

# A propos d'un problème de Gilles Dowek, exposé à Dagstuhl en janvier 2003.<sup>1</sup>

PAR LOÏC POTTIER

## 1 Première version.

Ce qui suit s'inspire de la preuve donnée par Gilles.

Soit  $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)) | t \in [0; +\infty[)\}$  une courbe de classe  $C^1$ , donnée par ses équations polaires:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

La vitesse d'un point est donnée par

$$(1) \begin{cases} x' = \rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta = v \cos \phi \\ y' = \rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta = v \sin \phi \end{cases}.$$

**Théorème 1.** *On suppose  $v$  constant, et  $|\phi'|$  bornée par  $c$ .*

Alors  $\frac{1}{v} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall t \in [0; \frac{2}{c}]$ ,  $\rho \geq \frac{2v}{c} \sin(\frac{c}{2v} t)$

**Démonstration.** En combinant les équations (1), on obtient (2)  $\begin{cases} \rho' = v \cos(\phi - \theta) \\ \rho \theta' = v \sin(\phi - \theta) \end{cases}$ ,

En dérivant la seconde équation, on obtient

$$\rho' \theta' + \rho \theta'' = v (\phi' - \theta') \cos(\phi - \theta) = (\phi' - \theta') \rho', \text{ d'où}$$

$$(3) \rho' \phi' = 2 \rho' \theta' + \rho \theta''.$$

$$|\phi'| \leq c \Rightarrow |2 \theta' \rho' + \rho^2 \theta''| \leq c |\rho' \rho|$$

$$\Rightarrow |(\rho^2 \theta')'| \leq \frac{c}{2} |(\rho^2)'| \Rightarrow -\frac{c}{2} |(\rho^2)'| \leq (\rho^2 \theta')' \leq \frac{c}{2} |(\rho^2)'|$$

Fixons  $\rho(0) = 0$ . Comme (2)  $\Rightarrow \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = v^2$ , on peut fixer  $\rho'(0) = v$ . Soit  $t_1$  maximal tel que  $\rho' > 0$  sur  $]0; t_1[$  ( $t_1$  est éventuellement infini). Remarquons que  $\rho \geq 0$  sur  $[0; t_1]$ .

Sur  $[0; t_1[$ , on a  $-\frac{c}{2} |(\rho^2)'| \leq (\rho^2 \theta')' \leq \frac{c}{2} |(\rho^2)'|$ . En intégrant, on obtient

$$-\frac{c}{2} \rho^2 \leq \rho^2 \theta' \leq \frac{c}{2} \rho^2, \text{ et donc } |\rho \theta'| \leq \frac{c}{2} |\rho| \text{ sur } [0; t_1[.$$

Or  $\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = v^2$ , donc  $v^2 - \frac{c^2}{4} \rho^2 \leq \rho'^2$ .

Ainsi  $\boxed{\rho'^2 + \frac{c^2}{4} \rho^2 \geq v^2}$  sur  $[0; t_1[$ .

Nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant:

**Lemme 2.** *Soit  $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , tel que sur l'intervalle  $[0; \alpha[$ ,  $f'^2 + f^2 \geq 1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $|f| < 1$ ,  $f' \geq 0$*

*Alors  $\forall t \in [0; \alpha]$ ,  $f(t) \geq \sin t$ .*

**Démonstration.**  $f'^2 + f^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{f'^2}{1-f^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \geq 1$

En intégrant entre 0 et  $t \in [0; \alpha]$ , on obtient  $\text{Arcsin}(f) \geq t$ ,

d'où  $f \geq \sin t$ ,  $\sin x$  étant croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ . □

Comme  $|\rho'| \leq v$ , on a  $\forall t \in [0; \frac{2}{c}[$ ,  $|\rho| < \frac{2v}{c}$ . Si  $t_1 \neq +\infty$ , alors  $\rho'(t_1) = 0$ , et comme  $\rho'^2 + \frac{c^2}{4} \rho^2 \geq v^2$ , alors  $\rho(t_1) \geq \frac{2v}{c}$ . Donc dans ce cas,  $t_1 \geq \frac{2}{c}$ .

Si  $\frac{1}{v} \leq \frac{\pi}{2}$ , on peut alors appliquer le lemme avec  $\alpha = \frac{1}{v}$ ,  $f(t) = \frac{c}{2v} \rho(\frac{2v}{c} t)$ , ce qui donne  $\forall t \in [0; \frac{1}{v}]$ ,  $\frac{c}{2v} \rho(\frac{2v}{c} t) \geq \sin(t)$ , et donc  $\forall t \in [0; \frac{2}{c}]$ ,  $\rho \geq \frac{2v}{c} \sin(\frac{c}{2v} t)$ . □

1. Ce document a été rédigé avec  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{M}}\text{A}_{\text{C}}\text{S}$  de Joris van der Hoeven. Ce qui est cool, c'est qu'on peut taper en réfléchissant, presque comme sur un papier, chose dont je suis incapable avec  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  sous emacs.

**Corollaire 3.** *Supposons  $v = c = 1$ . Alors  $\forall t \in [0; 2], \rho \geq 2 \sin(\frac{t}{2})$*

La trajectoire  $\rho = 2 \sin(\frac{t}{2})$ , si on prend une vitesse verticale en  $t = 0$ , correspond à un cercle de rayon 1, centré en  $(-1, 0)$ .

## 2 La bonne équation différentielle.

Prenons  $v = 1, c = 1$ . De la première équation de (2) on déduit

$$\rho'' = -(\phi' - \theta') \sin(\phi - \theta) = -(\phi' - \theta') \rho \theta'$$

$$\Rightarrow \phi' \rho \theta' = \rho \theta'^2 - \rho''$$

De  $|\phi'| \leq 1$ , on déduit donc  $|\rho \theta'^2 - \rho''| \leq |\rho \theta'|$ , puis  $|\rho^2 \theta'^2 - \rho \rho''| \leq |\rho| |\rho \theta'|$ , et enfin

$$\left(\rho^2 \theta'^2 - \rho \rho''\right)^2 \leq \rho^2 \rho^2 \theta'^2$$

Or, avec (2), on a  $\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = 1$ . Donc

$$(1 - \rho'^2 - \rho \rho'')^2 \leq \rho^2 (1 - \rho'^2)$$

En développant:

$$(\rho'^2)^2 + (\rho^2 + 2\rho\rho'' - 2)\rho'^2 + ((\rho\rho'')^2 + 1 - 2\rho\rho'' - \rho^2) \leq 0$$

Ce trinôme du second degré en  $\rho'^2$  a donc son discriminant positif ou nul:

$$\Delta = (\rho^2 + 2\rho\rho'' - 2)^2 - 4((\rho\rho'')^2 + 1 - 2\rho\rho'' - \rho^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \rho^4 + 4\rho^2\rho''^2 + 4 + 4\rho^3\rho'' - 4\rho^2 - 8\rho\rho'' - 4\rho^2\rho''^2 - 4 + 8\rho\rho'' + 4\rho^2 \geq 0$$

Ce qui se simplifie (magie...) en

$$(4) \boxed{\rho^4 + 4\rho^3\rho'' \geq 0}$$

On peut supposer  $\rho(0) = 0, \rho'(0) = 1$ . Supposons de plus que  $\rho > 0$  sur  $]0; 2\pi[$ . On a alors

$$(5) \forall t \in [0; 2\pi[, \rho + 4\rho'' \geq 0$$

Remarquons que  $\rho(t) = 2 \sin \frac{t}{2}$  est solution. Posons  $\rho(t) = 2 f(\frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2}$ .

On va montrer maintenant que sur  $]0; \pi[, f \geq 1$ .

$$\text{On a alors (6) } \rho' = f'(\frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} + f(\frac{t}{2}) \cos \frac{t}{2},$$

$$\text{et } \rho'' = \frac{1}{2} f''(\frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} + f'(\frac{t}{2}) \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2} f(\frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2}.$$

Donc  $\rho + 4\rho'' = 2 \left( f''(\frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} + 2 f'(\frac{t}{2}) \cos \frac{t}{2} \right)$ . Ainsi

$$(7) f''(\frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} + 2 f'(\frac{t}{2}) \cos \frac{t}{2} \geq 0$$

Comme  $\rho > 0$  sur  $]0; 2\pi[$ , on a  $f > 0$  sur  $]0; \pi[$ . Donc

$$\forall t \in ]0; \pi[, \frac{f''}{f'} \geq -2 \frac{\cos t}{\sin t}$$

En intégrant on obtient, pour tout  $a$  et  $t$  dans  $]0; \pi[$ ,

$$[\log f']_a^t \geq -2 [\log(\sin t)]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \log f'(t) - \log f'(a) \geq 2(\log(\sin a) - \log(\sin t))$$

D'où

$$(8) \frac{f'(t)}{f'(a)} \geq \frac{\sin^2 a}{\sin^2 t}$$

Or  $\rho'(0) = 1$ , donc avec (6) on a  $f(0) = 1$ . De (7) on a  $f'(0) \geq 0$ . Par continuité en 0, on déduit de (8) que  $\forall t \in [0; \pi[, f'(t)$  est de même signe que  $f'(0)$ , donc  $f'(t) \geq 0$ . Comme  $f(0) = 1$ , on obtient  $\forall t \in [0; \pi[, f(t) \geq 1$ .

En ainsi,

$$\forall t \in [0; 2\pi[, \rho(t) \geq 2 \sin \frac{t}{2}$$

On vient donc de démontrer:

**Théorème 4.** *Supposons  $v = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\rho(0) = 0$ ,  $\rho'(0) = 1$ , et  $\forall t \in ]0; 2\pi[$ ,  $\rho > 0$ . Alors*

$$\forall t \in [0; 2\pi], \rho(t) \geq 2 \sin \frac{t}{2}$$

Il faudrait maintenant virer la condition  $\rho > 0$ . Sans doute y arrivera-t-on en utilisant l'équation (4), sans la simplification par  $\rho^3$  qui donne l'équation (5). Mais j'ai un peu la flemme, là.