t), N(t)); t \in \mathbb{R}\}$ est un chaîne de Markov en temps continu dans $\mathcal{E} \times \mathbb{N}$ dont le générateur a la structure:

$$Q = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & \dots & \\ & D_0 & D_1 & D_2 & \\ & & D_0 & D_1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On peut avoir

- des changements de phase $i \to j$ sans arrivée, avec taux $(D_0)_{i,j}$
- l'arrivées d'un groupe (batch) de taille k sans changement de la phase i, avec taux $(D_k)_{i,i}$
- changement de phase et arrivée d'un groupe de taille k, avec taux $(D_k)_{i,j}$.

MMPP: Markov Modulated Poisson Process

Soit $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ une chaîne de Markov en temps continu sur un espace fini $\mathcal{E}$.

Soient $\lambda_i \geq 0$ des taux d'arrivée, pour chaque $i \in \mathcal{E}$.

On suppose que les arrivées ont lieu selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda_{X(t)}$, c'est-à-dire d'intensité λ_i dans les intervalles où $X(t) = i$.

C'est un cas particulier de processus BMAP, pour lequel

- les arrivées se font un par un: $D_k = 0$, $k \geq 2$;
- les changements de phase ne provoquent pas d'arrivée

$$D_1 \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \;.$$

Cas particulier, le processus IPP (Interrupted Poisson Process): $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda$.

Et le processus de Poisson non interrompu:

$$\lambda_i \;=\; \lambda, \qquad \forall i \in \mathcal{E} \;.$$

MMRP: Markov Modulated Rate Process

Soit $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ une chaîne de Markov en temps continu sur un espace fini $\mathcal{E}$.

Soient r_i (≥ 0 en général) des taux d'arrivée (accumulation, déplétion), pour chaque $i \in \mathcal{E}$.

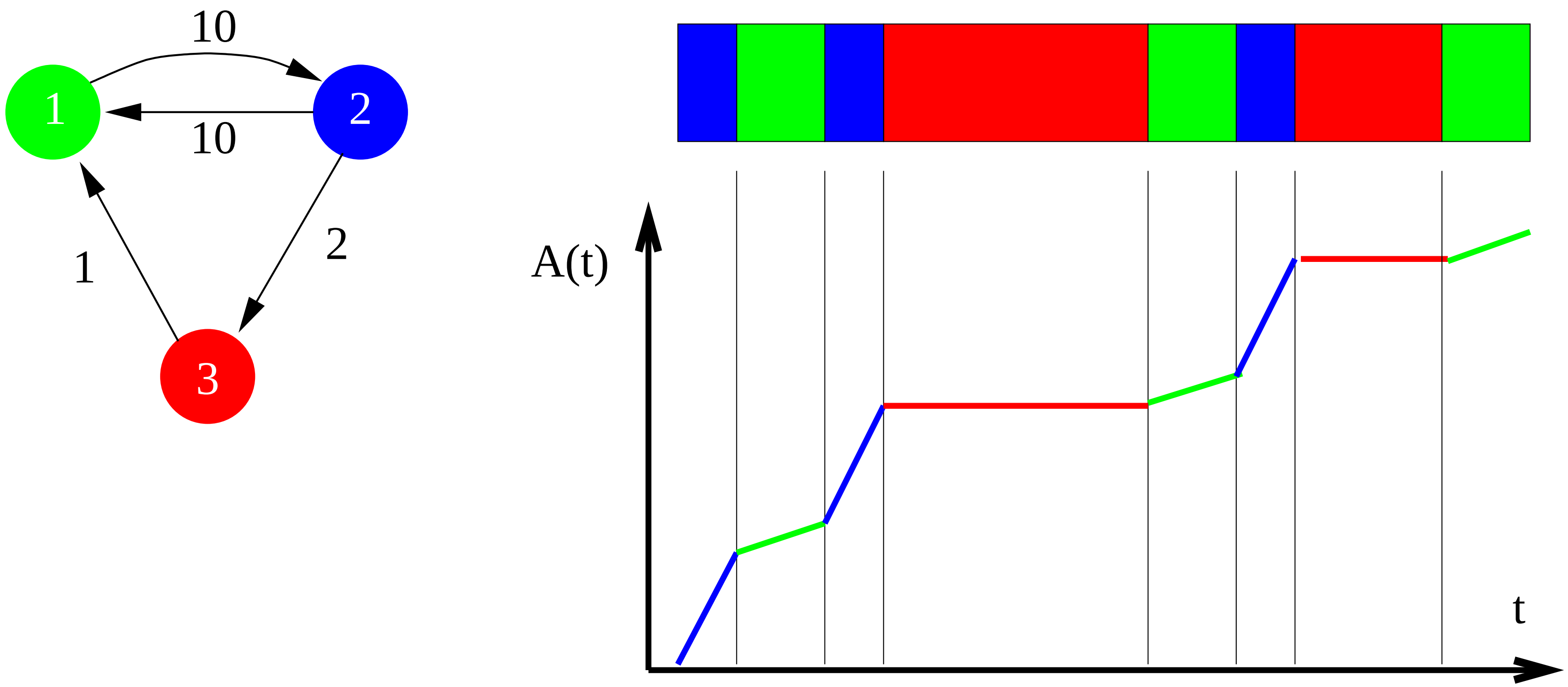
On suppose que les arrivées ont lieu selon un processus fluide de débit $r_{X(t)}$, c'est-à-dire d'intensité r_i dans les intervalles où $X(t) = i$.

Soit $N(t)$ la quantité de fluide arrivé à la date t:

$$\frac{dN}{dt}(t) \;=\; r_{X(t)}\;.$$

Note: anciennement nommé « Markov drift process ».

Exemple. $\mathcal{E}$ a trois états, $r_3 = 0$, $0 < r_1 < r_2$:

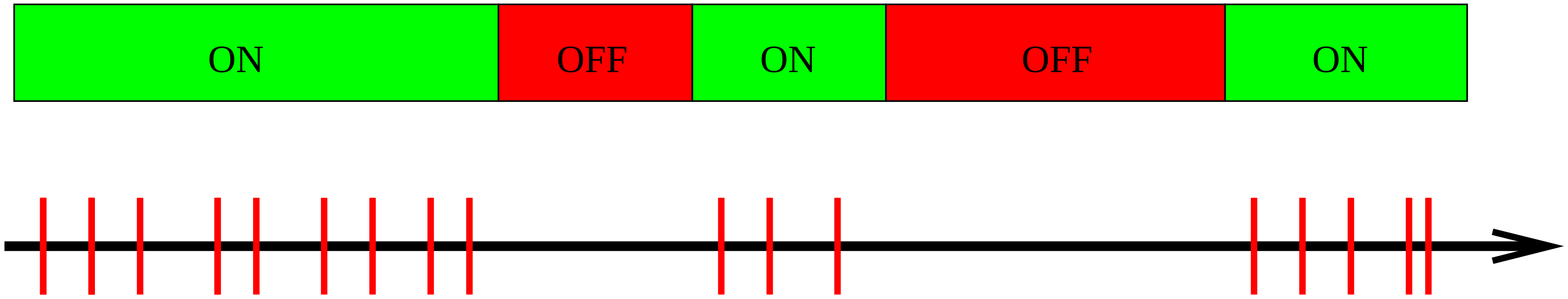


Sources On/Off

Processus On/Off:

- alternance de périodes On et Off, de durées IID (deux distributions)
- pendant les périodes On, un processus fluides (débit constant) ou discrets (Poisson ou périodique).

$\rightarrow$ bon modèle de télécommunication voix/vidéo numériques, ainsi que sources TCP, etc.



$\rightarrow$ processus de renouvellement alterné.

MMPP, BMAP, etc ont tous des durées exponentielles. On/Off peut avoir des durées non-exponentielles (en particulier, queues lourdes!).

Semi-Markov Accumulation Process

Un processus unifiant MMPP et MMRP. Voir aussi les sources «Markov Regenerative» [Kulkarni96].

Soit:

- $\{S_i(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d., $i \in \mathcal{E}$;
- $\{Z(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une CM en temps discret à états dans $\mathcal{E}$;
- $\{x_i(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un processus stationaire à incréments indépendents, for each $i \in \mathcal{E}$.

On définit d'abord un processus semi-Markovien $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, jointement à une suite de dates de sauts $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{rcll} T_{n+1} & = & T_n \; + \; S_{Z(n)}(n) & \\ X(t) & = & Z(n+1) & T_n \leq t < T_{n+1} \\ X(t) & = & Z(0) & 0 \leq t < T_0 \; , \end{array}$$

$T_0 \geq 0$ v.a. donnée.

Le processus $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est construit comme:

$$\begin{array}{rcll} N(t) & = & N(T_n) + (x_{Z(n+1)}(t) - x_{Z(n+1)}(T_n)) & T_n \leq t < T_{n+1} \\ N(t) & = & x_{Z(0)}(t) - x_{Z(0)}(T_n) & 0 \leq t < T_0 \; . \end{array}$$

avec $N(0) = 0$.

Comme les processus

- fluides à débit constant $x(t) = rt$,
- de Poisson $x(t) = N_\lambda(0, t)$

sont à incréments indépendants, on a les MMPP et MMRP.

On a aussi les combinaisons des deux.

Le processus de Wiener est à incréments indépendants: utilité possible pour des sources « bruitées », ou pour un grand nombre de sources?

Propriétés et analyse

Les propriétés communes les plus utiles sont:

- Les processus sont « Markov renouvellement » (semi-Markoviens).
- Ils se décrivent par des matrices. Par exemple pour MMPP/MMRP
  - Le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov sous-jacente, $\mathbf{Q}$,
  - La matrice des taux d'arrivée (rate matrix) $\mathbf{\Lambda}$.
- Leur superposition mène à un calcul matriciel simple.

Processus d'accumulation semi-Markovien

On peut calculer la transformée de Laplace de la quantité arrivée en T unités de temps:

$$K_{i,j}(\mu,\nu) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\mu T} \int_0^\infty e^{-\nu q}\, \mathrm{d}\mathbb{P}_i\{N(T) \le q, X(T) = j\}\, \mathrm{d}T \ .$$

and the matrices:

$$\mathsf{K} \quad = \quad ((K_{i,j}(\mu,\nu)))_{(i,j)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}}$$

$$\mathsf{L} \ = \ \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\mu+\phi_i(\nu)}\right)_{i\in\mathcal{E}} \qquad \mathsf{S} \ = \ \mathrm{diag}\left(S_i^*(\mu+\phi_i(\nu))\right)_{i\in\mathcal{E}} \ .$$

Alors,

$$\mathsf{K} \ = \ \mathsf{L}\ (\mathsf{I}-\mathsf{S}) \ + \ \mathsf{SPK} \ .$$

Chaînes incluses – MMPP

Soit $\{Y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov incluse aux instants d'arrivée. Sa matrice de transition est

$$\mathsf{P} \;=\; (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{\Lambda}\ .$$

Soit

$$F_{i,j}(x) = \mathbb{P}\{Y(n) = j, \tau_k \leq x \,|\, Y(n-1) = i\}$$

la proba de transition de $\{Y(n)\}$ jointement avec les temps inter-arrivées:

$$\mathsf{F}(x) \;:=\; (F_{i,j}(x))_{i,j} \;=\; \left(\mathsf{I} - e^{(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda})x}\right)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{\Lambda}\ .$$

Débits moyens

Pour un MMPP/MMRP, avec π la proba stationnaire de X,

$$\boxed{\overline{\lambda} \;=\; \boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{1} \;=\; \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi_i\,\lambda_i\;.}$$

Pour un processus On/Off avec *débit crête* r:

$$\boxed{\overline{\lambda} \;=\; r\,\frac{\overline{ON}}{\overline{ON}+\overline{OFF}}\;.}$$

Autocorrelations

Toujours pour un MMPP: soit $R = (\mathbf{\Lambda} - Q)^{-1}$.

Autocovariance aux moments de sauts:

$$\begin{aligned} h(k) &= \mathsf{Cov}(X(n)\ X(n+k)) \ = \ \mathbb{E}[X(n)\ X(n+k)] \ - \ \mathbb{E}X(n)\ \mathbb{E}X(n+k) \\ &= R^2\ \mathbf{\Lambda}\ \ (R\mathbf{\Lambda})^k\ \ (I - R\mathbf{\Lambda})\ \mathbb{R}^2\ \mathbf{\Lambda}\ . \end{aligned}$$

Donc forcément,

$$\exists\ \ 0 < \rho < 1, \qquad h(k) \ = \ O(\rho^k)\ .$$

Mémoire

Autocorrelation totale d'un processus:

$$\text{temps continu} \qquad \int_0^\infty |h(s)| \, \mathrm{d}s \qquad \text{temps discret} \qquad \sum_{n=0}^\infty |h(n)| \; .$$

Un processus a une *mémoire courte* if

$$\int_0^\infty |h(s)| \, \mathrm{d}s \; < \; \infty.$$

Sinon, il a une *mémoire longue*.

Mémoire longue $\Rightarrow$ une $\boxed{\text{décroissance lente}}$ de la dépendance entre $X(t+s)$ et $X(t)$.

Les processus MMPP/MMRP sont à mémoire courte... mais on peut la rendre plutôt longue!

Les processus On/Off avec des distributions à queue lourde ont une mémoire longue.

Superposition de sources

Si on superpose plusieurs sources Markov-modulées, le processus résultant est toujours Markov-modulé.

Les matrices (générateur et taux) s'obtiennent comme des *sommes de Kronecker*.

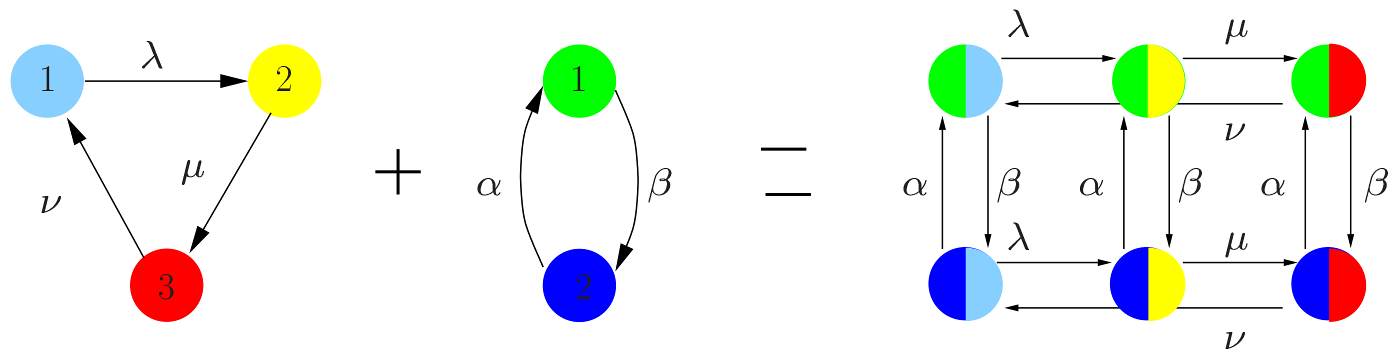
Produit de Kronecker de deux matrices A $(n \times n)$ et B $(m \times m)$: une matrice $nm \times nm$ avec

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}B & \dots & A_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Somme de Kronecker:

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= A \otimes I(m) + I(n) \otimes B \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}B & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11}I & \dots & B_{1m}I \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1}I & \dots & B_{nn}I \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemple: pour deux chaînes de Markov $\{X_1(t)\}$ et $\{X_2(t)\}$, on a:



$$
\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ \nu & 0 & -\nu \end{pmatrix}
\oplus
\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
- & \lambda & 0 & \alpha & 0 & 0 \\
0 & - & \mu & 0 & \alpha & 0 \\
\nu & 0 & - & 0 & 0 & \alpha \\
\hline
\beta & 0 & 0 & - & \lambda & 0 \\
0 & \beta & 0 & 0 & - & \mu \\
0 & 0 & \beta & \nu & 0 & -
\end{array}\right)
$$

Modèles de files d'attente

Files discrètes: arrivées Markov-modulées

- services exponentiels/Erlang $\rightarrow$ méthode des phases,
- services généraux IID: méthode de la chaîne incluse.

Files fluides:

- équations aux dérivées partielles (Chapman-Kolmogoroff), Dans les deux cas, les résultats obtenus sont:

- Calcul par des formules matricielles, séries génératrices, transformées de Laplace.

- Décomposition spectrale des probabilités stationnaires et transitoires:

$$\mathbb{P}\{W \leq x; X = i\} \ = \ \sum_p a_{i,p} \, e^{-z_i x} \ .$$

  $\rightarrow$ asymptotiques, ou bornes

$$\mathbb{P}\{W \leq x; X = i\} \ \sim \ a_{i,1} \, e^{-z_i x} \ , \qquad x \rightarrow \infty \ .$$

- calcul de «bande passante équivalente».

Files d'attente: la Dynamique

Pour un processus d'arrivée discret, on a le fonctionnement habituel, avec variantes:

- distribution de durée de service dépendant de la phase à son départ,
- vitesse de service modulée par phase (services de distribution exponentielle.

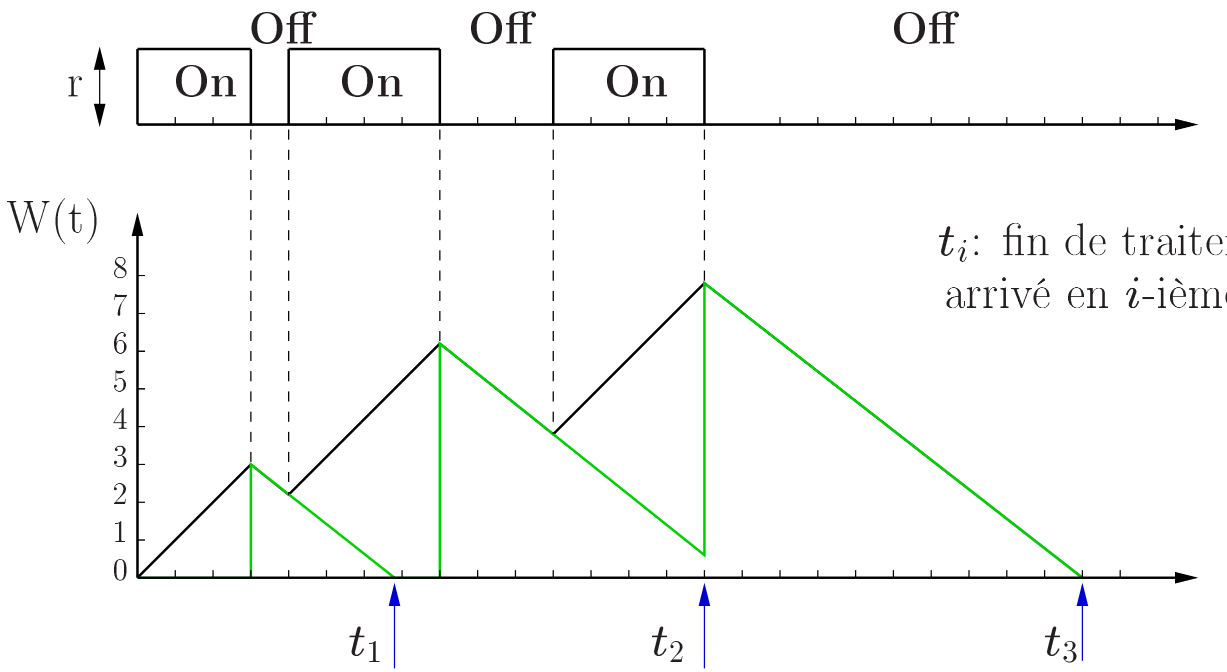
Pour une file fluide, le serveur a une *vitesse* de C unités par seconde. La dynamique de la quantité de travail $W(t)$ est:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= r_{X(t)} - C && \text{si } W(t) > 0 \\ &= \left[r_{X(t)} - C\right]^+ && \text{si } W(t) = 0. \end{aligned}$$

Files fluides ↔ files discrètes

On constate que les formules pour MMPP et MMRP sont similaires.

Relation entre quantités de travail fluide ↔ discret.



t_i: fin de traitement du travail arrivé en i-ième période ≪On≫

Ainsi, si le processus fluide est On/Off avec durées $\{A_n\}$, $\{I_n\}$,

$$\begin{aligned} W_n &= [W_{n-1} + r\, A_n - C\, (A_n + I_n)] \\ &= [W_{n-1} + (r - C)\, A_n - C\, I_n)]\ . \end{aligned}$$

C'est la quantité de travail dans une file $GI/GI/1$ avec

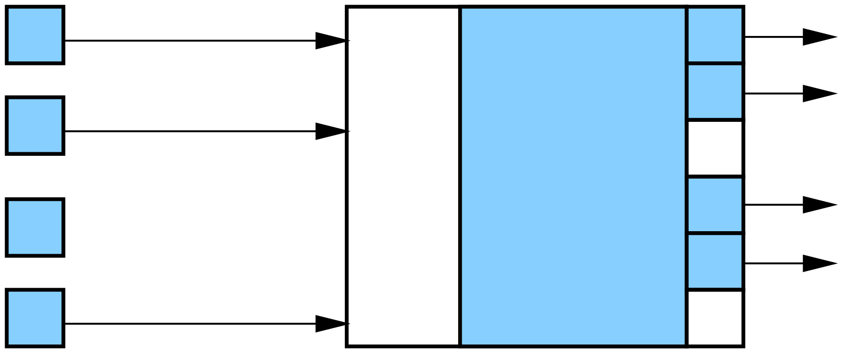
- inter-arrivées $\{CI_n\}$
- services $\{(r - C)A_n\}$.

$\rightarrow$ analyse connue...

Le modèle de Mitra

Un modèle fluide producteur-consommateur couplés par un réservoir de capacité finie.

Kosten (1982), Anick-Mitra-Sohdhy (1982), Stern-Elwalid-Mitra (198x).



Modèle sources-réservoir-consommateurs de Mitra

Caractéristiques:

- m sources, activité on/off exponentielles débit crête r,
- n consommateurs, activité on/off exponentielles capacité c,
- capacité X.

Le générateur d'une source est

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Le processus d'arrivée est un MMRP avec matrices:

$$
Q_m = \begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & & & \\ \mu & -(m-1)\lambda-\mu & (m-1)\lambda & & \\ & 2\mu & -(m-2)\lambda-\mu & (m-2)\lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}
$$

et

$$
\mathbf{\Lambda}_m = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & mr \end{pmatrix}
$$

La consommation suit un processus similaire, avec paramètres (ν, τ) et $c \to Q_c$, $\mathbf{\Lambda}_c$.

Noter que $M(t)$ est la superposition de m sources on/off, mais le générateur a été *agrégé* et est de taille $m+1$ et non 2^m. Idem pour $C(t)$.

Le processus $(M(t), C(t))$ des nombres de machines et consommateurs actifs à t, est la superposition de deux CM indépendantes. C'est une CM de générateur:

$$Q \;=\; Q_1 \;\oplus\; Q_2 \;=\; Q_1 \;\otimes\; I(n+1) \;+\; I(m+1) \;\otimes\; Q_2 \;,$$

et chaque état (i,j) correspond à une *dérive* du réservoir $ir - jc$, d'où la matrice des taux:

$$\mathbf{\Lambda} \;=\; \mathbf{\Lambda}_1 \;\oplus\; \mathbf{\Lambda}_2 \;=\; \mathrm{diag}(ir - jc) \;.$$

Soit $Q(t)$ la quantité stockée dans le réservoir. Calculons:

$$p(i,j;t,x) \;=\; \mathbb{P}\{i \text{ sources, } j \text{ consommateurs, } Q(t) \leq x\ \}\ .$$

Entre t et $t + \delta t$,

$$Q(t+\delta t) \quad = \quad Q(t) \;+\; (ir - jc)\;\delta t \quad \text{avec proba } 1 + Q_{i,j}\delta t + o(\delta t)$$

etc.

Après passage à la limite et mise sous forme matricielle:

$$\boxed{\;\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{P}(x,t) \;+\; \frac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}(x,t)\mathbf{\Lambda} \quad = \quad \mathsf{P}(x,t)Q\ .\;}$$

En régime stationnaire,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{P}(x)\mathbf{\Lambda} \;=\; \mathsf{P}(x)Q\;.}$$

Il est bien connu que ce genre de système différentiel linéaire admet comme solutions élémentaires les fonctions

$$\mathsf{P}(x) \;=\; \boldsymbol{\phi}\, e^{zx}\;,$$

où $(z, \boldsymbol{\phi})$ sont solution du *problème spectral* associé:

$$z\,\boldsymbol{\phi}\,\mathbf{\Lambda} \;=\; \boldsymbol{\phi}\,Q\;.$$

Dans ce cas précis, les solutions sont connues sous forme explicite, et on calcule la *décomposition spectrale* de $\mathsf{P}(x)$:

$$\mathsf{P}(x) \;=\; \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \, e^{z_i x} \;.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\phi}_i$ se décomposent: $\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_{i,1} \otimes \boldsymbol{\phi}_{i,2}$.

Les scalaires α_i sont obtenus grâce aux conditions aux bord:

$$\begin{array}{rcll} p(i,j;x) & = & 0 & \text{si } ri > cj \\ p(i,j;X) & = & \mathbb{P}\{M=i\}\mathbb{P}\{C=j\} & \text{si } ri < cj \end{array}$$

et si $X = +\infty$, $\alpha_i = 0$ si $\Re(z_i) > 0$.

La file MMPP/GI/1

En considérant le processus inclus au moment des fins de service, on généralise l'analyse de la file $M/GI/1$ (Neuts).

Il s'agit de trouver les probas stationnaires d'une matrice de la forme:

$$Q(x) \;=\; \begin{pmatrix} B_0(x) & B_1(x) & \dots & \\ A_0(x) & A_1(x) & A_2(x) & \dots \\ 0 & A_0(x) & A_1(x) & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Les $A_i(x)$ s'expriment en fonction de la distribution $H(\cdot)$ du temps de service.

MMPP/GI/1 – Workload

Soit

$$W(i;x) \;=\; \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{W(t) \le x, X(t) = i\}$$

la distribution stationnaire jointe de l'état de $\{X(t),\, t \ge 0\}$ et de la quantité de travail en attente. La transformée de Laplace vérifie l'équation vectorielle:

$$\boxed{\mathsf{W}^*(s) \;=\; s(1-\rho)\,\mathbf{g}\,[s\mathsf{I} + \mathbf{Q} - (1 - H^*(s))\mathbf{\Lambda}]^{-1}\ ,}$$

où

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}\mathbf{G}$$

et

$$\mathbf{G} \;=\; \int_0^\infty \exp\left((\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{G})x\right) \mathrm{d}H(x)\ .$$

Mais on peut également appliquer la *méthode du noyau*!

Diagonalisons la matrice

$$\mathsf{A}(s) \;=\; s\mathsf{I} \;+\; \mathsf{Q} \;-\; (1 - H^*(s))\mathbf{\Lambda}$$

Il existe $\mathbf{\Omega}(s) = \mathrm{diag}(\omega_k(s))$, $\mathsf{R}(s)$ et $\mathsf{S}(s)$ inversibles tq $\mathsf{R}(s)\mathsf{S}(s) = \mathsf{I}$ et

$$\mathsf{A}(s) \;=\; \mathsf{R}(s)\,\mathbf{\Omega}(s)\,\mathsf{S}(s).$$

On obtient le *développement spectral*:

$$\mathsf{W}^*(s) \;=\; s(1-\rho)\;\mathsf{g}\;\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\omega_k(s)} \mathsf{R}_k(s)\;\mathsf{S}_k(s).$$

Faisons l'analyse de singularités dans

$$\mathsf{W}^*(s) \;=\; s(1-\rho)\;\mathbf{g}\;\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\omega_k(s)} \mathsf{R}_k(s)\;\mathsf{S}_k(s).$$

qui est défini pour tout $s > 0$.

Pour chaque $k > 0$, il se trouve qu'il existe $s_k > 0$ tq $\omega_k(s_k) = 0$.

Alors nécessairement, $\mathbf{g}\mathsf{R}_k(s_k)\mathsf{S}_k(s_k) = \mathbf{0}$ d'où:

$$\forall k > 1, \qquad \mathbf{g}\;\mathsf{R}_k(s_k) \;=\; 0\;.$$

Comme de plus $\mathbf{g1} = 1$, on obtient $\mathbf{g}$ comme solution de

$$\boxed{\;\mathbf{g}\;\boldsymbol{\Xi} \;\;=\;\; (1,\;0,\;\ldots\;,0\;)\;.\;}$$

Applications

Modèles de transmission vidéo: Biersack, Jean-Marie et Nain (en cours!).

On considère une transmission de vidéo à débit constant (CBR) sur un lien de capacité *variable* modélisée par un processus On/Off (pour commencer).

On veut transmettre un bloc en T unités de temps.

- à quel débit envoyer pour une proba de retard donnée ϵ?
- à quelle vitesse pré-envoyer étant donné le comportement de l'utilisateur (avance rapide, retour, pause...).

Le processus du débit disponible alterne entre deux valeurs $r_1 < r_2$.

Soit $C_T(d)$ la quantité transmise à la date T avec un débit d, $r_1 < d < r_2$.

On se ramène à un processus On/Off avec débit crête $= 1$:

$$C_T(d) \; = \; r_1 \, T \; + \; (d - r_1) \; N(T) \; .$$

Calcul des transformées de Laplace

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\theta x} \int_0^\infty e^{-sT}\ \mathbb{P}\{N(T) > x\}\ \mathrm{d}T\ \mathrm{d}x \\ &\quad = \quad \frac{1}{m_1+m_2} \left\{ \frac{m_2}{s(s+\theta)} + \frac{\theta(1-G_1^*(s))(1-G_2^*(s+\theta))}{s^2(s+\theta)^2(1-G_1^*(s)G_2^*(s+\theta))} \right\}\ .\end{aligned}}$$

m_1, m_2: moyennes des périodes On et Off.

S'obtient aussi par l'utilisation de processus de renouvellement alternés (Cox & Miller).

Peut s'obtenir également avec le calcul matriciel des MMRP, qui se généralise au cas de plusieurs états du canal.

$\rightarrow$ calcul de moments,

$$\mathsf{Var}(C_T) \;=\; T^2\,\frac{m_1^2 v_2 + m_2^2 v_1}{(m_1+m_2)^3} \;+\; O(T)\;.$$

$\rightarrow$ calcul de débits équivalents: pour $q \in [0,1)$ donné, trouver γ tel que

$$\mathbb{P}\{C(d) \geq \gamma T\} \;\geq\; q\;.$$

Bibliographie

Modèles fluides

D. Anick, D. Mitra, and M.M. Sondhi. Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources. *Bell Sys. Tech. J.*, 61:1871–1894, October 1982.

D. Mitra. Stochastic theory of a fluid models of producers and consumers coupled by a buffer. *Adv. Appl. Prob.*, 20:646–676, 1988.

T.E. Stern and A.I. Elwalid. Analysis of separable Markov-modulated rate models for information-handling systems. *Adv. Appl. Prob.*, 23:105–139, 1991.

A.I. Elwalid, D. Mitra, and T.E. Stern. Statistical multiplexing of Markov modulated sources:theory and computational algorihms. In A. Jensen and V.B. Iversen, editors, *Proc. 13th International Teletraffic Congress*, pages 495–500, Copenhagen, 1991. Elsevier Science.

A.I. Elwalid, D. Mitra, and T.E. Stern. A theory of statistical multiplexing of Markov modulated sources: Spectral expansions and algorihms. In W.J. Stewart, editor, *Numerical solution of Markov Chains*, 1991.

A.I. Elwalid and D. Mitra. Statistical multiplexing with loss priorities in rate-based congestion control of high speed networks. *IEEE Trans. Comm.*, 42(11):2989–3002, November 1994.

A.I. Elwalid and D. Mitra. Markovian arrival and service communication systems: Spectral expansions, separability and Kronecker-product forms. In W.J. Stewart, editor, *Computations in the Markov Chains*, pages 507–546. Kluwer, 1995.

MMPP, MAP, BMAP...

M.F. Neuts. The fundamental period of a queue with Markov-modulated arrivals. In *Probability, Statistics and Mathematics: papers in honour of Samuel Karlin*. Academic Press, NY, 1989.

W. Fischer and K. Meier-Hellstern. The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook. *Performance Evaluation*, 18:149–171, 1992.

D.M. Lucantoni, G.L. Choudhury, and W. Whitt. The transient $BMAP/G/1$ queue. *Commun.*

Statist.-Stochastic Models, 10(1):145–182, 1994.

A. Jean-Marie, Z. Liu, P. Nain and D. Towsley, "Computational Aspects of the Workload Distribution in the MMPP/GI/1 Queue". *JSAC*, 1999.

Asymptotiques, bornes et bande passante équivalente

W. Whitt. Tail probabilities with statistical multiplexing and effective bandwidth. *Telecommun. Syst.*, 3:71–107.

D. Artiges and P. Nain. Upper and lower bounds for the multiplexing of multiclass Markovian on/off sources. *Performance Evaluation*, **27&28**, pp. 673–698, 1996.

V.G. Kulkarni. Effective bandwidth for Markov regenerative sources. *Queueing Systems*, **24**, pp. 137–153, 1996.

Z. Liu, P. Nain, and D. Towsley. Exponential bounds with applications to call admission. *JACM*, 44 (2):366–394, 1997.