

Mises à plat d'un polyèdre

PAR LOÏC POTTIER

Comment immerger dans le plan un polyèdre de l'espace ? Ce problème, vu par un mathématicien, peut être abordé de plusieurs façons.

On peut tout d'abord répondre que le nombre de points de l'espace contenus dans un polyèdre, bien qu'infini, n'est pas plus grand que celui des points du plan, ou même d'une partie bornée de celui-ci. Aussi surprenant que cela puisse paraître, il est même égal, au sens où il existe une bijection entre ces deux ensembles de points (on peut les associer par paires). Le même phénomène existe entre le plan et la droite : Peano l'a démontré spectaculairement en exhibant une courbe qui remplit exactement un carré. Néanmoins ce genre de gymnastique mathématique qui consiste à transformer bijectivement un objet qui a une épaisseur en un objet plat est irréalisable en pratique, au sens où on ne peut décrire *explicitement* le procédé qui réalise cette transformation. Le terme "explicitement" signifie ici "par une suite finie d'opérations élémentaires", i.e. par un "algorithme".

Une autre réponse est possible si on admet que seule la *surface* du polyèdre nous intéresse (c'est la position de Max Charvolen). La surface d'un polyèdre est constituée de faces, en nombre fini, qui sont elle-mêmes des polygones. Chacun de ces polygones étant collé à d'autres par une de ses arêtes, pour constituer finalement la surface du polyèdre. Un cube est constitué par exemple par 6 faces, qui sont elles-mêmes des carrés.

Immerger un polyèdre dans le plan est alors immédiat : il suffit d'immerger chaque face séparément, ce qui est possible sans déformation puisqu'elles sont planes. Reste ensuite à les agencer dans le plan de manière satisfaisante.

Parmi l'infinité de possibilités, Max Charvolen s'est donné deux contraintes :

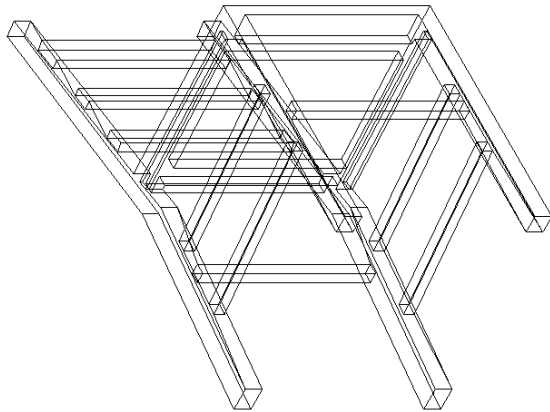
1. les faces gardent leurs dimensions, et doivent être attachées par leurs arêtes.
2. l'ensemble doit être *connexe*, i.e. d'un seul tenant.

Il appelle "mise à plat" une immersion de la surface d'un polyèdre qui satisfait ces contraintes.

Dans le cas d'un cube, on obtiendra par exemple un "T" de 6 carrés (4 en hauteur, et un de chaque côté). Ce patron est bien connu des écoliers qui construisent un cube en carton. D'autres solutions sont possibles, comme une croix, un zigzag, etc.

Les deux contraintes de Max Charvolen suffisent pour que le nombre de possibilités ne soit plus infini. Néanmoins, même pour un polyèdre simple, ce nombre est grand, et croît exponentiellement avec le nombre de faces.

La combinatoire des mises à plat, apparemment complexe, correspond à un problème classique en informatique théorique : une mise à plat correspond exactement à la représentation graphique d'un arbre recouvrant le graphe des faces du polyèdre (deux faces sont liées si et seulement si elles partagent une arête). Ce graphe est planaire, et admet en général un nombre exponentiel (en son nombre de sommets) d'arbres recouvrants. Une croissance exponentielle conduit à des nombres qui dépassent très vite le sens commun : avec un polyèdre comme une chaise :



le nombre d'arbres recouvrant dépasse probablement le nombre de particules de l'univers !

Néanmoins, d'un point de vue algorithmique, il est facile d'écrire un programme d'ordinateur qui énumère les arbres recouvrant, et donc toutes les mises à plat.

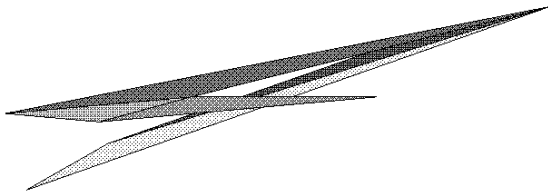
Par contre, le dessin d'une mise à plat dans le plan pose des problèmes plus difficiles.

Le premier problème est celui des recouvrements de faces. En effet, il est fréquent que des faces *se recouvrent* partiellement ou totalement dans une mise à plat. C'est d'ailleurs la règle dans les œuvres de Max Charvolen. On peut s'en convaincre par exemple en mettant à plat le coin d'une rue : le polyèdre (il n'est pas fermé dans ce cas) a trois faces (les deux murs et le trottoir) ; il n'y a que trois mises à plat possibles, et chacune présente un recouvrement de deux des faces.

Cet exemple met en lumière la cause typique des recouvrements de mise à plat : la non-convexité d'un polyèdre (on dit qu'un polyèdre est convexe s'il contient tous les segments qui joignent deux de ses points).

On peut se poser la question suivante : *un polyèdre convexe peut-il avoir une mise à plat avec recouvrement ?*. J'ai longtemps pensé et essayé de démontrer que cela était impossible, jusqu'au jour où j'ai construit un polyèdre convexe qui pouvait se mettre à plat avec un recouvrement. C'est une pyramide déformée, dont les cinq sommets ont les coordonnées spatiales suivantes : $(50 -1 0)$, $(60 1 0)$, $(40 0 2)$, $(20 0 1)$, $(0 0 0)$.

Voici une de ses mises à plat qui présente un recouvrement :



Une autre question intéressante est “un polyèdre convexe admet-il toujours une mise à plat sans recouvrement”.

La réponse n'est pas connue mais on la soupçonne fortement d'être positive. On pourrait obtenir une telle mise à plat en effectuant d'abord une projection stéréographique du polyèdre sur le plan, et ensuite en contractant les faces (mais il faut couper des arêtes avec clairesvoyance!).

Dans le cas des polyèdres non convexes, l'existence de mises à plat avec ou sans recouvrement reste un problème ouvert.

Le deuxième problème que pose le dessin d'une mise à plat dans le plan concerne les mises à plat avec recouvrements. Si on suit l'arbre recouvrant correspondant à une mise à plat et dessinant en même temps les faces, on arrive à des invraisemblances dans les superpositions des faces. Il faut alors, pour résoudre de problème, utiliser une technique proche de celle du “Z-buffer” utilisée en imagerie par ordinateur pour éliminer les faces cachées d'une surface.

Revenons à la combinatoire des mises à plat. Plusieurs types d'algorithmes d'énumération exhaustive sont possibles. Les plus simples introduiront une continuité dans les mises à plat : chaque nouvelle mise à plat différera peu de la précédente, il faudra attendre 107 ans pour arriver à une mise à plat un peu exotique...

En utilisant un peu de “hasard” (par utilisation de nombres aléatoires) on peut varier les mises à plats.

On peut aussi contrôler l'aspect général. En utilisant un parcours “en largeur” du graphe des faces, on obtiendra des mises à plat compactes, avec beaucoup de recouvrements. Avec un parcours “en profondeur”, les mises à plat seront allongées, avec moins de recouvrement.

Toutes ces variations ont été utilisées pour obtenir les mises à plat par ordinateur de Max Charvolen.

Les problèmes mathématiques posés par les mises à plat de Max Charvolen sont nombreux, et je n'en ai abordé que quelques-uns ici. On peut par exemple se poser la question de savoir s'il existe une mise à plat qui rentre dans un rectangle ou un cercle donné (ce problème est sans doute NP-difficile, donc quasi-inaccessible aux ordinateurs actuellement). Ou bien déterminer la mise à plat qui maximise, ou qui minimise les surfaces de recouvrement (encore sans doute NP-difficile).

Ces problèmes sont de deux ordres. D'abord géométrique : c'est le lien entre l'espace et le plan euclidiens qui est en question ici, et par là les représentations planes des objets spatiaux ; c'est un domaine qui me semble au centre des préoccupations de Max Charvolen, et des artistes qui lient peinture et sculpture (les visages de Picasso étaient déjà des mises à plat, bien que non conformes et non isométriques). Le deuxième ordre est algorithmique, au sens où Max Charvolen suit explicitement une démarche combinatoire et constructive ; c'est une des raisons qui permettent une étude mathématique de son travail.