INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Premiers pas vers un cours de géométrie en Coq pour le lycée

Frédérique Guilhot

N° 4893

Juillet 2003

THÈME 2

ISSN 0249-6399

Premiers pas vers un cours de géométrie en Coq pour le lycée

Frédérique Guilhot

Thème 2 — Génie logiciel
et calcul symbolique
Projet Lemme

Rapport de recherche n° 4893 — Juillet 2003 — 44 pages

Résumé : Nous présentons dans ce rapport une bibliothèque de géométrie en Coq dédiée à l'enseignement au lycée. L'accent est porté sur l'utilisation de l'interface graphique Pcoq et sur l'outil de construction GeoView qui permettent de présenter des énoncés et des figures proches de ceux utilisés au lycée. L'axiomatique choisie pour la formalisation n'utilise pas la méthode analytique. Nous présentons quelques exemples significatifs de preuves puis abordons les difficultés rencontrées dans ce travail.

Mots-clés : preuve, géométrie, enseignement, Coq, interface graphique, assistant à la preuve

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

First steps towards writing a geometry course in Coq

Abstract: In this report, we present a library dealing with geometry in Coq. This library is dedicated to high-school teaching. We stress on using the graphical interface Pcoq and the drawing tool GeoView. These tools enable us to display statements and draw figures in the same way as students do. We give an axiomatization of geometry in a non analytic setting and present some significant examples of proofs developped with Coq. We eventually discuss the difficulties encountered in this work.

Key-words: proof, geometry, teaching, Coq, graphical interface, proof assistant

1 Introduction

L'utilisation des outils logiciels (sur ordinateur ou calculatrice) disponibles actuellement dans les lycées en France, s'avère tout à fait adaptée à de nombreux domaines de l'enseignement des mathématiques, par exemple celui du calcul algébrique et formel et celui des figures du plan et de l'espace. Les expérimentations, les observations sur un grand nombre de calculs, de graphes de fonctions ou de cas de figure permettent de "vérifier empiriquement" différentes propriétés. L'enseignant se doit alors de faire comprendre qu'une propriété qui semble vraie même pour un très grand nombre de cas, n'est pas toujours vraie et qu'il faut une démonstration pour la prouver.

Les machines sont maintenant capables de raisonner sur des énoncés logiques du premier ordre, voire d'ordre supérieur. Les assistants à la preuve comme Coq [11] où les preuves sont construites interactivement demandent de la part des utilisateurs des compétences en logique. De tels logiciels peuvent apporter une aide pour la maîtrise et l'organisation du discours mathématique rigoureux. L'enseignement du raisonnement déductif se faisant essentiellement dans les cours de géométrie, il est donc naturel de penser à utiliser l'outil Coq pour faire des démonstrations interactives de géométrie au lycée.

Si l'on pense pouvoir utiliser un assistant à la preuve pour aider les éléves dans leur apprentissage de la démarche déductive, il faut travailler sur la partie interface pour faciliter l'accès à l'outil Coq et avoir des résultats satisfaisants du point de vue de la forme.

Nous verrons dans une première partie (section 2) que l'interface graphique Pcoq apporte des facilités pour les utilisateurs novices. Puis nous nous intéresserons à GeoView [3], outil qui permet de générer automatiquement une figure dynamique interactive à partir d'un énoncé de géométrie plane.

Dans la section 3, nous présenterons la géométrie affine euclidienne enseignée au lycée en France. Nous aborderons ensuite (section 5) la façon dont nous l'avons formalisée après avoir expliqué l'intérêt de créer une bibliothèque de géométrie spécifiquement dédiée à l'enseignement (section 4). Puis nous nous intéresserons aux parties du cours de lycée formalisées dans cette bibliothèque (section 6) et à quelques exemples significatifs de démonstrations faites en Coq (section 7). Nous expliquerons (section 8) les difficultés rencontrées dans ce travail, en particulier nous aborderons le problème de l'étude des cas dégénérés dans les preuves. Enfin, nous expliquerons le travail qu'il reste à fournir pour pouvoir utiliser cette bibliothèque de géométrie efficacement devant un public a priori non expert.

2 L'interface graphique Pcoq et GeoView

Le développement de géométrie que nous présentons dans ce rapport a été réalisé avec l'interface Pcoq [1] développée par le projet Lemme de l'unité de Sophia-Antipolis.

2.1 L'interface graphique Pcoq

Pcoq est une interface graphique pour l'assistant à la preuve Coq qui manipule dynamiquement les objets structurés représentant des commandes ou des formules mathématiques.

Dans Pcoq, les objets manipulés sont affichés en utilisant PPML (*Pretty Printing Meta Language*) qui est un langage pour la description de la présentation des objets structurés. Il permet en particulier :

- d'afficher des formules mathématiques avec des notations très proches de celles utilisées par les mathématiciens,
- de traduire les formules logiques représentant des énoncés mathématiques par des phrases articulées avec des connecteurs logiques.

En utilisant PPML, nous avons pu obtenir à l'écran des notations proches de celles utilisées au lycée et des énoncés de théorèmes en français (ou en anglais) dans lesquels les hypothèses et la conclusion sont mis en relief par les articulations logiques *"si ... alors ..."* et l'utilisation de couleurs. Dans la figure ci-dessous, nous donnons un exemple d'un lemme écrit dans la syntaxe de Coq tel qu'il apparait en utilisant l'affichage par défaut puis deux affichages différents du même lemme obtenus en utilisant PPML.

```
Lemma paralleles_vecteur :
(A, B, C, D : PO)
~ (< PO > A == B ) ->
~ (< PO > C == D ) ->
(paralleles (droite A B) (droite C D)) ->
(exT? [k : R] < PP > (vec A B) == (mult_PP k (vec C D)) ).
```

Lemma **paralleles_vecteur:** $\forall A, B, C, D : PO.\ A \neq B \Rightarrow C \neq D \Rightarrow (AB) // (CD) \Rightarrow \exists k : R.\ \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}.$

Propriété **paralleles_vecteur:**
Soient A, B, C et D des points.
Si **A distinct de B,**
C distinct de D,
et (AB) // (CD)
alors **il existe un réel k tel que :** $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.

FIG. 1 – Exemples de 3 affichages du même lemme, les 2 derniers obtenus avec Pcoq

Pcoq offre aussi des possibilités d'interaction intéressantes pour un utilisateur qui ne veut ou ne sait pas taper du code. Citons la sélection à la souris d'une sous-expression dans une formule mathématique qui permet de la manipuler dynamiquement, de la modifier ou

de la copier-coller par exemple. Un autre type d'interaction est le *proof-by-pointing* [4] qui permet en un clic de souris, de construire des commandes complexes envoyées au système de preuve Coq. Ces possibilités font de Pcoq une interface facilement adaptable à l'enseignement, même s'il reste encore du travail à fournir pour qu'elle puisse être utilisée sans un trop long apprentissage par un public non expert.

2.2 GeoView, outil de visualisation des énoncés de géométrie plane

Comment imaginer "faire de la géométrie" sans "manipuler de figures" ! Les logiciels de construction de figures dynamiques interactives les plus couramment utilisés dans l'enseignement secondaire sont Cabri-géomètre [5], GéoplanW et GéospaceW [8]. Le Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques du CNAM a développé GéoplanJ [7], version Java de Géoplan, conçue et utilisée surtout pour visionner des figures Géoplan.

Pour développer notre outil de visualisation des énoncés de Coq, nous avons choisi avec Loïc Pottier, d'utiliser GéoplanJ (logiciel libre), de le modifier et de l'intégrer à l'interface Pcoq, aussi développée en Java.

Dans la suite, nous expliquons comment notre outil (appelé GeoView [3]), à partir d'un énoncé de théorème donné en entrée, rend en sortie une figure dynamique interactive. Puis nous donnons un exemple commenté.

2.2.1 Description de GeoView

GeoView permet de construire une figure dynamique interactive à partir d'un énoncé de théorème. Voici une brève description de son fonctionnement :

- l'arbre de l'énoncé du théorème donné en entrée est transformé en un arbre du type : $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow ... \rightarrow H_n \rightarrow C$ où les H_i peuvent être interprétées comme les hypothèses du théorème et C comme sa conclusion.
- on distingue alors parmi les contraintes géométriques de cet arbre celles qui sont *liantes* de celles qui ne le sont pas. Par exemple, la contrainte *(triangle A B C)* n'est pas liante : 3 points libres dans le plan conviennent pour la construction ; en revanche la contrainte *(alignes A B C)* est liante. Les contraintes apparaissant dans la conclusion sont redondantes pour la construction de la figure donc sont non liantes.
- on fait la liste de toutes les contraintes *liantes* et des points apparaissant dans ces contraintes. On obtient une matrice de contraintes : chaque ligne représentant une contrainte liante, chaque colonne correspondant à un point.
- un algorithme simple permet de déterminer par permutation des points, lorsque c'est possible, une matrice vérifiant ces trois critères :
  - dans chaque ligne un seul des points apparaissant dans la contrainte est *lié* aux autres,

  - dans une colonne, un point ne peut être *lié* plus de 2 fois,
  - il n'y a pas de boucle : par exemple, un couple de points *libre/lié* dans une ligne n'apparait pas *lié/libre* dans une autre.
- les points qui sont *libres* dans toutes les lignes de la matrice seront des points "libres" dans la syntaxe de Géoplan. Les autres sont construits à partir des points libres.
- pour chaque ligne de la matrice, la position du point *lié* est calculée et il en résulte une construction. Par exemple pour construire un *triangle ABC isocèle en A*, si B et C sont des points libres, le point lié A est construit sur la médiatrice de $[BC]$ mais si A et B sont des points libres, le point lié C est construit sur le cercle de centre A et de rayon $[AB]$.
- pour les points qui sont *liés* dans plusieurs lignes, on utilise des points d'intersection d'objets Géoplan . Par exemple si C apparait lié dans les deux contraintes $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ et *(alignes A B C)*, C est le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par D.
- à la fin de l'analyse de la matrice de contraintes un "texte de figure" est envoyé à GéoplanJ qui génère une figure à l'écran.

2.2.2 Mise en oeuvre sur un exemple

Pour illustrer le processus exposé dans le paragraphe précédent, prenons l'exemple du théorème de la droite de Simson dont l'énoncé est donné dans la figure ci-dessous. On remarque que la conclusion est exprimée sous la forme de l'équivalence de deux assertions. La première assertion est interprétée par GeoView comme une hypothèse (contrainte liante) et la seconde comme la conclusion du théorème (contrainte non liante).

Théorème **droite_Simson :**
Soient A, B, C, M, P, Q et R des points.
Si **ABC est un triangle,**
BCM est un triangle,
ABM est un triangle,
ACM est un triangle,
P est le projeté orthogonal de M sur la droite (BC),
Q est le projeté orthogonal de M sur la droite (AC),
et R est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)
alors
M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si P, Q et R sont alignés.

FIG. 2 – Enoncé du théorème de la droite de Simson (avec Pcoq)

La liste des contraintes traitées par GeoView est donnée dans la figure 3. On remarque que chaque hypothèse exprimant qu'un point est le projeté orthogonal d'un autre sur une

droite est représentée par deux contraintes : une contrainte d'alignement de 3 points et une contrainte d'orthogonalité de 2 droites. De sorte qu'on a la propriété suivante : pour chacun des points figurant dans une contrainte liante, on est capable de décrire une construction du point choisi à partir des autres points figurant dans la contrainte.

```
Liste de toutes les contraintes
non liante :triangle ( A, B, C )
non liante :triangle ( B, C, M )
non liante :triangle ( A, B, M )
non liante :triangle ( A, C, M )
liante :perpendiculaire ( B, C, M, P )
liante :aligne ( B, C, P )
liante :perpendiculaire ( A, C, M, Q )
liante :aligne ( A, C, Q )
liante :perpendiculaire ( A, B, M, R )
liante :aligne ( A, B, R )
liante :cocyclique ( A, B, C, M )
non liante :aligne ( P, Q, R )
```

FIG. 3 – Liste des contraintes traitées par GeoView

A partir de la liste des contraintes liantes, GeoView construit une matrice de contraintes dans laquelle chaque contrainte est représentée par une ligne. Le point *lié* d'une contrainte est représenté par une croix, les autres points apparaissant dans la contrainte sont représentés par un rond. La matrice est initialisée avec les points liés placés le plus à gauche, dans le cas de cet exemple, la première matrice est correcte : il n'y a pas de boucle et les points sont liés au plus deux fois (voir figure ci-dessous).

```
Liste de tous les points dans les contraintes liantes:
Il y a 7 points a gerer dans les contraintes liantes
[R, Q, A, P, M, C, B]

Construction de la matrice des contraintes
matriceContrainte initialisee
 R Q A P M C B
 . . . X O O O
 . . . X . O O
 . X O . O O .
 . X O . . O .
 X . O . O . O
 X . O . . . O
 . . X . O O O

MatriceContrainte correcte: 1 eme matrice
```

FIG. 4 – Matrice de contraintes calculée par GeoView

Il reste à passer à la construction. A partir de l'analyse de la matrice de contraintes, on obtient successivement les points libres et les points liés :

- les points B, C et M sont les points libres de la figure, ils apparaitront en vert sur la figure générée et pourront être déplacés à la souris,
- le point P est le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par M avec la droite (BC),
- une construction analogue est faite pour les points Q et R,
- enfin, le point A est un point libre sur le cercle circonscrit au triangle BCM.

Nous reproduisons ci-dessous le début du texte de figure écrit dans la syntaxe de Géoplan qui décrit la construction des points.

```
Figure Géoplan
Numéro de version : 2
Position de Roxy : Xmin : -20, Xmax : 20, Ymax : 20
Objet dessinable Roxy, particularités : non dessiné
M point libre
Objet dessinable M, particularités : vert foncé, marque épaisse
C point libre
Objet dessinable C, particularités : vert foncé, marque épaisse
B point libre
Objet dessinable B, particularités : vert foncé, marque épaisse
X123 cercle circonscrit au triangle BCM
A point libre sur le cercle X123
Objet dessinable A, particularités : vert foncé, marque épaisse
D124 droite perpendiculaire à (BC) passant par M
Objet dessinable D124, particularités : non dessiné
D125 droite (BC)
P point d'intersection des droites D124 et D125
D126 droite perpendiculaire à (AB) passant par M
Objet dessinable D126, particularités : non dessiné
D127 droite (AB)
R point d'intersection des droites D126 et D127
D128 droite perpendiculaire à (AC) passant par M
Objet dessinable D128, particularités : non dessiné
D129 droite (AC)
Q point d'intersection des droites D128 et D129
```

Le reste du texte (non reproduit ici) permet de construire les autres objets : droites, segments, marques d'angle droit etc... Et la figure est générée, avec la conclusion du théorème en rouge, ici la droite passant par P, Q et R qui représente la droite de Simson.

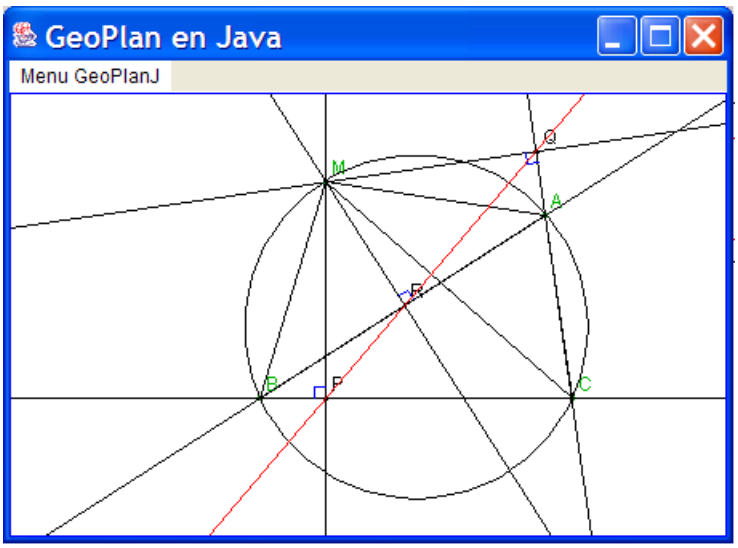

FIG. 5 – Figure générée par GeoView à partir de l'énoncé du théorème de la droite de Simson

2.2.3 Utilisation d'une figure générée par GeoView

Les figures générées par GeoView n'ont pas pour seul but d'illustrer des théorèmes prouvés par l'assistant de preuve Coq, elles peuvent être réutilisées dans un autre contexte.

Le texte d'une figure générée par GeoView est écrit dans la syntaxe de Géoplan. Ceci permet de la lire et éventuellement de la modifier avec GéoplanW, en vue par exemple d'une exploitation pédagogique.

En particulier, on peut interactivement :

- créer des objets géométriques et des affichages de données numériques (pour vérifier des conjectures par exemple),
- piloter des objets au clavier,
- déterminer des lieux géométriques,
- ajouter des commandes pour faire apparaitre/disparaitre des pans de la figure.

Pour illustrer ce qui précède, nous donnons dans la figure 6, la figure générée par GeoView à partir de l'énoncé du théorème du cercle des neuf points et sa copie retravaillée pour visualiser une partie de la démonstration du théorème.

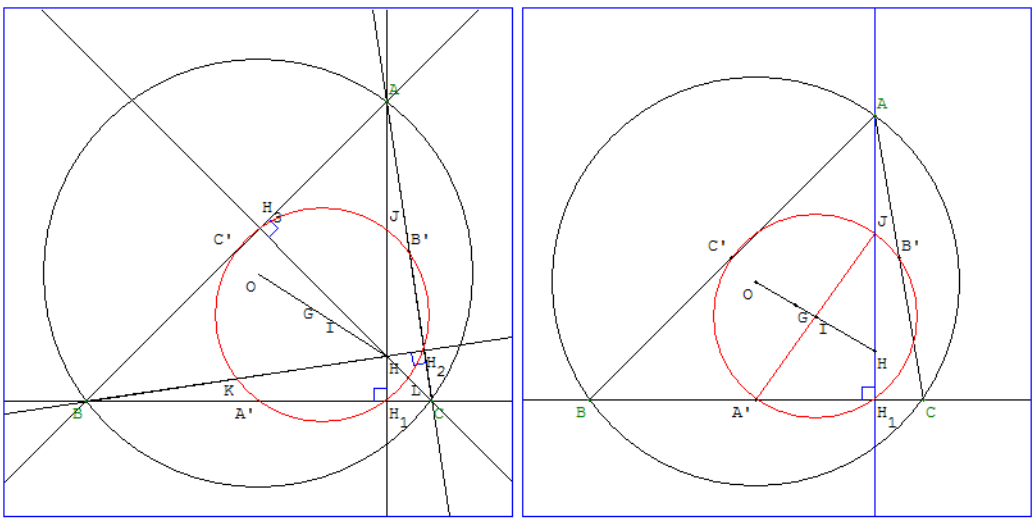

FIG. 6 – Figure générée par GeoView et une copie retravaillée

On peut ainsi utiliser une figure générée par GeoView, la modifier et l'utiliser hors de l'environnement de preuve. Il est aussi possible de l'intégrer comme figure dynamique interactive dans des pages HTML.

3 La géométrie enseignée au lycée

Dans toute la suite, il est question de la partie des programmes de mathématiques concernant la géométrie affine euclidienne en dimension 2 et 3, actuellement en vigueur en France. Comme nous voulons privilégier le raisonnement, nous ne parlons pas ici de la partie de géométrie analytique.

La notion d'axiome n'est pas abordée explicitement dans l'enseignement secondaire. On utilise implicitement les axiomes d'Euclide, par exemple on voit des énoncés commençant par : *"soient A, B et C trois points non alignés, le plan (ABC) ... "*, ce qui sous-entend que par 3 points non alignés passe un plan et un seul.

Les structures algébriques ne sont plus au programme des lycées, aussi ne parle-t-on jamais d'espace vectoriel ni d'espace affine. En revanche, les élèves doivent connaitre les "règles de calcul" sur les vecteurs (dimension 2 ou 3). Le calcul barycentrique n'est pas au programme mais la notion de barycentre est abordée avec ses propriétés.

Pour la géométrie euclidienne, les élèves utilisent le produit scalaire, la distance euclidienne associée. Quelques éléments d'orientation du plan et de l'espace sont abordés et les angles orientés de vecteurs non nuls du plan sont définis et utilisés dans des calculs.

Parmi les méthodes de démonstration, une grande place est faite à l'utilisation des transformations géométriques : translations, homothéties, rotations planes, symétries planes, similitudes directes et les théorèmes qui caractérisent leurs composées sont démontrés.

Enfin, l'étude des nombres complexes et de leurs applications à la géométrie plane est traitée en terminale.

4 Le choix de l'axiomatique

4.1 Objectifs

La géométrie analytique plane a déjà été formalisée en Coq et intégrée à la bibliothèque standard `Reals`.

Pour ce qui concerne la géométrie qui manipule directement les objets géométriques sans recours à la méthode analytique, il existe plusieurs axiomatiques possibles, citons celles de Hilbert, Tarski et Von Plato (géométrie constructive) qui ont été formalisées en Coq par Julien Narboux, dans le cadre de son travail de thèse (en cours).

D'autre part, les méthodes de Wu utilisant les bases de Gröbner et de Chou expliquées dans [6] permettent de démontrer automatiquement et très efficacement de grandes classes de théorèmes mais fournissent des preuves peu lisibles.

L'objectif de pouvoir expliquer les raisonnements "comme au lycée" constitue une contrainte forte pour la formalisation choisie. Le but n'est pas d'avoir un nombre minimal d'axiomes mais de "coller au plus près" des définitions, théorèmes et démonstrations donnés au lycée. Dans cette bibliothèque, l'idéal aurait été de n'employer que les "objets géométriques manipulés au lycée" décrits dans la section 3 (points, droites, plans, vecteurs, barycentre etc...). Si ce n'est pas le cas pour tous les objets primitifs, très vite les lemmes n'emploient plus que de tels objets.

4.2 Sommes vectorielles de Leibniz et extension

Nous voulons essentiellement contruire des objets géométriques à partir des points du plan ou de l'espace et travailler en utilisant le calcul vectoriel (sans tenir compte de la dimension). La notion de barycentre permet à partir de plusieurs points d'en construire de nouveaux. Les justifications données au lycée reposent sur l'étude des sommes vectorielles de Leibniz que nous rappelons ci-dessous :

Soient A et B deux points, étant donnés a et b deux réels, on étudie l'application $f_{a,b}$ qui associe à un point M du plan ou de l'espace un vecteur :

$$f_{a,b} : M \mapsto \overrightarrow{f_{a,b}(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} \tag{1}$$

– *si* $a+b=0$ *,* $f_{a,b}$ *est constante car :*

$$\forall M,\ a\overrightarrow{MA} - a\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{BA} \tag{2}$$

– *si* $a+b\neq 0$ *, on montre qu'il existe un unique point* G *tel que* $\overrightarrow{f_{a,b}(G)} = \overrightarrow{O}$ *qu'on appelle le barycentre des points pondérés* (A,a) *et* (B,b) *et on démontre :*

$$\forall M,\ a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG} \tag{3}$$

L'addition des vecteurs et la multiplication par un réel peuvent être étendues aux points. On peut définir par analogie avec les sommes vectorielles de Leibniz, la somme de deux points pondérés (pas au programme des lycées) :

Soient A *et* B *deux points, étant donnés* a *et* b *deux réels, on définit la somme* $aA+bB$ *de sorte que les formules (4) et (5) qui suivent peuvent être "interprétées" respectivement par les formules (2) et (3).*

– *si* $a+b=0$,

$$aA - aB = a\overrightarrow{BA} \tag{4}$$

– *si* $a+b\neq 0$ *et* G *est le barycentre des points pondérés* (A,a) *et* (B,b)

$$aA + bB = (a+b)G \tag{5}$$

4.3 Espace universel associé à un espace affine

Cette présentation peut être rapprochée de la notion d'espace universel associé à un espace affine décrite dans le chapitre "Un espace universel. Applications" du livre de Marcel Berger [2].

Etant donné A un espace affine sur $\mathbb{R}$ et E son espace vectoriel sous-jacent, on considère la réunion disjointe de E et du produit cartésien $\mathbb{R}^* \times A$. On munit cet ensemble des deux lois qui prolongent celles de E (on retrouve les définitions 4 et 5 du paragraphe précédent), ce qui lui donne une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle l'espace universel associé à A. On peut ainsi plonger E et A dans cet espace (A étant identifié à $1 \times A$).

5 Formalisation en Coq

Les objets primitifs sont les points, les points pondérés et les vecteurs, de sorte que le calcul barycentrique et vectoriel puisse être interprété en dimension quelconque (ici 2 ou 3).

5.1 Objets primitifs

Nous utilisons les types `PO` et `PP` qui représentent respectivement l'ensemble des points et l'ensemble des points pondérés et vecteurs (voir section 4.3). Nous définissons ensuite l'addition : `add_PP` et le produit externe : `mult_PP` ; enfin un constructeur de points pondérés : `cons`.

```
Variables PO : Type.
Variables PP : Type.
Variables add_PP : PP -> PP -> PP.
Variables mult_PP : R -> PP -> PP.
Variables cons : R -> PO -> PP.
```

On peut ensuite définir un constructeur de vecteurs à partir des points : $\overrightarrow{AB} = 1.B - 1.A$

```
Definition vec := [A, B : PO] (add_PP (cons (Ropp R1) A) (cons R1 B)).
```

5.2 Utilisation de tactiques pour simplifier les calculs vectoriels

L'utilisation des tactiques *Ring* et *Field* de Coq permet de démontrer automatiquement des égalités dans des anneaux et des corps. Sur une idée de Loïc Pottier que nous justifions ci-dessous, nous avons utilisé ces deux tactiques pour simplifier les calculs dans PP.

L'ensemble des points pondérés peut être considéré comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des points : $PP = \{\sum \lambda_i P_i / \lambda_i \in \mathbb{R},\ P_i \in PO\}$ et donc s'injecte de façon naturelle dans l'anneau $\mathbb{R}[PO]$ des polynômes en une infinité de variables PO, à coefficients dans $\mathbb{R}$. De plus, $\mathbb{R}$ et PO s'injectent de façon triviale dans ce même anneau, on a donc les injections suivantes :

$$f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[PO], \quad f_{PO} : PO \hookrightarrow \mathbb{R}[PO] \quad \text{et} \quad f_{PP} : PP \hookrightarrow \mathbb{R}[PO]$$

L'image par f_{PP} de la somme de 2 points pondérés P et Q est la somme des 2 polynômes correspondants, ce qui donne la formule :

$$\forall P, Q \in PP,\ f_{PP}(P + Q) = f_{PP}(P) + f_{PP}(Q) \tag{6}$$

Et l'image par f_{PP} du produit du point pondéré P par le réel λ est le produit des polynômes correspondants, ce qui donne la formule :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall P \in PP,\ f_{PP}(\lambda.P) = f_{\mathbb{R}}(\lambda) \cdot f_{PP}(P) \tag{7}$$

De même, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in PO, f_{PP}(\lambda.A) = f_{\mathbb{R}}(\lambda) \cdot f_{PO}(A) \tag{8}$$

Ce que nous formalisons en Coq en construisant un anneau abstrait AM qui sera interprété comme l'anneau $\mathbb{R}[PO]$, puis les fonctions $f_{\mathbb{R}}$, f_{PO} et f_{PP} et leurs propriétés comme le montre la figure 7.

```
Variables PO : Type.
Variables PP : Type.
Variables add_PP : PP => PP => PP.
Variables mult_PP : R => PP => PP.
Variables cons : R => PO => PP.
Variables 0 : PP.

AM anneau abstrait
Variables AM : Type.
Variables plusAM : AM => AM => AM; multAM : AM => AM => AM.
Variables zeroAM : AM; unAM : AM.
Variables oppAM : AM => AM.

Axiom AM_theory : (Ring_Theory plusAM multAM unAM zeroAM oppAM λx, y : AM. false).

Injections de R, PO et PP dans AM
Variables fR : R => AM.
Variables fPO : PO => AM.
Variables fPP : PP => AM.

Axiom fPP_inj : ∀A, B : PP. ((fPP A) = (fPP B)) => A = B.

Transports des opérations
Hypotheses fRadd : ∀x, y : R. (fR x + y) = (plusAM (fR x) (fR y)).
Hypotheses fRmult : ∀x, y : R. (fR x * y) = (multAM (fR x) (fR y)).
Hypotheses fRopp : ∀x : R. (fR - (x)) = (oppAM (fR x)).
Hypotheses fR0 : (fR 0) = zeroAM.
Hypotheses fR1 : (fR 1) = unAM.
Hypotheses fcons : ∀x : R. ∀A : PO. (fPP (x, A)) = (multAM (fR x) (fPO A)).
Hypotheses fmult : ∀x : R. ∀A : PP. (fPP x · A) = (multAM (fR x) (fPP A)).
Hypotheses fadd : ∀A, B : PP. (fPP A + B) = (plusAM (fPP A) (fPP B)).
Hypotheses fzeroPP : (fPP 0) = zeroAM.
```

FIG. 7 – Construction de l'anneau AM (avec Pcoq)

Pour démontrer une égalité dans PP, il suffit d'appliquer l'axiome fPP_inj, puis d'appliquer la tactique *Ring* pour démontrer l'égalité dans AM. C'est ce que fait la tactique *RingPP*.

Grâce à cette tactique, des lemmes concluant sur des égalités de vecteurs sont démontrés facilement comme l'illustre la figure 8.

```
Definition vec := λA, B : PO. (-1, A) + (1, B).

Tactic Definition Ringvec :=
 Unfold vec; RingPP.

Lemma Chasles_vec: ∀A, B, C : PO. AB + BC = AC.
- Intros; Ringvec.
Qed.

Lemma opp_vecteur: ∀A, B : PO. BA = (-1) · AB.
- Intros; Ringvec.
Qed.

Lemma egalite_vecteur: ∀A, B, C, D : PO.
                       AB = CD => AC = BD.
```

FIG. 8 – Lemmes prouvés par la tactique RingPP (avec Pcoq)

Dans les calculs vectoriels, on veut pouvoir utiliser des inverses et des quotients de réels. On pose donc des axiomes supplémentaires pour faire de l'anneau AM un corps, qui peut être interprété comme le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{R}[PO]$, i.e. le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(PO)$. De plus, l'injection $f_{\mathbb{R}}$ doit vérifier les 2 propriétés supplémentaires suivantes :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \Rightarrow f_{\mathbb{R}}(\lambda) \neq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \Rightarrow f_{\mathbb{R}}(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{f_{\mathbb{R}}(\lambda)}$$

Ce qui est formalisé en Coq comme dans la figure 9.

```
Variables invAM : AM => AM.
Hypotheses fRinv : ∀x : R. x ≠ 0 => (fR (1/x)) = (invAM (fR x)).
Hypotheses invAM_l : ∀x : AM. x ≠ zeroAM => (multAM (invAM x) x) = unAM.
Add Field AM plusAM multAM unAM zeroAM oppAM [x, y : AM] false
 invAM AM_theory invAM_l.

Axiom nonzeroAM : ∀k : R. k ≠ 0 => (fR k) ≠ zeroAM.
```

FIG. 9 – Construction du corps (avec Pcoq)

Pour démontrer une égalité dans PP qui contient des inverses de nombres réels, il suffit de prouver que ces nombres sont non nuls, d'appliquer l'axiome fPP_inj, puis d'appliquer la tactique *Field* pour démontrer l'égalité dans AM, l'axiome $nonzeroAM$ prouvant l'existence des inverses dans AM. C'est ce que fait la tactique *FieldPP*. Dans la figure 10, on montre un lemme et sa preuve utilisant la tactique *FieldPP*.

```
Lemma inversion_kPP: ∀k : R. ∀P, Q : PP. k ≠ 0 => P = k · Q => Q = (1/k) · P.
- Intros.
- Rewrite H0.
- (FieldPP k).
Qed.
```

FIG. 10 – Utilisation de la tactique *FieldPP* dans une preuve (avec Pcoq)

5.3 Formalisation des autres objets géométriques

Les objets primitifs : points, points pondérés et vecteurs étant définis, il faut formaliser les notions d'alignement, de parallélisme, de coplanarité etc... indispensables pour faire de la géométrie affine en dimension 2 et 3.

Puis, pour pouvoir faire de la géométrie euclidienne, il faut enrichir la structure affine avec un produit scalaire, une distance etc... Mais le calcul vectoriel étant formalisé, peu de travail reste à faire. Nous verrons dans la section 6.4, apparaître au fur et à mesure les objets de la géométrie euclidienne formalisés.

La plupart des définitions des objets géométriques utilisés au lycée sont données sous la forme : *"on dit que ... si et seulement si ..."*. La notion d'équivalence étant assez floue pour

les lycéens, il nous a paru plus simple pour l'utilisateur "novice" de définir nos objets en Coq comme des variables d'un type donné et de donner des axiomes pour chaque implication.

Pour illustrer ce qui précède, prenons l'exemple de la notion de parallélisme de droites. On définit un type DR (ensemble des droites), puis un constructeur de droites à partir de deux points ; enfin une fonction *paralleles* de type : $DR \rightarrow DR \rightarrow Prop$ et deux axiomes *def_paralleles* et *def_paralleles2* qui utilisent les égalités de points pondérés.

Les lemmes *paralleles_vecteur* et *colineaires_paralleles* donnent une interprétation des deux axiomes précédents avec des égalités de vecteurs. On pourra remarquer dans la figure 11, les hypothèses $A \neq B$ et $C \neq D$ qui assurent l'existence des droites (AB) et (CD). Ceci donne à l'écran avec Pcoq :

```
Variables DR : Type.
Variables : PO => PO => DR.

Variables paralleles : DR => DR => Prop.

Axiom
    def_paralleles : ∀A, B, C, D : PO. ∀k : R. A ≠ B =>
                                          C ≠ D =>
                                           (1, B) + (-1, A) = (k, D) + (-k, C) => (AB) // (CD).

Axiom
    def_paralleles2 : ∀A, B, C, D : PO. A ≠ B =>
                                        C ≠ D =>
                                         (AB) // (CD) => ∃k : R . (1, B) + (-1, A) = (k, D) + (-k, C).

Lemma paralleles_vecteur: ∀A, B, C, D : PO. A ≠ B =>
                                          C ≠ D => (AB) // (CD) => ∃k : R . A→B = k · C→D.

Lemma colineaires_paralleles:
  ∀k : R. ∀A, B, C, D : PO. A ≠ B => C ≠ D => A→B = k · C→D => (AB) // (CD).
```

FIG. 11 – Formalisation de la notion de parallélisme de 2 droites (Pcoq)

Dans l'exemple ci-dessus, il serait inutile, voire antipédagogique, de montrer à des éléves tout ce qui apparait dans la figure 11, on pourrait ne montrer par exemple que les deux derniers lemmes qui suffisent pour la compréhension et les démonstratrions élémentaires faites au lycée.

Pour assurer la compréhension de ces lemmes, nous avons utilisé les possibilités d'affichage de l'interface Pcoq pour attacher aux formules des énoncés, des phrases avec des

connecteurs logiques qui mettent en relief les hypothèses et la conclusion du lemme, comme l'illustre la figure 12.

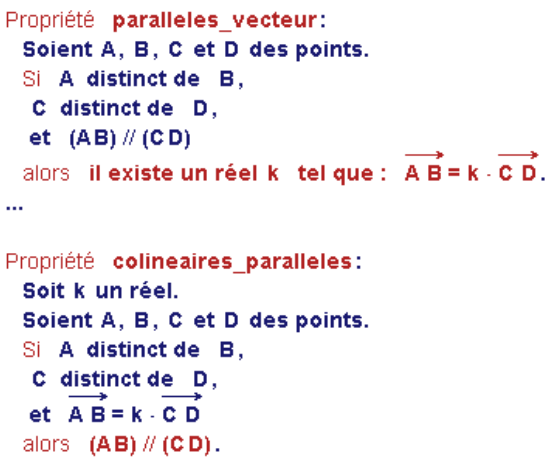

FIG. 12 – Lemmes tels qu'ils peuvent être montrés à des élèves de lycée avec Pcoq

6 Parties du cours de lycée formalisées

6.1 Vue d'ensemble du développement en Coq

Ce développement n'a pas la prétention d'exhaustivité, mais propose une collection de chapitres couvrant une large partie du programme du lycée. Il est toujours en cours de développement et il est possible de le compléter et de le modifier. La figure 14 page suivante, représente le graphe de dépendance du développement tel qu'il est à ce jour. Dans ce graphe n'apparaissent que nos propres fichiers, la bibliothèque "Reals" a été utilisée ainsi que "Fourier".

Les différents fichiers apparaissent avec un code couleur qui renseigne sur la "partie" du développement à laquelle ils appartiennent. Dans la figure 13, on trouve le graphe de dépendance de ces parties.

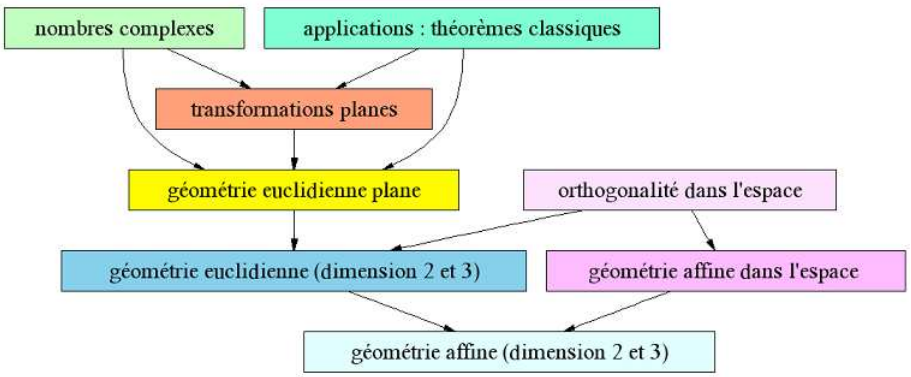

FIG. 13 – Graphe de dépendance des grandes sections du développement

Dans les paragraphes suivants (6.2 à 6.9), nous énumérons les divers notions et théorèmes formalisés dans chacune de ces grandes sections, en partant des objets primitifs pour aller vers les objets plus sophistiqués. Ces paragraphes peuvent être sautés dans une première lecture.

6.2 Géométrie affine : généralités

Dans cette section sont formalisés les objets primitifs décrits dans la section 5.1. On y trouve les bases de la géométrie affine en dimension quelconque :

- points, points pondérés, vecteurs, mesures algébriques,
- barycentres, milieu, propriétés du barycentre, centre de gravité d'un triangle,

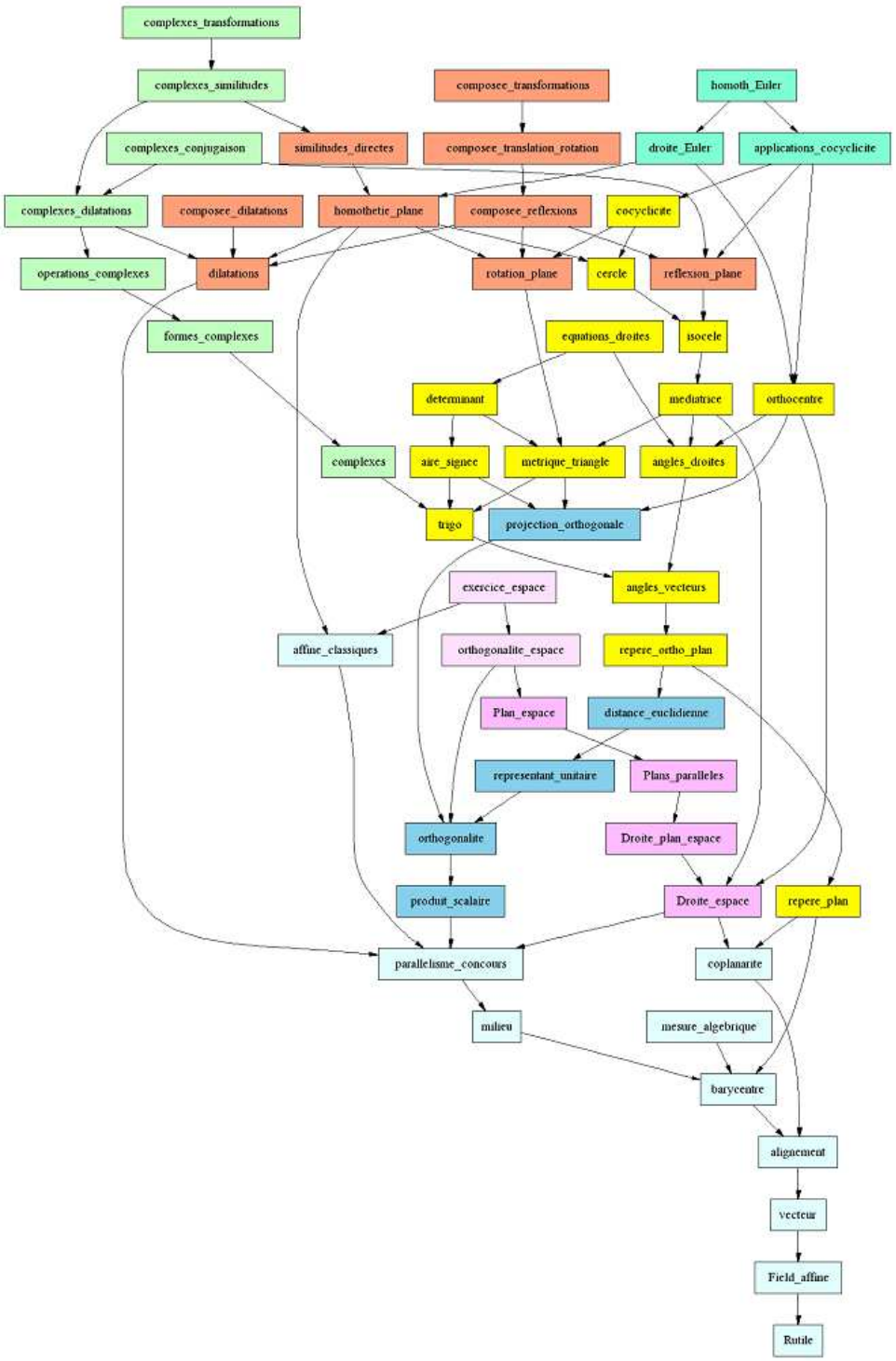

FIG. 14 – Graphe de dépendance des fichiers du développement

- alignement, coplanarité,
- droites paralléles, droites concourantes, point de concours des médianes d'un triangle,
- des théorèmes classiques : droite des milieux, Thalès, Desargues,
- étude des dilatations (homothéties, translations et de leurs composées).

A partir de ces notions, on peut se spécialiser dans les dimensions 2 et 3.

6.3 Géométrie affine dans l'espace

Dans cette section, ont été démontrées les propriétés de parallélisme et d'incidence des droites et des plans de l'espace :

- positions relatives de 2 droites dans l'espace : parallèles, sécantes ou non coplanaires,
- positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace : droite parallèle au plan (strictement ou incluse dans le plan) ou droite et plan sécants,
- positions relatives de 2 plans : plans parallèles ou sécants suivant une droite
- théorèmes classiques de cours concernant l'étude d'incidence et de parallélisme de plusieurs droites et plans.

Nous avons choisi d'expliciter dans la section 7.1, la démonstration du théorème du "toit" car c'est un bon exemple de démonstration faite dans cette classe de théorèmes de géométrie spaciale.

6.4 Géométrie euclidienne : généralités

Dans cette section, la structure affine de départ est enrichie par le produit scalaire (utilisable en dimension 2 et 3) et les notions qui en dépendent :

- produit scalaire : forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée,
- orthogonalité de vecteurs, droites orthogonales,
- projection orthogonale sur une droite, expression du produit scalaire avec les projetés orthogonaux,
- distance euclidienne et ses propriétés,
- vecteurs unitaires.

A partir de ces notions, on peut se spécialiser dans les dimensions 2 et 3.

6.5 Orthogonalité en dimension 3

Dans cette section, on reprend les notions de parallélisme et d'incidence des droites et des plans et on ajoute celle d'orthogonalité dans l'espace :

- droites et plans orthogonaux,
- application : un exercice donné au baccalauréat S.

L'énoncé de cet exercice et la façon dont il a été résolu sont détaillés dans la section 7.2, les méthodes employées étant caractéristiques des résolutions de problème d'orthogonalité dans l'espace.

6.6 Géométrie euclidienne plane

C'est la partie la plus importante des programmes de lycée car y sont traités les problèmes classiques de la "géométrie des configurations planes" :

- objets définis avec la distance euclidienne : médiatrice, cercle, triangle isocèle,
- théorèmes classiques de la géométrie euclidienne plane : Pythagore, théorème de la médiane,
- repère affine, repère orthogonal, repère orthonormal,
- abscisse et ordonnée d'un point (d'un vecteur) dans un repère (respectivement une base),
- expression du produit scalaire de 2 vecteurs (de la distance euclienne) dans une base orthonormée,
- angles orientés de vecteurs non nuls,
- angles orientés de droites, caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité avec des angles,
- cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs, d'un réel,
- étude de la parité et de la périodicité des fonctions trigonométriques,
- formules d'addition et de duplication de sinus et cosinus,
- repérage polaire d'un point dans le plan, passage du repérage cartésien au repérage polaire,
- expression du produit scalaire de deux vecteurs avec un cosinus,
- relations métriques dans le triangle : ligne trigonométrique dans un triangle rectangle, théorème d'Al-Kashi, théorème des sinus,
- caractérisation de la cocyclicité de 4 points avec des angles orientés,
- aire signée d'un parallélogramme, d'un triangle,
- déterminant de 2 vecteurs,
- vecteur directeur, vecteur normal d'une droite, équations cartésiennes de droites dans un repère.

On trouvera détaillée dans la section 7.3, une justificaton de la formalisation des angles orientés de vecteurs non nuls et des définitions utilisées pour la trigonométrie.

6.7 Transformations planes

Sont étudiées systématiquent les propriétés des transformations en particulier les propriétés de conservation, et les composées de ces transformations :

- étude des rotations planes : définition, réciproque, conservation des distances, des angles, image d'un bipoint,
- étude des symétries axiales ou réflexions : définition, réciproque, conservation des distances, inversion des angles,
- composée de 2 symétries axiales : translation ou rotation,
- recherche de la composée d'une translation et d'une rotation, ou de 2 rotations en utilisant les théorèmes de décomposition en produit de symétries axiales,
- symétrie glissée : composée d'une translation et d'une symétrie axiale,
- composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre,
- étude des similitudes directes : définition, réciproque, multiplication des distances, conservation des angles, image d'un bipoint.

On trouvera un théorème qui caractérise la composée de 2 rotations, ainsi que les grandes lignes de sa démonstration dans la section 7.4.

6.8 Applications : théorèmes classiques

Comme applications des théorèmes de cours précédents, on peut démontrer des théorèmes classiques :

- les théorèmes qui utilisent la caractérisation de la cocyclicité : théorème de Miquel, des symétriques de l'orthocentre, de la droite de Simson,
- le théorème de la droite d'Euler et du cercle des neuf points qui utilisent des théorèmes variés du développement.

Dans un travail précédent [9], nous avons donné des démonstrations de théorèmes de la première classe de théorèmes. Ces démonstrations ont été reprises "dans l'esprit" mais sont différentes dans le sens où les objets primitifs ne sont plus les mêmes. On donnera dans la section 7.5, le schéma de la démonstration du théorème du cercle des neuf points.

6.9 Les nombres complexes

Ce chapitre utilise la géométrie euclidienne et les transformations planes :

- coordonnées cartésiennes et polaires d'un point dans un repère orthonormé direct, affixe d'un point, affixe d'un vecteur,
- forme algébrique d'un nombre complexe : partie réelle et partie imaginaire,
- forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul : module et argument,
- somme, produit, quotient des nombres complexes, structure de corps,
- conjugaison et symétrie axiale,
- interprétations géométriques des module et argument d'une différence, d'un quotient de nombres complexes
- écriture complexe des translations, homothéties, rotations, similitudes directes,
- caractérisation géométrique des transformations d'écriture complexe : $z \mapsto az + b$.

Parmi les méthodes de démonstration utilisées au lycée, figure l'utilisation des nombres complexes. Dans la section 7.6, l'énoncé d'un exercice et la façon dont il a été résolu sont détaillés, les méthodes employées étant caractéristiques des résolutions de problème utilisant les nombres complexes.

7 Quelques exemples de théorèmes et démonstrations

Il s'agit dans cette section de donner un échantillon d'exemples de techniques de preuves très différentes les unes des autres, qui utilisent des lemmes démontrés dans les différents "chapitres" décrits précédemment. Toutes les démonstrations faites en Coq sont "inspirées" de celles faites au lycée.

Du point de vue de la forme, si nous sommes capables de montrer à l'écran des énoncés et des figures "satisfaisants", il n'est pas imaginable pour expliquer une démonstration, de donner à lire le script d'une preuve Coq. Cependant, le lecteur intéressé trouvera les sources de Coq à l'adresse suivante :
`ftp ://ftp-sop.inria.fr/lemme/Frederique.Guilhot/geometrie.tar.gz`.

Un outil en cours de développement permettra de générer automatiquement à partir du script de preuve un texte d'explications en français (ou en anglais) "compréhensible" par un utilisateur non expert de Coq.

7.1 Un exemple de théorème de géométrie affine dans l'espace

Ce qui nous intéresse ici dans ce théorème dit du "toit", c'est que sa démonstration est très caractéristique des démonstrations que l'on fait classiquement dans l'espace. Il s'agit de montrer que deux plans sécants contenant deux droites parallèles se coupent suivant une droite parallèle aux deux premières. La figure 15 donne l'énoncé en Coq de ce théorème et

une figure réalisée avec GéospaceW. On remarque que pour définir une droite, on utilise deux points distincts et pour définir un plan, on utilise 3 points non alignés.

Théorème **toit**:
Soient A, B, C, D, E et F des points.
Si **A, B et C ne sont pas alignés,**
D, E et F ne sont pas alignés,
A ≠ B,
D ≠ E,
(DE) // (AB),
et les plans (ABC) et (DEF) ne sont pas parallèles
alors
il existe un point I et un point J tels que : I ≠ J et (AB) // (IJ) et (IJ) ⊂ (ABC) et (IJ) ⊂ (DEF).

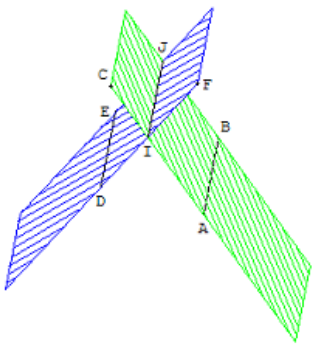

FIG. 15 – Théorème du toit : énoncé (Pcoq) et figure correspondante (GéospaceW)

La preuve faite en Coq "suit" la démonstration classique qui utilise un raisonnement par l'absurde, comme souvent dans les démonstrations de géométrie dans l'espace où on s'intéresse aux positiitions relatives de deux objets (deux plans, deux droites ou un plan et une droite). Ici, les étapes de la démonstration sont les suivantes :

On s'intéresse aux positions relatives de la droite (DF) et du plan (ABC), on a 2 cas : soit (DF) et (ABC) sont parallèles soit ils se coupent.
supposons que (DF) et (ABC) soient parallèles (1)
comme les droites (DE) et (AB) sont parallèles,
la droite (DE) et le plan (ABC) sont parallèles (2)
les points D, E et F n'étant pas alignés, les droites (DE) et (DF) sont sécantes (3)
en utilisant (1), (2) *et* (3), *on en déduit que les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles, ce qui est contradictoire.*

on a donc montré que la droite (DF) et le plan (ABC) se coupent,
on appelle I leur point d'intersection,
on a $I \in (DEF)$ car $I \in (DF)$
donc I est un point de la droite d'intersection des plans (ABC) et (DEF) (4)
on construit le point J tel que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$,
on a $(IJ)//(AB)$ (5) *car $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$,*
donc $(IJ)//(DE)$ (6) *par transitivité du parallélisme ,*
on a $J \in (ABC)$ (7) *car $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$*
et $J \in (DEF)$ (8) *car $I \in (DEF)$ et $(IJ)//(DE)$,*

on a $I \neq J$ (9) *car* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ *et* $A \neq B$
en utilisant (4), (7), (8) *et* (9) *, on en déduit que*
(IJ) *est la droite d'intersection des plans* (ABC) *et* (DEF).

7.2 Un exercice de géométrie dans l'espace donné au bac S.

Il s'agit de démontrer qu'étant donné un cube $ABCDEFGH$, la droite (DF) et le plan (EBG) sont orthogonaux et se coupent au point I qui est le centre de gravité du triangle EBG. La figure suivante donne l'énoncé en Coq et une figure réalisée avec GéospaceW.

Théorème **the_cube :**
Soient A, B, C, D, E, F, G, H et I des points.
Si **ABCDEFGH est un cube,**
et I est le centre de gravité du triangle EBG
alors **F, D et I sont alignés et (FD) ⊥ (EBG).**

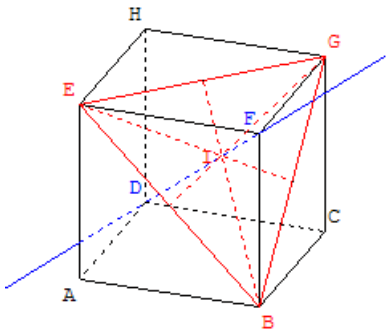

FIG. 16 – Enoncé de l'exercice du bac (Pcoq) et figure correspondante (GéospaceW)

Pour résoudre ce type d'exercice, on utilise des méthodes de :

- calcul vectoriel et propriétés du barycentre, pour la partie affine de la démonstration,

  soit I *le centre de gravité du triangle* EBG*, les propriétés du barycentre donne :*
  I *appartient au plan* (EBG) *et* $3\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG}$ *puis,*
  en utilisant les parallélogrammes qui donnent des égalités de vecteurs, on en déduit que $3\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FD}$
  ce qui permet de conclure que (DF) *passe par le point* I.

- utilisation du produit scalaire et d'un théorème de caractérisation de droite et plan orthogonaux, pour la partie euclidienne de la démonstration,

on exprime tous les vecteurs en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$, *on a :*
$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$
en utilisant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *sont unitaires et* 2 *à* 2 *orthogonaux et les propriétés du produit scalaire, on obtient :*
$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ *et* $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$
les droites (EB) *et* (EG) *étant sécantes dans le plan* (EBG),
on en déduit que la droite (DF) *et le plan* (EBG) *sont orthogonaux.*

7.3 Formalisation des angles orientés et de la trigonométrie

Il est écrit explicitement dans les programmes officiels : "la définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour x réel quelconque se fera en *enroulant* $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique". Une illustration de cette "vision" est donnée dans la figure suivante extraite du document d'accompagnement du programme de première [10].

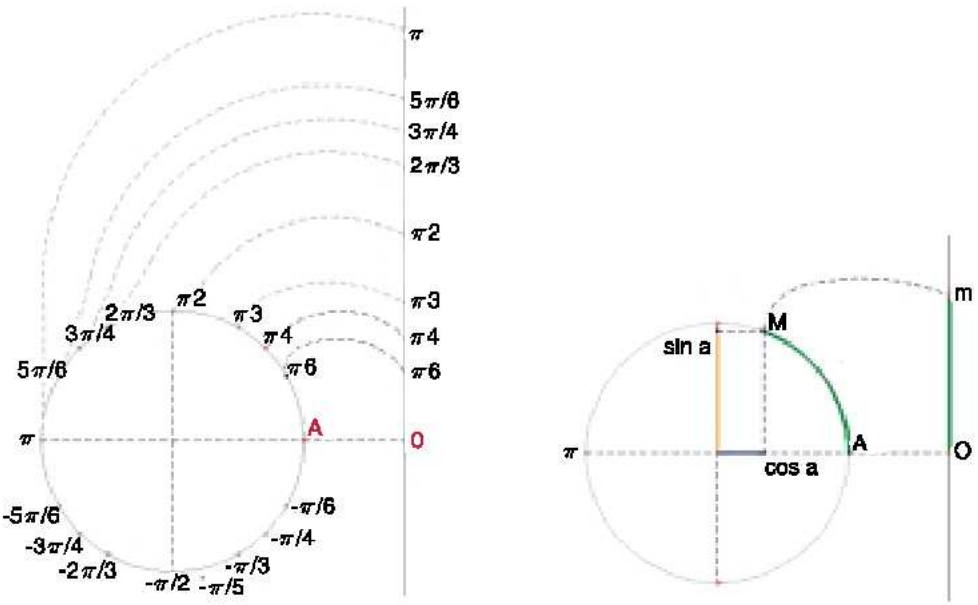

FIG. 17 – *Enroulement* de $\mathbb{R}$ et projections pour définir le sinus et le cosinus d'un réel

D'autre part, la notion d'angle orienté de vecteurs non nuls est abordée, on définit d'abord l'angle orienté de 2 vecteurs unitaires pour généraliser ensuite à deux vecteurs non nuls quelconques. On montre, en utilisant l'*enroulement de* $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique que

ces angles ont plusieurs mesures possibles. De plus, on définit l'addition des angles orientés et on admet la relation de Chasles.

Ce qui est formalisé en Coq comme suit, on définit :

- le type `AV` qui représente l'ensemble des angles orientés,
- `cons_AV` un constructeur d'angles orientés à partir de deux vecteurs,
- `image_angle` une fonction de `R` dans `AV` qui formalise l'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique,
- `plus` l'addition des angles orientés de vecteurs non nuls.

On donne une collection d'axiomes comme ils apparaissent à l'écran avec Pcoq dans la figure suivante :

Variables **AV : Type.**
Variables **cons_AV : PP => PP => AV.**
Variables **plus : AV => AV => AV.**
Variables **opp : AV => AV.**

Axiom **existence_AB_unitaire** : $\exists A : PO.\ \exists B : PO.\ AB = 1.$

Tout angle a un représentant non unique parmi les angles orientés de vecteurs unitaires

Axiom
existence_representant_cons :
$\forall a : AV.\ \forall A, B, C : PO.\ AB = 1 \Rightarrow \exists D : PO.\ CD = 1 \wedge a = (\overrightarrow{A\,B}, \overrightarrow{C\,D}).$

Tout angle orienté de vecteurs non nuls est égal à l'angle orienté des vecteurs unitaires correspondants

Axiom
angles_representants_unitaires :
$\forall A, B, C, D, E, F : PO.\ A \neq B \Rightarrow C \neq D \Rightarrow (\overrightarrow{A\,B}, \overrightarrow{C\,D}) = (\overrightarrow{A\,B_1}, \overrightarrow{C\,D_1}).$

Axiom **Chasles** : $\forall A, B, C, D, E, F : PO.\ A \neq B \Rightarrow C \neq D \Rightarrow E \neq F \Rightarrow (\overrightarrow{A\,B}, \overrightarrow{C\,D}) + (\overrightarrow{C\,D}, \overrightarrow{E\,F}) = (\overrightarrow{A\,B}, \overrightarrow{E\,F}).$

Axiom **def_opp** : $\forall A, B, C, D : PO.\ A \neq B \Rightarrow C \neq D \Rightarrow -(\overrightarrow{A\,B}, \overrightarrow{C\,D}) = (\overrightarrow{C\,D}, \overrightarrow{A\,B}).$

FIG. 18 – Angles orientés de vecteurs unitaires et de vecteurs non nuls quelconques

On donne dans la figure 19, une autre collection d'axiomes qui décrivent l'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique. Ces axiomes tels qu'ils apparaissent à l'écran avec Pcoq peuvent être interprétés en termes de "mesures d'angles". On y trouve traités les cas particuliers des angles droits et des angles plats.

Enroulement de R sur le cercle trigonométrique

Variables image_angle : R => AV.

Axiom AV0_zero : AV0 = $\widehat{0}$.

Axiom
unicite_representant_angle_nul :
∀A, B, C : PO. AB = 1 => AC = 1 => $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{0}$ => C = B.

Axiom tout_angle_a_une_mesure : ∀A, B, C, D : PO. A ≠ B => C ≠ D => ∃x : R . $\widehat{x} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$.

Compatibilité des opérations

Axiom add_mes_compatible : ∀x, y : R. $\widehat{x + y} = \widehat{x} + \widehat{y}$.

Axiom mes_opp : ∀x : R. $\widehat{-x} = -\widehat{x}$.

Cas particuliers : angles plats et angles droits

Variables π/2 : R.

Definition π := π/2 + π/2.

Definition 2π := π + π.

Axiom angle_plat : ∀A, B : PO. A ≠ B => $\widehat{\pi} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})}$.

Axiom pisurdeux_droit : ∀A, B, C : PO. $\widehat{\pi/2} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ => $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Axiom
droit_direct_ou_indirect :
∀A, B, C : PO. A ≠ B =>
A ≠ C =>
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ => $\widehat{\pi/2} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \vee \widehat{-\pi/2} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$.

FIG. 19 – Mesures d'angles orientés de vecteurs non nuls

On peut alors formaliser la notion de repère orthonormé direct, puis définir les fonctions cosinus et sinus en utilisant les projetés orthogonaux d'un point du cercle trigonométrique sur les axes comme l'illustre la figure ci-dessous.

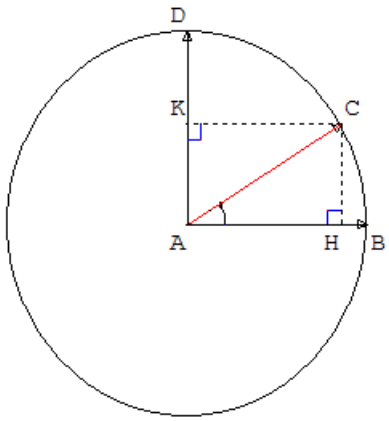

FIG. 20 – Utilisation du cercle trigonométrique pour définir le cosinus et le sinus d'un angle

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base orthonormée directe et $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur unitaire, on appelle H et K les projetés orthogonaux de C sur la droite (AB), respectivement sur la droite (AD). Par définition, on a $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \overline{AH}$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \overline{AK}$.

Pour plus de facilité pour faire les preuves, on a utilisé les produits scalaires, en effet :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AH}$ car $\overrightarrow{AB}$ est unitaire et,

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = \overline{AD} \cdot \overline{AK} = \overline{AK}$ car $\overrightarrow{AD}$ est unitaire.

La collection d'axiomes qui définissent le sinus et le cosinus d'un angle orienté et d'un réel est donnée dans la figure 21.

Le plan est orienté et on utilise le cercle trigonométrique

```
Definition repere_orthonormal_direct :=
    λO, I, J : PO. π/2 = (O I, O J) ∧ (O I · O I = 1 ∧ O J · O J = 1).
Variables cos : R => R.
Variables sin : R => R.
Variables Cos : AV => R.
Variables Sin : AV => R.
```

cosinus et sinus d'un angle (ou d'un réel) sont obtenus par projections du point image du cercle trigonométrique sur les axes de coordonnées

```
Axiom def_cos : ∀A, B, C : PO. ∀x : R. AB = 1 =>
                                  AC = 1 => x = (A B, A C) => cosx = A B · A C.

Axiom
    def_sin :
    ∀A, B, C, D : PO.
    ∀x : R. AB = 1 =>
            AC = 1 =>
             x = (A B, A C) => (repere_orthonormal_direct A B D) => sinx = A C · A D.

Axiom def_Cos : ∀A, B, C : PO. AB = 1 => AC = 1 => Cos (A B, A C) = A B · A C.

Axiom
    def_Sin : ∀A, B, C, D : PO.
            AB = 1 =>
              AC = 1 => (repere_orthonormal_direct A B D) => Sin (A B, A C) = A C · A D.
```

FIG. 21 – Définition des fonctions sinus et cosinus avec Pcoq

7.4 Caractérisation de la composée de 2 rotations planes

Théorème **composee_rotation_IJ_rotation :**
Soient I et J deux points.
Soient a et b deux réels.
Si **a + b ≠ 0**
alors
il existe un point K tel que : quels que soient les points M, M1 et M2,
Si **M1 est l'image du point M par la rotation de centre I et d'angle a,**
et M2 est l'image du point M1 par la rotation de centre J et d'angle b
alors **M2 est l'image du point M par la rotation de centre K et d'angle a + b.**

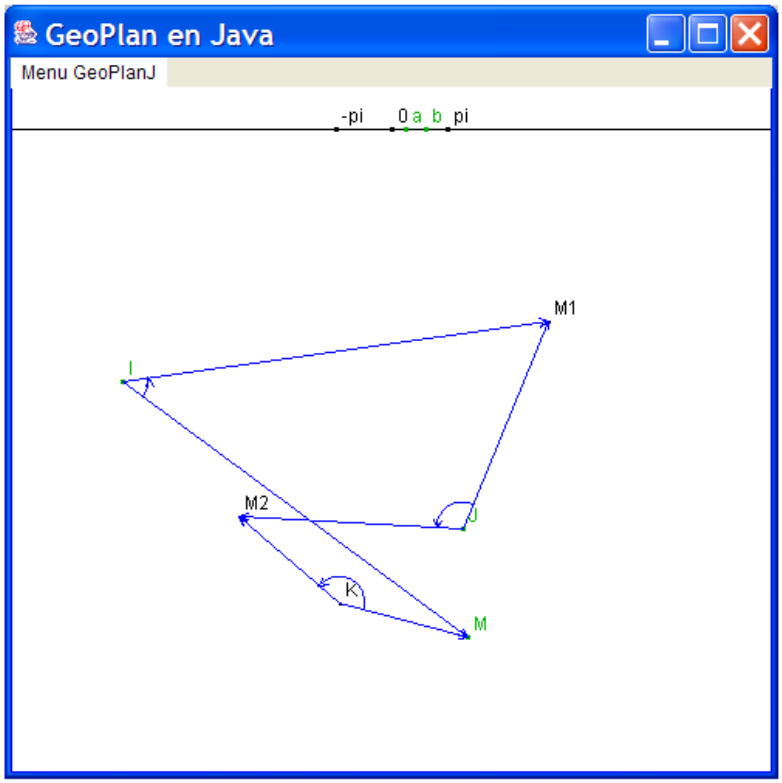

FIG. 22 – Composéee de 2 rotations : énoncé et figure générée par GeoView

Il s'agit de démontrer qu'étant données la rotation de centre I d'angle de mesure a et la rotation de centre J d'angle de mesure b, dans le cas où la somme des angles (de mesure

$a + b$) n'est pas l'angle nul, alors la composée de ces 2 rotations est une autre rotation de centre K et d'angle de mesure $a+b$. La figure 22 donne l'énoncé en Coq de ce théorème et la figure générée par GeoView, on remarque que les réels a et b sont représentés dans la figure par des points libres sur une droite. On peut déplacer ces points à la souris, ce qui entraine le déplacement des points dont la position dépend des réels a et b, c'est-à-dire ici K, M_1 et M_2.

Ce théorème conclut sur l'existence d'un point K qui a certaines propriétés, la démonstration consiste donc à le "construire". Nous avons choisi d'utiliser la méthode de décomposition des rotations en produit de 2 symétries axiales.

Les étapes de la démonstration en Coq sont les suivantes :

- *on construit le point D image de J par la rotation de centre I et d'angle -* $\frac{a}{2}$
- *on a alors :* $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IJ}) = \frac{a}{2}$ *et* $rot(I, a) = s_{(IJ)} \circ s_{(ID)}$
- *on construit le point C image de I par la rotation de centre J et d'angle* $\frac{b}{2}$,
- *on a alors :* $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JC}) = \frac{b}{2}$ *et* $rot(J, b) = s_{(JC)} \circ s_{(JI)}$
- *en utilisant les composées on obtient :* $rot(J,b) \circ rot(I,a) = (s_{(JC)} \circ s_{(JI)}) \circ (s_{(IJ)} \circ s_{(ID)})$
- *puis, comme* $s_{(IJ)}$ *est une involution :* $rot(J,b) \circ rot(I,a) = s_{(JC)} \circ s_{(ID)}$
- *on montre que les droites* (ID) *et* (JC) *ne sont pas parallèles car l'angle de mesure* $a + b$ *n'est pas l'angle nul*
- *on appelle K le point d'intersection de ces droites, et en utilisant les propiétés des angles orientés, en particulier la relation de Chasles, on obtient :*
  $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JC}) = (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IJ}) + (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JI}) + (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JC}) = \frac{a}{2} + \pi + \frac{b}{2}$
  et donc $2(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JC}) = a + b$
- *on peut conclure que* $s_{(JC)} \circ s_{(ID)} = rot(K, a+b)$ *donc* $rot(J,b) \circ rot(I,a) = rot(K, a+b)$, *ce qui achève la démonstration.*

Une autre méthode de démonstration consiste à utiliser les écritures complexes des rotations, ce qui est aussi possible avec notre développement.

7.5 Théorème du cercle des neuf points

Ce théorème est un grand classique de la géométrie euclidienne plane, Euler et Feuerbach ont démontré que dans un triangle ABC, le cercle circonscrit aux milieux des côtés A', B' et C' passent aussi par le pied des 3 hauteurs du triangle ABC et par les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$ où H désigne l'orthocentre du triangle ABC. De plus, ce cercle a pour centre le milieu I du segment $[OH]$, où O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La figure 23 donne l'énoncé en Coq de ce théorème et la figure générée par GeoView.

Théorème **cercle_neuf_points** :
Soient A, B, C, A', B', C', O, G, H, I, J, K, L, H1, H2 et H3 des points.
Si **ABC est un triangle,**
A' est le milieu du segment [BC],
B' est le milieu du segment [AC],
C' est le milieu du segment [AB],
G est le centre de gravité du triangle ABC,
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC,
H est l'orthocentre du triangle ABC,
I est le milieu du segment [OH],
J est le milieu du segment [AH],
K est le milieu du segment [BH],
L est le milieu du segment [CH],
H1 est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC),
H2 est le projeté orthogonal de B sur la droite (CA),
et H3 est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
alors
J appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
H1 appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
K appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
H2 appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
L appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C' et
H3 appartient au cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

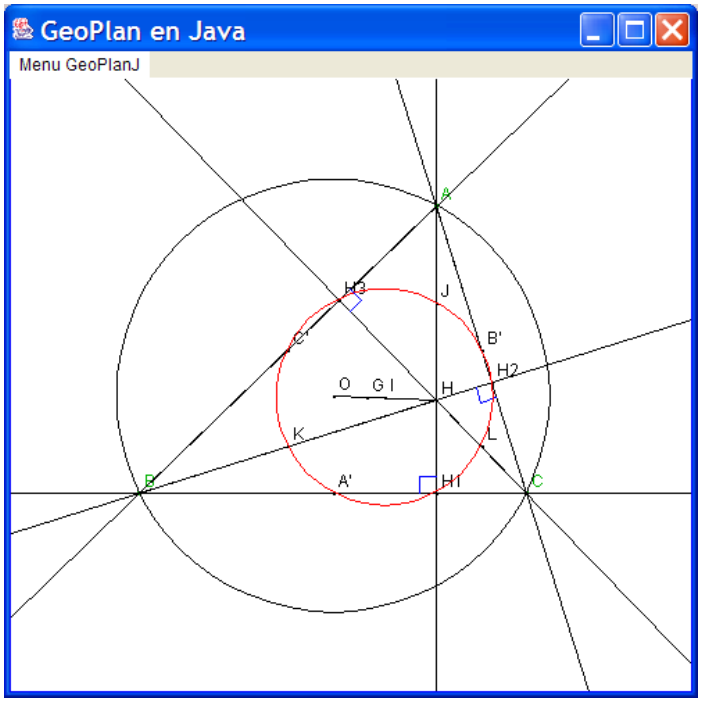

FIG. 23 – Le cercle des neufs points : énoncé avec Pcoq et figure générée par GeoView.

La démonstration assez longue de ce théorème (environ 400 lignes) est intéressante dans le sens où elle fait appel à des théorèmes de "chapitres" très divers de la bibliothèque :

- calcul vectoriel,
- utilisation des propriétés des barycentres, en particulier celles du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle,
- traduction en termes d'homothéties d'égalités vectorielles,
- utilisation des propriétés des homothéties et symétries centrales,
- calcul de produits scalaires et traduction en termes d'orthogonalité,
- propiétés des médiatrices et des hauteurs d'un triangle,
- utilisation des angles orientés.

Voici les étapes de cette démonstration : *on appelle G, O et H respectivement le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC.*

- *en utilisant les propriétés du barycentre, on a : 3* $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,
- *on a de la même façon : si A' est le milieu de $[BC]$,* $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OA'}$,
- *si on appelle M le point tel que* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, *on a* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ *donc* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OA'}$,
- *la droite (OA') étant la médiatrice de $[BC]$, on en déduit que (AM) est perpendiculaire à (BC),*
- *de même pour (BM) et (AC) et donc M est le point de concours de 2 hauteurs donc est l'orthocentre du triangle ABC, et on a :* $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$,
- *on traduit l'égalité* $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ *ainsi : l'homothétie notée h_G, de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme H en O,*
- *or l'homothétie h_G transforme aussi A en A' : propriété du centre de gravité du triangle,*
- *on a* $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ *et si on appelle I le milieu de $[OH]$, on a h_G qui transforme O en I,*
- *O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on en déduit que le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et que* $\overrightarrow{IA'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA}$ *(propriétés de l'homothétie h_G)*
- *si on appelle J le milieu de $[AH]$, on a* $\overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AH}$,
- *en utilisant l'image (A', O) du bipoint (A, H) par h_G on obtient* $\overrightarrow{A'O} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AH}$, *donc* $\overrightarrow{JH} = -\overrightarrow{A'O}$

- *O ayant pour image H par la symétrie de centre I, on déduit de* $\overrightarrow{JH} = -\overrightarrow{A'O}$ *que A' a pour image J par la symétrie de centre I,*
- *I étant le centre du cercle circonscrit au triangle* $A'B'C'$*, on en déduit que* J *appartient à ce cercle,*
- *si on appelle* H_1 *le pied de la hauteur issue de A, on a* $(JH_1) \perp (IH_1)$ *donc* H_1 *appartient au cercle de diamètre* $[A'J]$*,*
- *finalement, on a montré que J et* H_1 *appartiennent au cercle circonscrit à* $A'B'C'$*,*
- *on peut faire le même raisonnement en utilisant les hauteurs issues de B et de C, on obtient ainsi le résultat voulu : neuf points* $A', B', C', J, H_1, K, H_2, L$ *et* H_3 *sur le cercle de centre I.*

7.6 Utilisation des nombres complexes pour l'étude des configurations

Pour résoudre des exercices sur les configurations dans le plan, une méthode consiste à utiliser un repère orthonormé direct arbitraire et les affixes des points de la figure dans ce repère. On travaille alors avec les nombres complexes en traduisant les termes de l'énoncé en contraintes sur les affixes des points.

Prenons l'exemple de cet exercice : étant donnés deux triangles isocèles rectangles directs ABC et ADE tels que $B \neq D$ alors les droites (BD) et (CE) sont orthogonales et on a égalité des longueurs : $BD = CE$. La figure 24 donne l'énoncé en Coq de cet exercice et la figure générée par GeoView.

La preuve qui a été faite en Coq "suit" les étapes suivantes :

- *on considère les affixes respectives* a, b, c, d *et* e *des points* A, B, C, D *et* E*, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct arbitraire,*
- *on traduit les hypothèses* ABC *et* ADE *triangles isocèles rectangles directs, en utilisant l'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *par :*
  $c - a = i(b - a)$ *et* $e - a = i(d - a)$ *,*
- *en soustrayant membre à membre, on obtient* $e - c = i(d - b)$*, ce qui donne :*
  $\frac{e-c}{d-b} = i$ *car* $d \neq b$
- *en passant aux modules et aux arguments on obtient :*
  $|\frac{e-c}{d-b}| = |i| = 1$ *et* $\arg(\frac{e-c}{d-b}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$*.*
- *ce qui s'interprète géométriquement en termes d'égalité de longueurs et d'angles par :*
  $CE = BD$ *et* $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{2}$

Bien entendu, la méthode de démonstration qui consiste à utiliser les propriétés de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est aussi possible avec notre développement.

Théorème **deux_isocele_rectangle_direct:**
Soient A, B, C, D et E des points.
Si **B ≠ D,**
ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A,
et ADE est un triangle isocèle rectangle direct en A
alors **BD = CE et** $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{2}$.

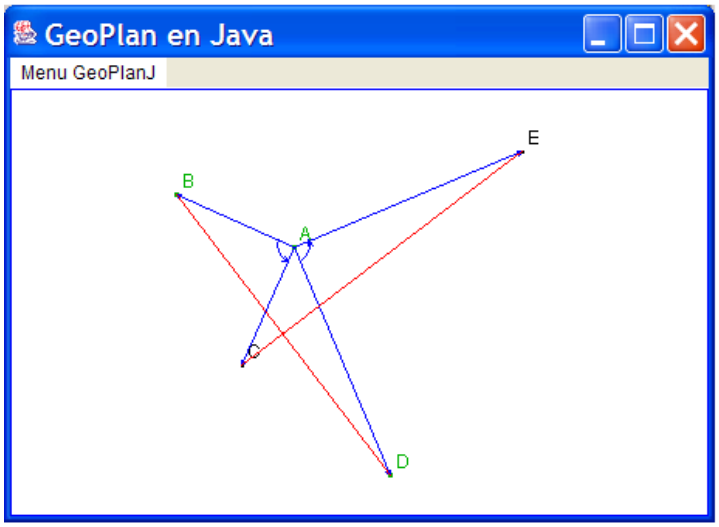

FIG. 24 – Enoncé d'un exercice et figure générée par GeoView

8 Difficultés rencontrées

8.1 Représentation des droites

Dans l'axiomatisation choisie, les objets primitifs sont les points et les vecteurs. Définir une droite revient à se donner deux points distincts, le nombre de choix des 2 points étant infini, la manipulation des droites n'est pas facilitée. Listons quelques problèmes rencontrés :

- si dans une preuve on veut par exemple remplacer la droite (AB) par la droite (CD), il faut d'abord montrer que $C \neq D$, puis que les points A, B et C sont alignés et enfin que les points A, B et D sont alignés.
- l'application de lemmes concluant sur l'alignement de 3 points peut engendrer à son tour des buts du type "points distincts" et/ou "alignement de 3 points".

- suivant le contexte, montrer l'alignement de 3 points est plus ou moins facile : on peut avoir à faire du calcul vectoriel (contexte purement affine), ou avoir à montrer par exemple qu'un angle de droites est nul (contexte euclidien), ce qui peut être difficile.
- pour les mêmes raisons, montrer le non-alignement de 3 points n'est pas toujours une trivialité.
- si dans une preuve on veut par exemple montrer que 2 droites (AB) et (CD) sont parallèles (ou sécantes), il faut faire une étude par cas : soit les 4 points A, B, C et D sont *en position générale* i.e. il n'existe pas de triplets de points alignés, soit on est dans un *cas dégénéré* i.e. des points sont confondus ou alignés.

On comprend que les démonstrations faites en Coq deviennent rapidement très lourdes, dès qu'il y a un nombre important de points et de droites dans les configurations étudiées. Or, les difficultés soulevées ici sont, dans les démonstrations faites au lycée, passées sous silence parce qu'on considère soit que des propriétés sont "évidentes" au niveau de maitrîse où l'on se trouve, soit que l'étude des cas dégénérés n'a pas d'intérêt, toute l'attention étant portée sur l'étude des cas génériques.

Prenons un exemple pour illustrer ce qui précéde. Pour démontrer que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes, il y a 2 choses à montrer. La première qui dit que si un point appartient à deux hauteurs, alors il appartient aussi à la troisième, la deuxième assure l'existence d'un tel point c'est-à-dire que 2 hauteurs sont en position d'être sécantes. On trouve rarement dans la littérature d'explicitation de cette deuxième partie qui est souvent implicitement présupposée et seule la première partie est expliquée. En Coq on a traité les 2 parties, la première, facile, se fait avec des calculs de produits scalaires, la deuxième, plus difficile, utilise des arguments d'angles pour démontrer que les hauteurs ne peuvent être parallèles dans le cas où les sommets du triangle ne sont pas alignés.

8.2 Etude des cas dégénérés des configurations

Dans le paragraphe précédent, nous avons parlé de points *en position générale* et de *cas dégénérés* et de la lourdeur des preuves due à l'étude de ces cas dégénérés. Dans beaucoup des preuves que nous avons faites, l'étude du *cas générique* (cas le plus intéressant) ne représente qu'une part mineure de la preuve entière.

Prenons l'exemple de la preuve de caractérisation de la composition de 2 rotations dont les grandes lignes exposées dans la section 7.4 ne concernent que le *cas générique*. La preuve en Coq oblige à étudier tous les cas :

I et J étant deux points donnés, la preuve commence par construire le point D image de J par la rotation de centre I et d'angle - $\frac{a}{2}$ et le point C image de I par la rotation de centre J et d'angle $\frac{b}{2}$ (voir figure 25).

Il faut alors étudier les cas suivants :

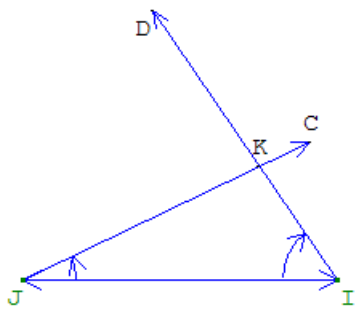

FIG. 25 – Points construits dans la démonstration "en position générale"

- le cas particulier : $I = J$,
- le cas général : $I \neq J$, il faut alors montrer que $I \neq D$ et $J \neq C$ puis il faut montrer que les droites (ID) et(JC) sont sécantes en un point qu'on appelle K. Il faut alors étudier :
  - le sous-cas particulier : $I = K$ (correspondant au cas : I, J et C alignés) et montrer alors que $J \neq K$
  - le sous-cas particulier : $J = K$ (correspondant au cas : I, J et D alignés) et montrer alors que $I \neq K$
  - puis enfin, le "cas générique" : $I \neq K$ et $J \neq K$.

Pour donner une idée de la longueur des différentes parties de la preuve, on peut par exemple compter les lignes du script de preuve. Ici, sur les 166 lignes du script de preuve, on a :

- 20 lignes pour la construction des points D etC,
- 3 lignes pour régler le cas particulier $I = J$,
- 8 lignes pour montrer que $I \neq D$ et $J \neq C$,
- 29 lignes pour montrer que l'hypothèse : $(ID)//(JC)$ est absurde
- 2 lignes pour la construction du point K,
- 23 lignes pour régler le cas particulier $I = K$ (correspondant au cas : I, J et C alignés),
- 23 lignes pour régler le cas particulier $J = K$ (correspondant au cas : I, J et D alignés),
- 58 lignes pour régler le cas générique : $I \neq J$, $I \neq K$ et $J \neq K$.

8.3 Automatisation et utilisation de tactiques

L'utilisation d'un assistant à la preuve comme Coq doit permettre à un élève de construire et d'organiser son raisonnement. Il est important dans une démonstration de dégager les arguments "essentiels" de ceux qui peuvent être considérés comme "évidents" à son niveau.

Le niveau de détail qu'exige le système Coq n'est pas adapté à cet objectif. Pour pallier ce défaut, il faut tendre vers l'automatisation de certaines tâches : en particulier l'application de lemmes triviaux et les réécritures triviales.

Pour automatiser certaines parties de nos preuves, nous avons utilisé une base de données de tactiques utilisée par *Auto* dans lesquels figurent beaucoup d'application de lemmes concluant sur l'alignement ou le non-alignement de 3 points et la distinction de 2 points. Mais en pratique, il reste encore du travail pour résoudre automatiquement tous les problèmes posés par les cas dégénérés exposés dans le paragraphe précédent.

En ce qui concernent les réécritures, nous avons utilisé des "tactiques utilisateur" comme celles décrites dans la section 5.2 : *RingPP*, *Ringvec, FieldPP* et *Fieldvec* qui simplifient le calcul vectoriel. La tactique *discrimine* est utilisée pour régler automatiquement (en utilisant la réécriture) les cas de points confondus. D'autres ont été utilisées pour prouver des égalités triviales de produit scalaire ou démontrer que des vecteurs sont orthogonaux : *Simplscal* et *Simplortho*. D'autres enfin permettent de montrer des égalités d'angles orientés en utilisant des égalités de leurs mesures dans $\mathbb{R}$.

Il n'est pas toujours aisé avec Coq de prouver des buts concluant sur une négation. Une tactique *contrapose* permet de faire des raisonnements par contraposition. D'autre part, des prédicats comme *triangle*, permettent de remplacer des conjonctions de négations comme on peut le voir dans la figure 27.

D'autres "tactiques utilisateur" permettent aussi d'ajouter automatiquement dans le contexte, des hypothèses qui assurent que deux points sont distincts ou que trois points sont non alignés. Prenons l'exemple de la preuve de l'existence du centre du cercle circonscrit à un triangle. Classiquement, on montre son existence en utilisant le fait que les 3 médiatrices de ce triangle sont sécantes. Dans la figure ci-dessous nous trouvons l'énoncé du théorème et le début de sa preuve : il s'agit au début de la démonstration, de construire les médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$.

```
Theorem existence_cercle_circonscrit:
 ∀A, B, C : PO. (triangle A B C) => ∃0 : PO . (circonscrit 0 A B C).
- Intros.
- (deroule_triangle A B C).
- (soit_mediatrice A B M K).
- (soit_mediatrice B C J L).
```

FIG. 26 – Un théorème et le début de sa preuve utilisant des "tactiques utilisateur"

Les tactiques *deroule_triangle* et *soit_médiatrice* qui apparaissent dans la preuve permettent d'ajouter des hypothèses. En particulier on sait que les points A, B et C ne sont pas alignés et que $A \neq B$ après l'éxécution de *(deroule_triangle ABC)*, puis après l'éxécution

de *(soit_médiatrice ABMK)*, on a construit le milieu M du segment $[AB]$ et K un autre point de la médiatrice du segment $[AB]$ et on sait que M et K sont distincts, et sont aussi distincts des extrémités du segment comme l'illustre la figure 27. Quand on avance dans la preuve la tactique *Try Trivial* permet ainsi de prouver automatiquement des buts.

Intros	*(deroule_triangle A B C)*	*(soit_mediatrice A B M K)*
		H10 : K ≠ B H4 : K ≠ A H9 : M = (milieu A B) H8 : (mediatrice A B K) H7 : M ≠ K K : PO H6 : B ≠ M H5 : A ≠ M M : PO
	H3 : B ≠ C H2 : A ≠ C H1 : ¬ (alignes A B C) H0 : A ≠ B	H3 : B ≠ C H2 : A ≠ C H1 : ¬ (alignes A B C) H0 : A ≠ B
H : (triangle A B C) C : PO B : PO A : PO	H : (triangle A B C) C : PO B : PO A : PO	H : (triangle A B C) C : PO B : PO A : PO

FIG. 27 – Enrichissement successif du contexte de preuve par l'utilisation de tactiques

9 Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce rapport montre qu'il a été possible de développer une bibliothèque de géométrie en Coq dédiée à l'enseignement au lycée. Nous avons montré que tant sur les questions de fond avec les techniques variées de démonstrations offertes illustrées par quelques exemples dans la section 7, que sur les questions de forme avec les possibilités offertes par l'interface graphique Pcoq et l'outil de visualisation GeoView, nous pouvions nous "approcher" de la démarche "naturelle" et proposer un outil adapté à l'enseignement. Mais beaucoup de travail reste à faire avant de pouvoir mettre cet outil entre les mains d'utilisateurs non experts de Coq.

Sur le fond, les difficultés soulevées dans la section 8 sur la représentation des droites et l'étude des cas dégénérés ne sont pas toutes réglées par l'automatisation et l'utilisation des "tactiques utilisateur". Plusieurs voies sont possibles à envisager :

- remettre tout à plat à partir de la formalisation des droites et de l'alignement de points et proposer une représentation où les objets *droites* seraient manipulés et auraient des propriétés en tant que tels. Il semble alors qu'outre le fait que cela représenterait un gros travail, ce changement de point de vue aurait pour effet de régler certains problèmes, mais pourraient engendrer de nouvelles difficultés par exemple avec les propriétés héritées des points appartenant à ces droites.
- proposer une version "simplifiée" des théorèmes de la bibliothèque mis à la disposition des élèves où les prémisses concernant les points distincts ou non alignés ne figureraient plus, les points étant considérés a priori *en position générale*. Cette solution radicale permettrait de se débarasser de l'étude des cas dégénérés. Le risque serait alors de voir un élève démontrer avec cet outil un résultat notoirement faux, ce qui aurait un effet désastreux.
- une solution moins radicale serait de garder cette bibliothèque telle quelle et de créer artificiellement une "hiérarchie" dans les buts à prouver. On pourrait imaginer un système qui reconnaisse les buts "inintéressants" et qui les prouvent de manière brutale. Ceci pourrait se faire en utilisant par exemple la "tactique utilisateur" suivante :

```
Axiom facile : (P : Prop) P.

Tactic Definition but_facile :=
Match Context With
| [|- ~ (alignes ? ? ?)] -> Apply facile
| [|- ~ (eqT PO ? ?)] -> Apply facile
| _ -> Idtac.
```

- une autre possibilité est de reprendre l'idée de reconnaître les buts "inintéressants" et de les prouver de façon plus élégante en utilisant une autre formalisation des mêmes objets géométriques dans laquelle les preuves sont automatiques (en utilisant la méthode de Shang-Ching Chou [6] par exemple).

Du point de vue de la forme, si nous pouvons exhiber des énoncés et des figures dynamiques "proches de ceux du lycée", il y a encore un travail à faire sur les scripts de preuve qui sont illisibles par un public non averti.

- un travail en cours de développement permettra d'intégrer à Pcoq un outil de génération automatique d'explications en langage naturel à partir d'un script de preuve. Ceci permettra de pouvoir "lire" une preuve déjà écrite sous forme d'un texte structuré en français ou en anglais.
- on peut aussi envisager de fournir d'autres outils de visualisation des preuves comme des schémas de démonstration, graphes orientés acycliques dans lesquels chaque pas de déduction est représenté par un sous-graphe. Dans la figure ci-dessous, nous donnons le schéma de démonstration d'un exercice, les 4 hypothèses sont représentées en haut en

jaune et la conclusion en bas en rouge, en gris apparaissent les justifications (lemmes utilisés ou tactique utilisée) des pas du raisonnement. On remarquera qu'il manque les "notations correctes" pour les vecteurs.

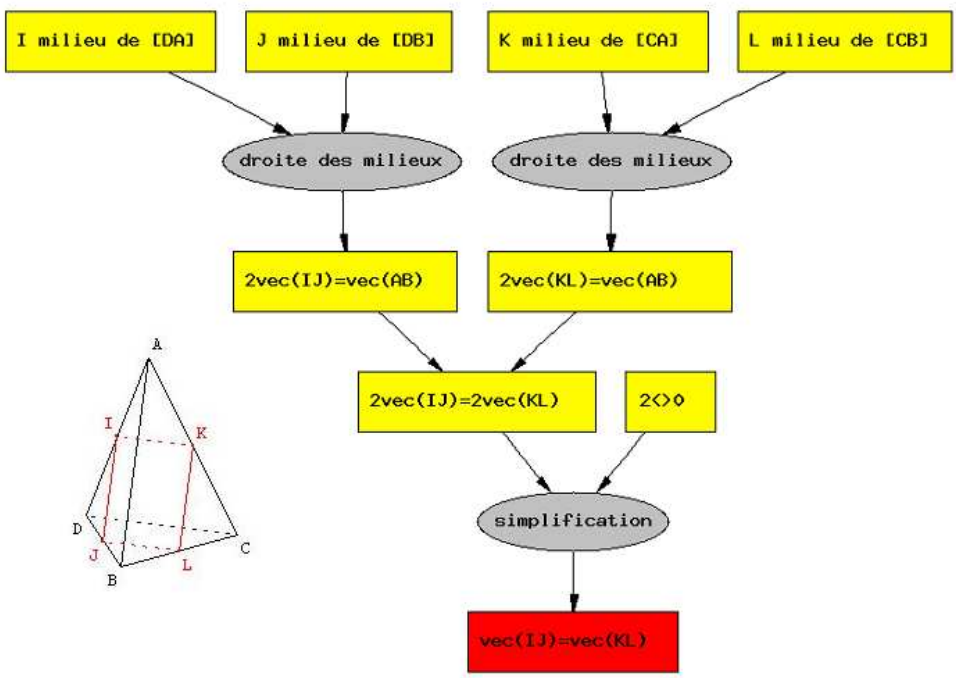

FIG. 28 – Exemple de schéma de démonstration

- il restera à fournir une boite à outils qui permette d'écrire les preuves "naturellement", sans utiliser les tactiques basiques de Coq qui demandent un apprentissage, en particulier pour le raisonnement en arrière. On peut imaginer des "tactiques utilisateur" qui permettent le raisonnement en avant, l'utilisateur fournissant les hypothèses qu'il veut utiliser et les faits qu'il veut en déduire, le système vérifiant que cette opération est valide.

Remerciements

J'aimerais remercier Laurence Rideau pour ses critiques constructives et son aide pour améliorer la présentation de ce rapport.

Références

[1] A. Amerkad, Y. Bertot, L. Pottier, and L. Rideau. Mathematics and Proof Presentation in Pcoq. In *Proceedings of Workshop Proof Transformation and Presentation and Proof Complexities in connection with IJCAR 2001*, Siena, Italy, June 2001.

[2] M. Berger. *Géométrie, 1 : action de groupes, espaces affines et projectifs*, chapter "Un espace universel. Applications", pages 93–111. Cedic/Nathan, 1977.

[3] Y. Bertot, F. Guilhot, and L. Pottier. Visualizing Geometrical Statements with GeoView. In *Proceedings of Workshop User Interfaces for Theorem Provers in connection with TPHOLs 2003*, Roma, Italy, September 2003. à paraitre.

[4] Y. Bertot, G. Kahn, and L. Théry. Proof by pointing. In M. Hagiya and J. C. Mitchell, editors, *Proceedings of the International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Softward*, pages 141–160, Sendai, Japan, 1994. Springer-Verlag LNCS 789.

[5] Cabri géomètre, http ://www-cabri.imag.fr/.

[6] S. Chou, X. Gao, and J. Zhang. *Machine proofs in geometry : automated production of readable proofs for geometry problems.* World scientific, 1994.

[7] GeoplanJ, http ://mapage.noos.fr/fkotecki/geoplanj.html.

[8] GeoplanW, http ://www2.cnam.fr/creem/geoplanw/geoplanw.htm.

[9] F. Guilhot. Démonstrations avec Coq de théorèmes de géométrie plane utilisant les angles orientés. Rapport de recherche RR–4356, INRIA, Janvier 2002.

[10] Document d'accompagnement du programme de première, CNDP, 2001.

[11] The Coq Development Team. The Coq proof assistant : Reference manual : Version 7.2. Technical Report RT-0255, INRIA, February 2002.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399