

# THESE

présentée devant

**l'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES**

pour obtenir

**le grade de docteur**

Ecole doctorale : mathématiques, et informatique fondamentale de Lyon

**Spécialité : mathématiques appliquées**

Soutenue le 13 décembre 2005

par

**Youssef ROUCHDY**

**Segmentation automatique et suivi du  
mouvement du cœur par modèles  
déformables élastiques semi-linéaires et  
non-linéaires en imagerie par résonance  
magnétique**

**RAPPORTEURS :**

H. DELINGETTE, Directeur de recherche, INRIA-Sophia Antipolis

T. SASSI, Professeur, Université de Caen

**JURY :**

V. VOLPERT, Directeur de recherche CNRS, UCB-Lyon

Président

P. CLARYSSE, Chargé de recherche CNRS, HDR, Creatis, Lyon

P. CROISILLE, Docteur en Médecine, Maître de conférences, UCB-Lyon

H. DELINGETTE, Directeur de recherche, INRIA-Sophia Antipolis

M. PICASSO, Maître d'enseignement et de recherche, EPFL Suisse

J. POUSIN, Professeur, INSA Lyon

Directeur



**Ce travail a été mené au sein du laboratoire :**

Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS,  
ex-Maply, UMR 5585 du CNRS  
Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon

Ecole Centrale de Lyon  
Département de Mathématiques Informatique  
36, avenue Guy de Collongue, BP 163  
69 131 Ecully Cedex, France

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon  
bât. Léonard De Vinci, 21, avenue Jean Capelle  
69 621 Villeurbanne Cedex - France

Université Claude Bernard Lyon 1  
UFR de Mathématiques, bât. Jean Braconnier  
21 avenue Claude Bernard  
69 622 Villeurbanne cedex - France

**dans le cadre d'un projet commun avec le laboratoire :**

Centre de Recherche et d'Applications en Traitement de l'Image et du Signal,  
Institut National des Sciences Appliquées de Lyon  
UMR CNRS 5515, INSERM U630  
bât Blaise Pascal, 69 621 Villeurbanne Cedex - France



## Remerciements

Tout d'abord, je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Jérôme Pousin, qui, tout au long de ma thèse, a fait preuve d'une écoute attentive et a su me guider avec dynamisme. Je le remercie de m'avoir donné la possibilité de m'épanouir dans un sujet passionnant. Je lui sais gré de ses qualités humaines qui ont permis l'instauration d'un climat d'entente particulièrement propice à mes premiers pas dans la recherche.

Je tiens à remercier tout particulièrement Patrick Clarysse de CREATIS<sup>1</sup> qui a dirigé la partie imagerie de ma thèse avec beaucoup d'attention et de gentillesse.

Je remercie également Michelle Schatzman pour la sagesse de ses conseils, son sens critique et le temps qu'elle m'a consacré. Je la remercie de m'avoir apporté un autre regard sur les espaces fonctionnels. J'ai beaucoup apprécié son humour et les nombreuses tasses de thé qu'elle m'a souvent offertes. Pour tout cela donc, je lui adresse ma plus grande reconnaissance.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Vitaly Volpert de me faire l'honneur de présider le jury de thèse. J'exprime toute ma gratitude à l'égard de Messieurs Hervé Delingette et Taoufik Sassi pour l'intérêt qui ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'être rapporteur. J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Pierre Croisille et à Monsieur Marco Picasso pour leur participation au jury de thèse.

Je remercie François Sidoroff pour l'aide qu'il m'a apportée dans la compréhension de la mécanique des milieux continus, notamment l'élasticité.

Je tiens à remercier Joël Schaerer de CREATIS pour sa collaboration déterminante pour la segmentation des images par résonance magnétique chez la souris. J'espère que nous pourrions collaborer à nouveau dans le futur.

Je ne saurai oublier mes amis du centre de mathématiques : Stéphanne, Laurent, Franck, Roger, Bérénice, Imad, Sébastien, Olivier, Hélène, Martine, Emmanuel, Jalila, Hicham, Pascale, Frédéric, Hein ainsi que les membres du centre de mathématiques et de l'Institut Camille Jordan. Ma collaboration avec CREATIS m'a permis d'apprécier plus particulièrement Bertrand, Solène et Rana. Mes remerciements s'adressent aussi aux administrateurs réseaux B. Escalier et F. Bellet.

A ma famille et à Hannah.

---

<sup>1</sup>UMR CNRS 5515, INSERM U630, bât Blaise Pascal, 69621 Villeurbanne Cedex - France



## Résumé

Le contexte médical de ma thèse est la quantification de la fonction contractile (fonction mécanique) du cœur, dans le but d'améliorer le diagnostic de certaines pathologies cardio-vasculaires telles que l'ischémie myocardique. L'objectif est d'extraire d'images acquises chez le patient l'anatomie du cœur. Cette opération, dénommée segmentation dans la terminologie du traitement d'images, reste un problème ouvert.

L'approche de segmentation étudiée dans ce manuscrit est basée sur le principe des modèles déformables volumiques. Elle est baptisée Gabarit Déformable Élastique (GDE). On se donne d'abord une représentation géométrique qui est proche de l'objet à segmenter. Ce modèle est positionné dans l'image par une transformation affine à proximité de la structure à extraire. Le GDE est ensuite déformé avec un champ de forces issu de l'image pour s'ajuster aux surfaces de l'objet étudié. La contribution de cette thèse porte sur cette dernière étape de déformation du modèle. Le problème est formulé en terme d'optimisation sous contrainte de régularité des déformations et sous des contraintes géométriques. L'énergie globale est composée de deux termes ; le premier terme (d'attache aux données) est calculé à partir des données image. Son rôle est de guider les déformations du modèle vers la structure cible. Le second introduit une contrainte de régularité sur les déformations souhaitées. Sa présence assure que le problème est bien posé dans un espace fonctionnel approprié. Nous considérons les cas où, le terme de régularisation est celui de l'élasticité linéaire et d'une régularisation non-linéaire. Ceci nous conduit à l'étude de trois GDE : le premier modèle est celui de l'élasticité linéaire sous contraintes géométriques. La minimisation de l'énergie linéaire sous contrainte de champ nul aux frontières de l'objet impose aux déplacements à transporter la frontière du GDE vers les points d'annulation du champ de forces (positionnement des surfaces). Nous donnons un résultat d'existence d'un minimum et des conditions nécessaires d'optimalité ainsi qu'un algorithme permettant d'approcher une solution des conditions d'optimalité. Le deuxième modèle est hyperélastique. Son étude se ramène à un problème d'élasticité non-linéaire en traction pure avec des forces suiveuses (les forces dépendant des déplacements). Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité local, ainsi que des conditions suffisantes de convergence d'un algorithme incrémental permettant d'en trouver la solution. Finalement, nous proposons un modèle qui consiste à déplacer le domaine en résolvant successivement une suite de problèmes linéaires. L'approche linéaire ne s'applique que dans des cas de petits déplacements, par contre l'approche non-linéaire est valable pour des grands déplacements.

Les algorithmes proposés sont mis en œuvre avec la méthode des éléments finis. Le modèle non-linéaire hyperélastique est appliqué à la segmentation 3D et au suivi du cœur en imagerie cardiaque, notamment en Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). Les résultats obtenus sur des cas réels montrent la pertinence et l'intérêt de notre approche. Le principe de ce modèle est générique et permet d'envisager son application à la segmentation de formes variées.





## Abstract

The context of this thesis is the quantification of the contractile function of the heart, with the aim of improving the diagnosis of cardio-vascular diseases such as the myocardial iscehmia. Firstly, the heart anatomy has to be extracted from acquired patients images. This operation is called segmentation in the terminology of image processing. The segmentation approach studied in this manuscript is based on the principle of deformable volumetric templates. Generally, such a segmentation approach proceeds in three stages. Firstly, a geometric representation of the object to be segmented is build. The model is positioned in the image using a linear transformation. Then the model is deformed with a force field derived from the image until it converges to the object. This thesis concerns this last stage of the model deformation. The problem is formulated as an optimization problem with geometrical and regularity constraints. The energy of the deformation is composed of two terms. The first term is computed from the image. Its role is to guide the deformation towards the border of the object to be detected. The second term introduces a constraint of regularity on the desired deformations. Its presence ensures that the problem is settled in a suitable functional space. We consider the cases where the regularisation term comes from both the linear elasticity and the non-linear elasticity. This leads us to study three models. The first one is that of the linear elasticity with the geometrical constraint. The minimization of the linear elastic energy with a nul force field at the object's boundary imposes the displacements to transport the model towards the points of cancellation of the force field. A theorem of existence of a minimum and optimality conditions are given. An algorithm for the resolution is also given and is proved to be convergent. The second model is hyperelastic. Its study brings back to a problem of non-linear elasticity in pure traction with evolutive forces (forces which depend on the displacement). The existence and uniqueness of local results and sufficient conditions for convergence of an algorithm allowing to find a solution to this problem are given. The last model consists in moving the domain at each iteration of the resolution. The linear approach applies only with small displacements, while the non-linear approach is valid for large displacements.

Algorithms for the different schemes are elaborated based on the Finite Element methode, and evaluated. The hyperelastic model is applied to the cardiac segmentation and to the motion tracking of the heart, in particular in cardiac magnetic resonance imaging. The results obtained on real cases show the relevance and the interest of our approach. The principle of the model is generic and makes it possible to consider its application to the segmentation of varied forms.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
1.1	Introduction et contexte médical . . . . .	17
1.2	Fonction contractile du cœur . . . . .	19
1.3	Imagerie médicale et contraction du cœur . . . . .	21
1.3.1	Introduction . . . . .	21
1.3.2	Principales modalités d'imagerie pour l'évaluation de la fonction contractile . . . . .	21
1.3.3	Estimation du mouvement du cœur . . . . .	22
1.4	Définition des objectifs et orientation des recherches . . . . .	25
1.5	Plan de thèse . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Segmentation par modèles déformables : Modèles et éléments bibliographiques</b>	<b>27</b>
2.1	Généralités . . . . .	27
2.1.1	Difficultés de la segmentation . . . . .	27
2.1.2	Stratégie de segmentation adoptée . . . . .	28
2.1.3	Segmentation ou recalage? . . . . .	30
2.2	Revue bibliographique . . . . .	31
2.2.1	Segmentation d'images cardiaques par modèles bio-inspirés . . . . .	31
2.2.2	Modèles déformables à régularisation élastique . . . . .	32
2.2.3	Approches déformables non-élastique . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Modèle semi-linéaire</b>	<b>37</b>
3.1	Formulation du problème de minimisation sous contrainte . . . . .	37
3.1.1	Introduction . . . . .	37
3.1.2	Conditions d'optimalité . . . . .	38
3.2	Algorithme de résolution . . . . .	40
3.3	Convergence de l'algorithme en dimension finie . . . . .	43
3.4	Evaluation sur des images synthétiques . . . . .	47
3.4.1	Un problème "jouet" 2D . . . . .	47
3.5	Discussion et conclusions . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Modèles non-linéaires</b>	<b>51</b>
4.1	Elasticité non-linéaire en traction pure avec forces suiveuses . . . . .	51
4.1.1	Notations et résultats de base . . . . .	51
4.1.2	Etude par méthode incrémentale . . . . .	57
4.1.3	Existence d'un minimum du problème variationnel hyperélastique . . . . .	62
4.2	Application à la segmentation d'images . . . . .	66
4.2.1	Schéma de résolution . . . . .	67
4.2.2	Discussion de la convergence de l'algorithme . . . . .	69
4.2.3	Comment quantifier les déformations? . . . . .	69
4.2.4	Illustration numérique . . . . .	69
4.3	Déplacement de maillage . . . . .	70
4.3.1	Illustration numérique . . . . .	72
4.4	Commentaires . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Segmentation d'images cardiaques</b>	<b>75</b>
5.1	Difficultés d'une image réelle . . . . .	75
5.2	Données expérimentales . . . . .	78
5.2.1	Etudes chez l'homme . . . . .	78
5.2.2	Etudes chez le petit animal . . . . .	78
5.3	Paramètres de segmentation . . . . .	78
5.3.1	Construction du gabarit géométrique de référence . . . . .	78
5.3.2	Reconstruction d'images 3D . . . . .	79
5.3.3	Calcul d'un champ de forces . . . . .	79
5.4	Initialisation du modèle de segmentation . . . . .	84
5.4.1	Description du modèle . . . . .	84
5.4.2	Distance modèle-données . . . . .	85
5.4.3	Transformation affine . . . . .	86
5.4.4	Interpolation et optimisation . . . . .	88
5.4.5	Résultats . . . . .	88
5.5	Choix du modèle pour la segmentation . . . . .	90
5.6	Résultats de la segmentation cardiaques . . . . .	90
5.6.1	Segmentation chez le petit animal . . . . .	91
5.6.2	Segmentation des données patients . . . . .	92
	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Notations</b>	<b>101</b>
A.1	Liste des abréviations . . . . .	101
A.2	Principales notations utilisées . . . . .	101
A.2.1	Notations générales . . . . .	101
A.2.2	Principaux espaces de fonctions utilisés . . . . .	102

---

A.2.3	Notations relatives aux grandeurs mécaniques . . . . .	103
A.2.4	Notations relatives à la discrétisation et à l'image . . . . .	103
<b>B</b>	<b>Eléments finis et maillage</b>	<b>105</b>
B.1	La méthode des éléments finis . . . . .	105
B.2	Qualité d'un maillage . . . . .	106
	<b>Bibliographie</b>	<b>108</b>



# Table des figures

1.1	Anatomie cardiaque . . . . .	18
1.2	Cascade ischémique . . . . .	19
1.3	Représentation schématique des principaux mouvements du cœur . . . . .	20
1.4	Série temporelle de 9 images RM . . . . .	23
1.5	Images par RM de marquage tissulaire . . . . .	24
2.1	Souris et image par RM d'un cœur d'une souris. . . . .	28
2.2	Etapas de la segmentation . . . . .	30
2.3	Représentation d'un contour par la méthode par ensemble de niveaux . . . . .	34
2.4	Segmentation par la technique des ensembles de niveaux . . . . .	34
3.1	Un problème "jouet" 2D . . . . .	48
3.2	Segmentation sphère sur un cube : données . . . . .	49
3.3	Segmentation sphère sur cube : résultats . . . . .	50
4.1	Segmentation non-linéaires : données . . . . .	70
4.2	Segmentation hyperélastique d'une sphère sur ellipsoïde : résultats . . . . .	71
4.3	Segmentation par déplacement de maillage : résultats . . . . .	72
4.4	Transformation de passage d'une configuration de référence à une configuration déformée . . . . .	73
5.1	Exemples de coupes IRM anatomiques acquises sur 2 patients différents . . . . .	76
5.2	Pile de coupes acquises en IRM en petit-axe. . . . .	76
5.3	Série temporelle IRM d'une coupe petit-axe du cœur. . . . .	77
5.4	Construction du modèle géométrique. . . . .	80
5.5	Les principales techniques d'interpolation et les noyaux de convolution associés. . . . .	81
5.6	Résultats d'interpolation. . . . .	82
5.7	Résultats d'interpolation, coupe perpendiculaire à l'axe Y. . . . .	83
5.8	Surfaces et région intervenant dans le critère de distance modèle-données. . . . .	85
5.9	Les principales mesures de similarité utilisées en recalage d'images. . . . .	87
5.10	Résultats d'un recalage affine . . . . .	89

---

5.11	Maillage sphérique et champ de forces pour calculé sur un ellipsoïde . . . . .	90
5.12	Comparaison des résultats de la segmentation sur image se synthèse . . . . .	91
5.13	Processus de segmentation de données de souris sur une coupe 2D . . . . .	92
5.14	Déformation du modèle géométrique élastique 3D pour un examen chez une souris . . . . .	93
5.15	Maillage après déformation par le modèle hyperélastique . . . . .	94
5.16	Suivi des cavités ventriculaires d'une souris . . . . .	94
5.17	Variation des volumes des ventricules durant un cycle cardiaque chez la même souris qu'en 5.16. . . . .	95
5.18	Vue 2D du champ de forces en petit axe pour un patient . . . . .	96
5.19	Déformation du modèle géométrique élastique 3D pour un examen chez un patient . . . . .	97
5.20	Suivi des cavités ventriculaires d'un patient . . . . .	97
5.21	Résistance du modèle hyperélastique aux structures parasites . . . . .	98
B.1	Qualité géométrique d'un maillage : mauvais tétraèdres . . . . .	107



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Introduction et contexte médical

Les maladies cardiovasculaires représentent une pathologie majeure dans les pays industrialisés. On peut prendre la mesure d'un tel état de fait en notant qu'aux Etats-Unis une personne sur cinq souffre d'une forme de maladies cardiovasculaires et 2600 personnes en décèdent chaque jour<sup>1</sup>. Enfin, le coût direct et indirect de ces pathologies est estimé à près de 400 milliards de dollars par an. En Europe, 40 % des décès avant l'âge de 74 ans sont dus à une maladie cardiovasculaire, même si on observe des disparités selon les pays<sup>2</sup>.

La pathologie à laquelle nous nous intéressons plus particulièrement est l'ischémie myocardique, pathologie dont l'origine est un défaut d'irrigation sanguine du muscle cardiaque (myocarde) due à l'occlusion plus ou moins prononcée d'artères coronaires. Les techniques d'imagerie récentes ont permis des avancées importantes dans la compréhension des mécanismes de l'ischémie et ouvrent des voies nouvelles pour le diagnostic.

Différents aspects fonctionnels du cœur peuvent être étudiés en imagerie cardiaque, dans le but de détecter et de quantifier les régions ischémiques d'un myocarde malade. Dans le cadre de cette thèse nous nous sommes intéressés à la fonction contractile.

Dans ce chapitre, nous effectuons une brève description de l'anatomie et de la physiologie du cœur et nous précisons les mécanismes de l'ischémie myocardique. Nous nous focalisons ensuite sur la fonction contractile en présentant d'une part les diverses modalités d'imagerie qui permettent de la quantifier et d'autre part une caractérisation de la fonction contractile à partir du traitement d'images. Nous terminons par la définition des objectifs et l'orientation des recherches dans le cadre de cette thèse. Ce chapitre s'inspire en grande partie, des thèses de F. Vincent et Q.C. Pham [Vin01, Pha02], et de l'HDR de P. Clarysse [Cla05].

---

<sup>1</sup>American Heart Association, 2005, <http://www.americanheart.org/>

<sup>2</sup>Source : Eurostat, 2002

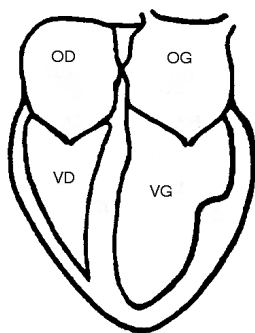


FIG. 1.1 – Le cœur et ses quatre cavités en coupe grand axe quatre cavités, OD = oreillette droit, OG = oreillette gauche, VD = ventricule droit, VG = ventricule gauche.

### Le cœur et l'ischémie myocardique

Notre objectif ici n'est pas de faire une description détaillée de la morphologie et de la fonction cardiaque. Nous nous contenterons d'insister sur quelques points clés qui mettent en évidence sa complexité morphologique et fonctionnelle. Pour plus de précision, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages classiques de physiologie cardiovasculaire [Hou90].

### Complexité morphologique et fonctionnelle du cœur

D'un point de vue morphologique, le cœur est un muscle creux (myocarde) délimitant quatre cavités : les oreillettes droite (OD) et gauche (OG) et les ventricules droit (VD) et gauche (VG) (Figure 1.1). Les cavités auriculaires et ventriculaires sont en communication par l'intermédiaire des valvules tricuspide (VT) et mitrale (VM) qui sont reliées par des cordages tendineux aux muscles papillaires situés sur les faces internes antérieures et postérieures des ventricules. Les ventricules droit et gauche sont séparés par le septum interventriculaire. La surface interne des cavités est appelée *endocarde*. La face externe du myocarde est appelée *épicarde*. En réalité, l'intérieur des cavités n'est pas lisse mais présente de nombreuses trabéculations. Le myocarde ventriculaire gauche, d'environ 8mm d'épaisseur, est constitué de fibres schématiquement organisées en trois couches d'orientation différente. Les deux couches périphériques s'enroulent en écharpe avec des orientations opposées l'une de l'autre. La couche centrale, prépondérante, est constituée de fibres orientées selon la direction circonférentielle. Le myocarde est irrigué par les vaisseaux coronaires. Les capillaires sont très nombreux en particulier dans les territoires sous-endocardiques du VG.

D'un point de vue fonctionnel, le cœur est constitué de quatre pompes, correspondant aux quatre cavités, insérées dans deux dispositifs : le cœur droit (OD, VD) et le cœur gauche (OG, VG) reliés en série par la circulation pulmonaire. Le VG a pour mission de propulser le sang dans l'ensemble de l'organisme et éjecte ainsi une moyenne de 25 litres

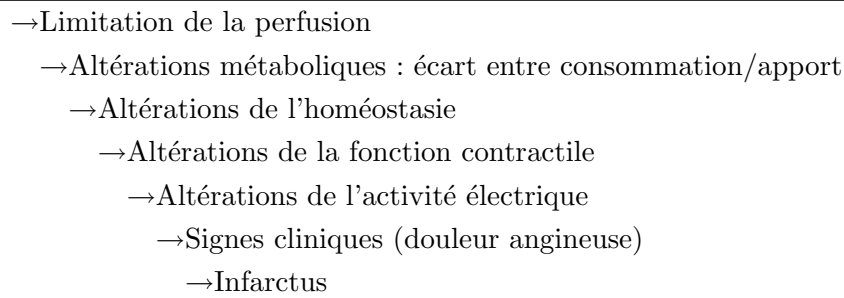


FIG. 1.2 – Cascade ischémique.

par minute. Pour effectuer ce travail étonnant dans des conditions optimales, plusieurs cofacteurs sont déterminants. L'apport sanguin au muscle définit la *perfusion myocardique*. La consommation des substrats énergétiques dans les myocytes constitue le *métabolisme myocardique*. La *fonction contractile* du cœur traduit la capacité de déformation des fibres myocardiques. Elle est pilotée par la propagation d'une onde électrique de dépolarisation ou d'activation dans les tissus nodaux.

### L'ischémie myocardique

Un équilibre entre perfusion, métabolisme et fonction contractile est établi en permanence pour le myocarde normal [Jan98]. Un défaut de l'apport sanguin au niveau du myocarde est appelé *ischémie myocardique*. Il entraîne un déséquilibre entre perfusion, métabolisme et fonction contractile et un enchaînement d'événements décrit par le terme de *cascade ischémique* (Figure 1.2) [Jan98].

Si l'ischémie se prolonge, les territoires concernés peuvent se nécroser. Dans les cas les plus graves, la cascade ischémique aboutit à l'infarctus du myocarde, première cause de mortalité dans les pays industrialisés. Les recherches sur l'ischémie myocardique ont débuté en 1935 avec les travaux de Tennant et Wiggers [TW35] qui sont les premiers à constater chez l'animal l'apparition d'anomalies de la contraction locale engendrées par l'occlusion d'une artère coronaire.

## 1.2 Fonction contractile du cœur

De façon très schématique et globale, le mouvement du ventricule gauche d'un cœur sain peut être décomposé en quatre mouvements principaux listés ci-après par ordre d'importance relative :

- Contraction radiale (CR),
- Contraction longitudinale (CL),
- Torsion autour du grand axe du VG (TL),
- Déformation du grand axe.

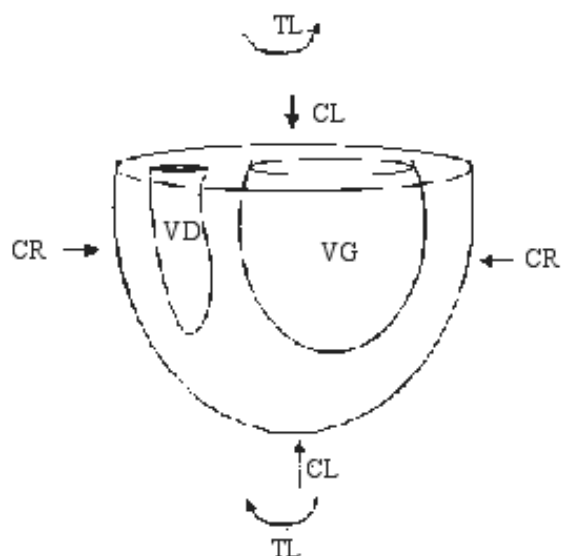


FIG. 1.3 – Représentation schématique des principaux mouvements du cœur (CR=Contraction Radiale, CL=Contraction Longitudinale, TL=Torsion Longitudinale).

Ces mouvements sont représentés sur la figure 1.3. Il faut également y ajouter une rotation et une translation rigides globales.

Ces mouvements ne sont pas uniformes sur l'ensemble du VG. Ainsi la rotation autour du grand axe change de sens de la base à l'apex. La contraction radiale n'a pas la même amplitude dans l'épaisseur de la paroi. Elle est plus grande au niveau endocardique qu'au niveau épicaudique.

Du fait de la grande complexité du mouvement cardiaque, la fonction contractile est difficile à caractériser. Divers paramètres permettent une quantification globale ou semi-locale de celle-ci. La *fraction d'éjection* mesure la variation de volume de la cavité ventriculaire entre les instants extrême de la phase de contraction. L'*épaississement pariétal* mesure la variation maximale d'épaisseur de la paroi myocardique dans une région donnée.

La fraction d'éjection est une mesure globale, qui permet de déterminer un dysfonctionnement global et significatif. Elle ne permet pas de localiser la région du myocarde qui peut être à la source de celui-ci. L'épaississement pariétal est une mesure plus locale, puisqu'il est calculé en plusieurs points de la paroi myocardique. Mais c'est une mesure qui intègre toutefois la déformation de toute l'épaisseur de la paroi, et qui demeure de ce fait ambiguë.

## 1.3 Imagerie médicale et contraction du cœur

### 1.3.1 Introduction

Les premières études sur l'impact des pathologies cardiaques sur le mouvement et la capacité contractile du cœur ont été menées sur l'animal et étaient basées sur des expérimentations très invasives comme le suivi de marqueurs/capteurs implantés dans les parois cardiaques. Les techniques d'imagerie les plus récentes permettent l'étude de la dynamique cardiaque de façon non/peu traumatisante chez le patient. Cependant l'imagerie des organes en mouvement résulte généralement d'un compromis entre résolutions spatiale et temporelle, et qualité d'images.

L'imagerie des organes en mouvement introduit un nouveau défi car en dépit de développements technologiques sans précédent, peu de modalités sont aujourd'hui capables d'acquisition en (quasi-) temps réel. L'imagerie ultrasonore (échographie) permet de réaliser des acquisitions à très hautes cadences (25 images/seconde de façon courante et jusqu'à 300 images/secondes et plus). Elle présente de plus l'avantage d'un coût nettement moins élevé que des tomographes à rayons X ou IRM mais la qualité de l'information image reste encore nettement en deçà et limitée en pratique clinique au 2D. La tomographie à rayons X opère un retour sur le devant de la scène de l'imagerie cardiaque avec les scanners multi-barrettes. Cependant, comme en IRM, des techniques de synchronisation avec l'Electrocardiogramme (ECG) et la respiration sont requises pour reconstruire une information dans le temps.

### 1.3.2 Principales modalités d'imagerie pour l'évaluation de la fonction contractile

Les modalités d'imagerie fournissant des informations sur la contraction du cœur sont nombreuses et se distinguent sur plusieurs aspects : nécessité ou non d'injecter un produit de contraste, imagerie 2D ou 3D, résolutions spatiale et temporelle,... En terme d'étude de la déformation du myocarde, la différence majeure repose sur la nature des informations de mouvement qui sont fournies. Si toutes les modalités citées ci-dessous permettent d'accéder au mouvement des interfaces du myocarde, plus rares sont celles qui permettent de déterminer la déformation à l'intérieur de la paroi myocardique.

#### Echocardiographie

L'échographie bidimensionnelle est l'examen de routine du cardiologue. L'échocardiographie de mode TM (en anglais : Time Motion) permet d'observer dans une direction donnée l'évolution des parois endocardique et épicaudique en temps réel (cadence vidéo). L'imagerie Doppler, initialement introduite pour observer des flux sanguins peut être utilisée pour visualiser la vitesse de la paroi [MSMG92, FMSH94]. Les images 2D de vitesse ont cependant une résolution spatiale limitée à quelques millimètres.

## Imagerie par Résonance Magnétique

L'IRM [DBIP94] est une technique d'imagerie non invasive et inoffensive qui peut fournir des informations anatomiques et fonctionnelles avec une résolution spatiale de l'ordre du millimètre. Basée sur l'observation du retour à l'équilibre des moments magnétiques des noyaux d'hydrogène (très abondant dans les tissus biologiques) perturbés par l'application d'un champ Radio Fréquence, elle est bien adaptée à l'exploration des tissus riches en eau comme les tissus mous et en particulier du muscle cardiaque. Les séquences IRM rapides synchronisées sur l'Electrocardiogramme (ECG) permettent actuellement d'obtenir plus de 30 phases du cycle cardiaque en une apnée d'une quinzaine de secondes limitant ainsi les artefacts dus au mouvement respiratoire (Figure 1.4). Néanmoins, cette imagerie requiert plusieurs cycles cardiaques pour acquérir un seul plan de coupe. Sa résolution temporelle est, de ce fait, limitée.

Le traitement des images fournies par de telles séquences sur plusieurs niveaux de coupes permet d'accéder à des paramètres quantitatifs d'intérêt clinique relatifs à l'anatomie 3D du cœur (forme, volume des cavités, masse myocardique) et à sa fonction contractile globale (fraction d'éjection). Des traitements plus sophistiqués peuvent fournir une information plus locale sur le mouvement du cœur. La cinétique pariétale peut être étudiée en 3D par des techniques basées sur l'analyse des courbures des surfaces cardiaques.

## Imagerie de marquage tissulaire

Contrairement au Cine-IRM classique, les séquences IRM de marquage tissulaire fournissent des informations sur les déformations à l'intérieur du muscle cardiaque. Ces informations permettent d'analyser le mouvement du cœur. Cette modalité d'imagerie a été proposée parallèlement par les équipes de E. Zerhouni (Johns Hopkins Univ., Baltimore, USA)[ZPRY88] et de L. Axel (Univ. of Pennsylvania, Philadelphie, USA) [AD89a, AD89b]. Cette technique s'appuie sur le principe de l'IRM pour imposer l'orientation des moments magnétiques des noyaux dans des bandes de l'espace pour créer un motif régulier sur l'image. La déformation du motif induite par le mouvement du cœur est ensuite enregistrée par une séquence du type Ciné IRM. La figure 1.5 illustre trois images d'une séquence IRM de marquage tissulaire où l'on visualise la déformation du cœur par la déformation du marquage.

### 1.3.3 Estimation du mouvement du cœur

L'information produite par les imageurs est appréciée qualitativement par le médecin. Dans bien des situations, l'exploitation quantitative et précise des informations requiert le développement de méthodes d'analyse des images. Notre volonté est d'apporter de nouveaux outils plus performants qui, à partir des images, génèrent avec le moins possible d'intervention de l'utilisateur, un modèle spécifique du cœur du patient qui intègre divers paramètres fonctionnels : descripteurs globaux de la fonction cardiaque (volumes, masses,

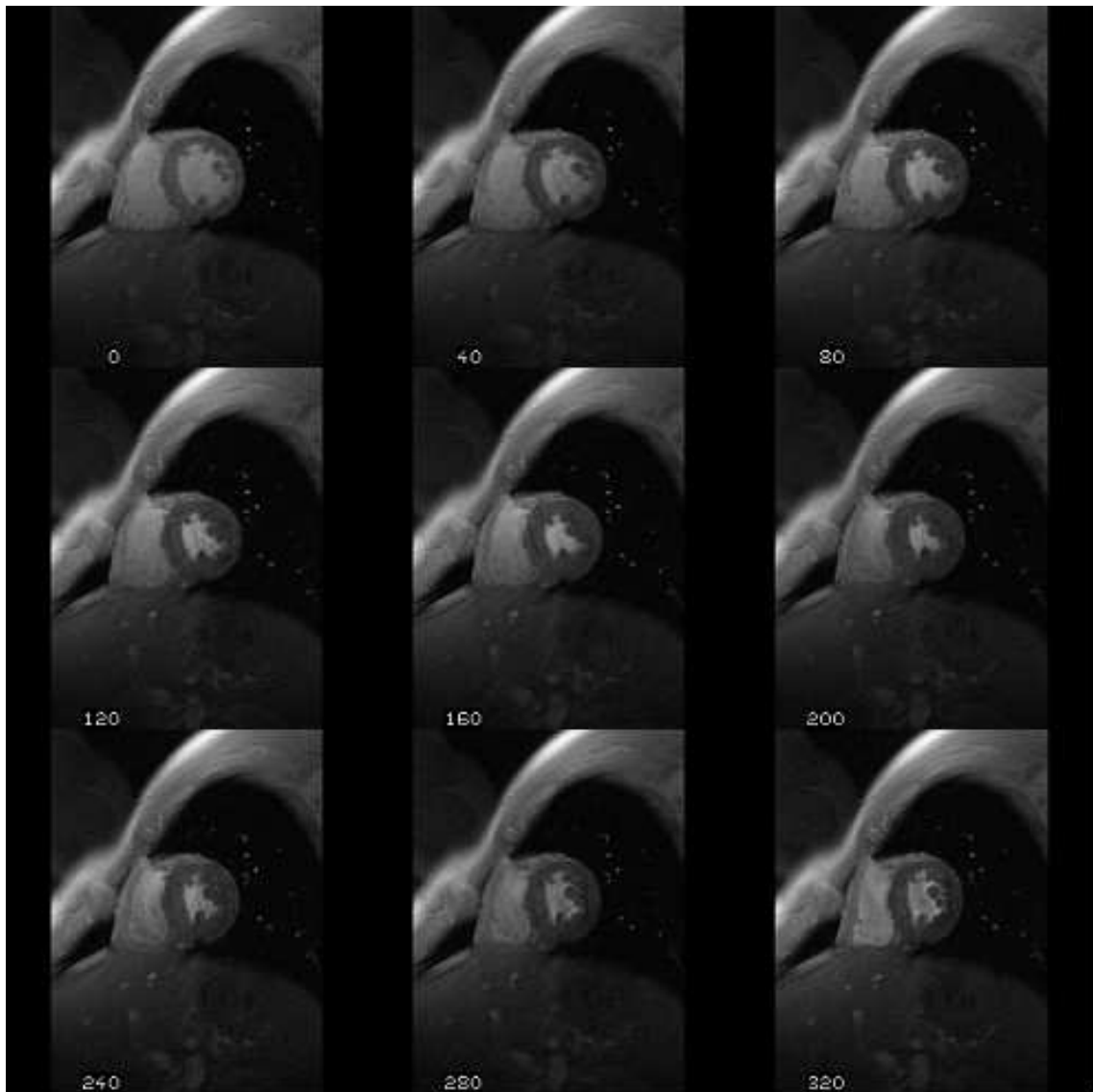


FIG. 1.4 – Série temporelle de 9 images, mono-coupe, en orientation petit axe obtenues en IRM. Le temps correspondant est indiqué en milliseconde et la série débute à l'instant de télédiastole, l'image centrale correspond à télésystole.

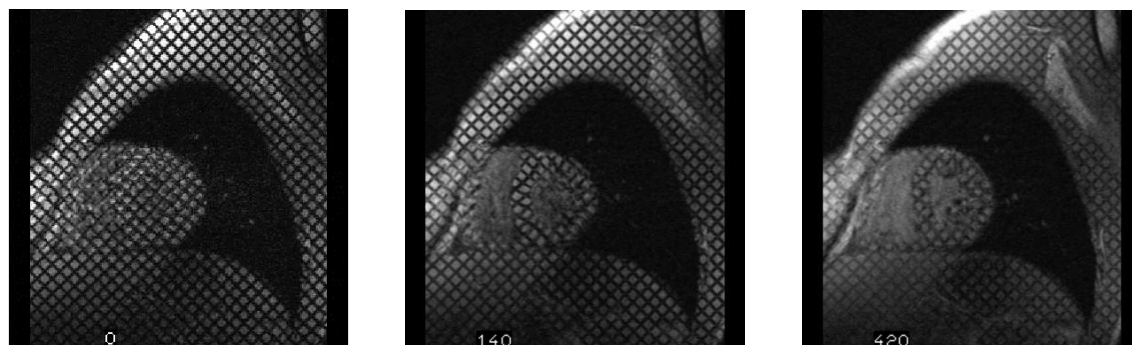


FIG. 1.5 – Trois phases du cycle cardiaque d’une séquence d’Imagerie par RM de marquage tissulaire avec marquage en grille en orientation petit axe au cours de la systole (temps indiqué en millisecondes).

fraction d’éjection) mais aussi locaux (déformations, métabolisme...). Dans cet objectif, deux problèmes fondamentaux sont à considérer :

- l’extraction (*segmentation*) de l’anatomie du cœur au cours du cycle cardiaque ;
- l’estimation du mouvement de ces structures.

Notons que l’estimation du mouvement est un problème très difficile pour au moins trois raisons :

- le cœur est en perpétuel mouvement, auquel s’ajoute le mouvement respiratoire des structures thoraciques ;
- les techniques d’imagerie sont imparfaites et peuvent générer des artefacts ;
- les résolutions spatiale et temporelle des images acquises sont encore parfois insuffisantes.

### Segmentation et suivi des structures cardiaques

En routine clinique, l’extraction des structures cardiaques dans les images (IRM, scanner X, échographie...) est encore couramment réalisée manuellement avec l’aide d’outils logiciels très rudimentaire. Cependant, la grande quantité d’images délivrées en l’IRM, par exemple, pour un examen du cœur en 3-D rend cette opération longue et fastidieuse. Ainsi, l’examen multicoupe et multiphases du cœur produit couramment 7 niveaux de coupe et 30 phases par coupe, soit un total de 210 images. Ce nombre est multiplié d’autant s’il est nécessaire de réaliser des acquisitions complémentaires sous stimulation pharmacologique. Ceci justifie pleinement le développement de méthodes automatiques de segmentation des images. L’extraction des contours sur un cycle cardiaque permet de fournir des informations sur la variation des volumes et une information globale sur la fonction contractile.



### Estimation locale du mouvement

La mise en correspondance des territoires analogues imagés dans des cours du IRM au cycle cardiaque permet une estimation locale du mouvement du paroi myocardique. Cette mise en correspondance n'est pas facile à réaliser étant donnée la complexité du mouvement du cœur. Les images par RM de marquage tissulaire sont mieux adaptés pour une analyse plus locale du mouvement du cœur. L'analyse s'effectue généralement en deux étapes :

- Détection des lignes de marquage et des contours sur un cycle cardiaque ;
- Estimation d'un champ de mouvement.

De nombreux travaux ont été réalisés sur l'analyse d'images par RM de marquage tissulaire. Sans être exhaustif, on peut citer [OMH<sup>+</sup>95, PMA96, CBK<sup>+</sup>00].

## 1.4 Définition des objectifs et orientation des recherches

Dans le cadre de cette thèse, notre objectif est l'aide à l'interprétation d'exams en IRM cardiaque en particulier pour la segmentation automatique des ventricules du cœur en 3D et l'analyse de la fonction contractile. Autrement dit, nous souhaitons développer une technique de segmentation automatique 3D des ventricules du cœur dans des séquences d'images par RM multi-coupes et multi-phases en vue de calculer des paramètres fonctionnels globaux et régionaux.

La mise au point d'un système informatique d'extraction de l'anatomie cardiaque ne va pas sans difficultés. Les images étant généralement bruitées, de faux points de contour peuvent exister. La présence dans l'image d'objets autres que celui qui est étudié génère des contours parasites. Inversement, des portions de la frontière de l'objet peuvent être invisibles en raison de l'imperfection du système d'imagerie. Notre approche de segmentation repose sur les techniques des *modèles déformables* qui requiert un modèle *a priori* de la forme de la structure à extraire. Le concept de Gabarit Déformable Élastique (GDE) a été introduit dans [Vin01] et étendu en 3D pour la segmentation des deux ventricules [Pha02]. Le modèle GDE s'appuie sur un modèle de forme volumique -Le terme volumique signifie qu'il permet de modéliser l'épaisseur des objets (par exemple d'une paroi myocardique)- auquel on associe des propriétés d'élasticité linéaire. Dans cette thèse, nous introduisons trois évolutions du modèle GDE. La première est le GDE semi-linéaire pour lequel on donne des résultats d'existence de la solution et de convergence de l'algorithme proposé. Cette approche est valide en petit déplacement. La seconde est la version non-linéaire du GDE pour lequel nous donnons également des résultats d'existence et d'unicité de la solution et de convergence de l'algorithme proposé. La troisième variante est une extension du GDE semi-linéaire avec déplacement de la configuration de référence. Les deux dernières versions sont valables aussi en grands déplacements. Ces modèles s'appuient sur les équations d'élasticité avec des conditions aux limites de *traction pure*. Ce type de conditions aux limites contribue à l'automatisation du procédé de segmentation

contrairement à des conditions mixtes ou de déplacement pur. Les algorithmes proposés sont mis en œuvre avec la méthode des éléments finis.

## 1.5 Plan de thèse

Dans le deuxième chapitre, nous donnons le principe des modèles déformables et la stratégie de segmentation adoptée ainsi qu'une revue bibliographique sur les méthodes de segmentation proposées dans le cadre de l'imagerie médicale.

Dans les chapitres 3 et 4, nous présenterons les modèles déformables développés et étudiés dans le cadre de cette thèse. Le premier de ces chapitres présente une méthode de segmentation sous contrainte géométrique et élastique par modèle déformable. Le problème est formulé en terme d'optimisation sous contrainte. Nous donnons un résultat d'existence d'un minimum et des conditions nécessaires d'optimalité. Nous illustrons le modèle sur des images de synthèses.

Le deuxième modèle (chapitre 4) est basé sur les équations de l'élasticité non-linéaire tridimensionnelle avec des conditions aux limites de traction pure. Nous commençons par rappeler des résultats d'existence établies par Lanza de Cristoforis et Valent [DCV82] dans les espaces  $W^{2,p}(\Omega)$  et  $C^{2,\alpha}(\Omega)$ , et d'unicité lorsque la condition  $\int_{\Omega} u dx = 0$  est imposée. Puis, avec des hypothèses supplémentaires, nous prolongeons ces résultats à un problème d'élasticité non-linéaire en traction pure avec des forces suiveuses (les forces dépendent des déplacements). Ensuite, nous proposons un algorithme de résolution qui est similaire à celui proposé par Ciarlet [Cia88] dans le cas des déplacements purs. Nous donnons des conditions suffisantes de convergence de l'algorithme. Nous utilisons ces résultats pour construire un modèle déformable pour la segmentation d'images. Nous présentons aussi une autre approche non-linéaire qui consiste à déplacer le domaine en résolvant successivement une suite de problèmes linéaires. Ensuite, nous discrétisons l'algorithme à l'aide des éléments finis et nous évaluons la méthode de segmentation proposée sur des images de synthèse.

Le chapitre 5 est consacré à la mise en œuvre et l'évaluation des algorithmes proposés pour la segmentation automatique du cœur dans des images par RM chez la souris et chez l'homme.

## Chapitre 2

# Segmentation par modèles déformables : Modèles et éléments bibliographiques

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la section 2.1 définit l'opération de segmentation et présente l'approche adoptée qui est basée sur les modèles déformables. Différentes techniques de segmentation, proches de celle proposée, sont ensuite présentés dans la section 2.2.

### 2.1 Généralités

Globalement la segmentation d'une image  $I$  consiste à partitionner cette image en plusieurs régions  $\{R_i\}_{i=1,\dots,k}$  non vide tel que l'intersection entre deux régions différentes soit vide et l'ensemble des régions recouvre toute l'image. Une région est un ensemble de pixels connexes ayant des propriétés communes qui les différencient des pixels des régions voisines.

#### 2.1.1 Difficultés de la segmentation

Dans la figure 2.1, on peut reconnaître facilement dans la première image deux objets : une main et une souris. Pour séparer les deux objets présents dans l'image l'humain se base sur des connaissances de haut niveau des objets en question. La deuxième image est une image par RM cardiaque d'une souris, l'identification des deux ventricules du cœur par exemple est plus délicate pour un homme "ordinaire", ses connaissances *a priori* n'étant pas suffisantes. L'extraction des structures cardiaques est couramment réalisée en routine clinique de façon semi-automatique et généralement assistée par des logiciels mis à disposition sur la console de l'imageur. Cependant, la grande quantité d'images délivrées pour un examen du cœur en 3D rend cette opération longue et fastidieuse. Ainsi, l'examen mul-

ticoupes et multiphases du cœur produit couramment 7 niveaux de coupe et 30 phases par coupe, soit un total de 210 images. Ce nombre est multiplié d'autant s'il est nécessaire de réaliser des acquisitions complémentaires sous stimulation pharmacologique. Ceci justifie pleinement le développement des outils informatiques pour l'extraction automatique de l'anatomie cardiaque. Le problème qui se pose est que la machine ne peut pas, comme l'humain, chercher dans sa mémoire la structure dont l'image lui est présentée. Pour l'ordinateur, l'image est un ensemble de points (pixels) ayant chacun un niveau de gris. Donc la mise en œuvre d'un outil informatique d'analyse doit tenir compte de caractère bruité des images, de portions de contours peu visibles et de la présence dans l'image d'autres structures qui génèrent des contours parasites.

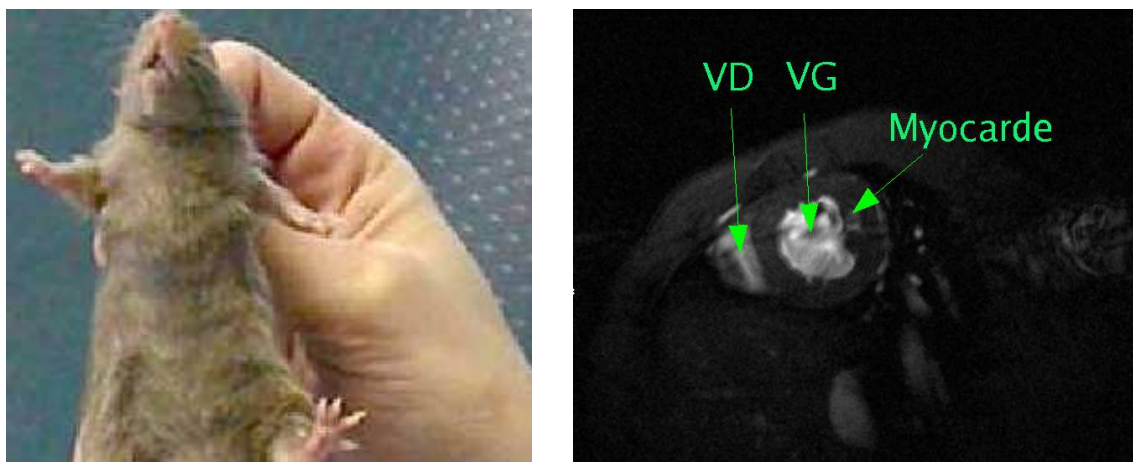


FIG. 2.1 – Souris et image par RM d'un cœur d'une souris.

### 2.1.2 Stratégie de segmentation adoptée

On distingue classiquement deux classes de méthodes de segmentation, les approches régions qui subdivisent l'image en régions selon des critères d'homogénéité, et les approches frontières qui cherchent à identifier les contours des objets présents dans l'image. L'approche considérée dans ce manuscrit fait partie de cette dernière classe de méthode. Il s'agit précisément d'un modèle déformable.

#### Modèles déformables

Le concept de modèle déformable a été introduit par Kass en 1987 [KWT87] avec le contour actif, courbe évoluant dans une image pour s'ajuster au contour d'un objet. Depuis le modèle a fait l'objet de nombreuses études, applications et extensions en 3D, notamment [Coh97]. L'extraction ou la reconstruction d'une forme par modèle déformable est obtenue par la donnée d'une représentation géométrique (discrète, courbe, surface, volume) qui s'équilibre sous l'influence d'une énergie pour converger vers les frontières

de l'objet. Cette énergie est composée de deux termes : d'une énergie interne qui va régulariser les déformations et d'une énergie externe qui va guider les déformations en fonction des données image. L'efficacité du modèle dépend du choix de la configuration initiale, de l'énergie interne et externe. Chacun de ces trois éléments, ainsi que les méthodes de minimisation de l'énergie totale du modèle déformable, a fait l'objet de recherches intenses. On trouve dans ([MIT96], [Rüe97], [Mon99]) des synthèses bibliographiques sur le sujet.

Dans la continuité des travaux de Vincent [Vin01] et de Pham [Pha02], notre approche de la segmentation fait partie de la catégorie des modèles déformables. Sa caractéristique principale est que le modèle est volumique, c'est à dire capable de modéliser l'épaisseur des objets (dans le cas de l'imagerie cardiaque par exemple la paroi myocardique). Elle est baptisée *Gabarit Déformable Elastique* (GDE). Dans le cas de la segmentation du cœur, le modèle a priori représente le muscle cardiaque. La formulation initiale de GDE repose sur la minimisation de l'énergie suivante :

$$E = E_{\text{élastique}} + \beta E_{\text{image}} \quad (2.1)$$

où  $E_{\text{élastique}}$  représente l'énergie de régularisation élastique et  $E_{\text{image}}$  représente l'énergie d'attache aux données. Dans le cadre de cette thèse, nous considérons les cas où, le terme de régularisation est celui de l'élasticité linéaire et d'une régularisation non-linéaire. L'approche linéaire ne s'applique que dans le cas de petits déplacements, l'approche non-linéaire est valable pour des grands déplacements. Dans le premier cas, on va prendre  $\beta = 0$  et introduire l'information *a priori* par minimisation sous une contrainte géométrique (chapitre 3). Dans le cadre des grands déplacements la non-linéarité est introduite de deux manières par régularisation hyperélastique et par déplacement de maillage (chapitre 4).

### Principales étapes de la segmentation

Les principales étapes de la segmentation par Gabarit Déformable Elastique sont :

- Construction du modèle géométrique initial. En pratique, c'est une approximation standard de l'objet étudié (en imagerie cardiaque il s'agit d'un maillage volumique des ventricules du cœur) ;
- Positionnement du modèle avec des transformations affines (translations, rotations et changements d'échelle). Les méthodes automatiques pour déterminer cette transformation s'appuient généralement sur des estimateurs de contours présents dans l'image ;
- Segmentation par déformation non affine du modèle initial.

Ces étapes sont illustrées dans l'exemple simple suivant. La figure 2.2-(a) représente les trois objets à un instant donné. Supposons que nous voulons segmenter automatiquement l'objet B dans cette image. Pour construire un modèle géométrique, on peut par exemple extraire manuellement les contours de l'objet B à un instant donné. Le modèle géométrique

construit est placé dans l'image (figure 2.2-(b)). Ensuite le modèle est positionné dans l'image par une transformation affine à proximité de l'objet  $B$ , notons  $\Omega$  l'image (au sens application) de  $M$  par cette transformation affine. Le modèle  $\Omega = \Phi(M)$  est ensuite déformé avec une application généralement non-affine pour s'ajuster au contour de la cible  $B$  (figure 2.2-(d)).

Nous nous sommes focalisés dans les chapitres 3 et 4 sur cette dernière étape de la segmentation. Dans le chapitre 5, nous donnons un exposé détaillé des résultats obtenus avec les modèles GDE proposés dans le cadre de la segmentation cardiaque.

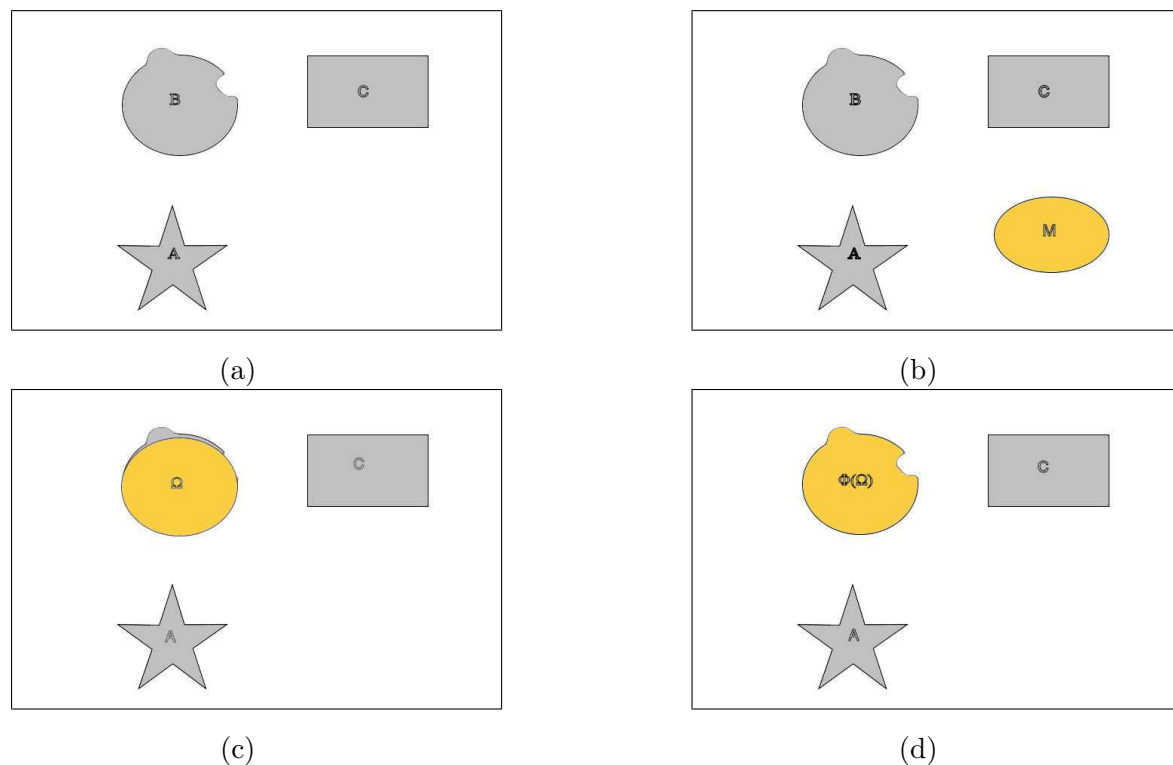


FIG. 2.2 – Etapes de la segmentation.

### 2.1.3 Segmentation ou recalage ?

Le recalage est très utilisé en analyse d'images médicales pour la détection de tumeurs dans le cerveau ou en mammographie par exemple. Dans ce dernier cas, il s'agit de la comparaison des mammographies droite et gauche de la patiente et, lorsque cela est possible, de la comparaison de ces mammographies avec d'autres qui leur sont antérieures. Cette comparaison est déterminante pour la détection précoce des tumeurs [TD85, TIG95, Ric00] (Les seins des deux mammographies n'ont généralement ni la même forme ni la même taille).

Le problème de recalage ou de mise en correspondance d'images est souvent formulé de la manière suivante :

Considérons que les images sont définies comme des fonctions d'un ensemble borné de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans un ensemble de niveaux de gris. Soient deux images  $I_0$  et  $I_1$ . On cherche à recaler  $I_0$  sur  $I_1$  en la remplaçant judicieusement par une image transformée  $I_0 \circ \phi$ . L'idée est de trouver un élément  $\phi$  aussi régulier que possible tel que  $I_0 \circ \phi$  soit similaire à  $I_1$ . Cette similarité s'obtient par la minimisation d'une fonctionnelle composée de deux termes. Un terme d'attache aux données traduit la similarité entre  $I_0 \circ \phi$  et  $I_1$ . Il est d'autant plus faible que l'image transformée  $I_0 \circ \phi$  est similaire à l'image cible  $I_1$ . Un choix courant est

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (I_0(x) - I_1(x))^2 dx.$$

Le second terme ne dépend pas de l'image. Son rôle est d'exercer une contrainte de régularité sur les transformations  $\phi$ .

Nous remarquons d'une part que le recalage rentre dans la catégorie des modèles déformables décrite dans la section précédente. D'autre part, le recalage constitue la dernière étape de la segmentation telle quelle est définie dans la section 2.1.2. En effet dans la troisième étape de la segmentation nous réalisons un recalage entre un modèle géométrique transformé affinement et un objet d'une image que nous cherchons à segmenter. On peut ainsi le qualifier de recalage modèle-données. Notons que, malgré la similarité entre recalage et segmentation dans ce cas, ces deux opérations ont des finalités différentes. L'une cherche à associer des formes identiques présentes dans deux images, l'autre cherche à extraire une forme dans une image à partir d'un modèle géométrique de référence dans le cas des modèles déformables, par exemple.

## 2.2 Revue bibliographique

### 2.2.1 Segmentation d'images cardiaques par modèles bio-inspirés

La modélisation par modèles déformables élastiques volumiques pour la segmentation d'images cardiaques a été introduite par [Vin01] et [SCD<sup>+</sup>01], notamment. Ces travaux ont été étendus et améliorés dans [Pha02, SFP<sup>+</sup>03]. Vincent [Vin01] expose un modèle volumique élastique déformable baptisé *gabarit déformable élastique*, et l'applique à la segmentation et au suivi de mouvement du cœur dans des séquences d'images cardiaques. Ce type de modèle est capable de segmenter plusieurs surfaces relatives au même objet, comme les surfaces endocardiques et péricardiques du VG. Dans [Pha02], Pham étend le modèle aux deux ventricules du cœur et propose un modèle de remaillage pour gérer les grands déplacements ainsi qu'une méthode de mise en correspondance des données anatomiques IRM et données fonctionnelles TEP et MCG. Il introduit aussi une information sur l'orientation des fibres myocardiques dans le processus de la segmentation. Sermesant et al. proposent dans [SCD<sup>+</sup>01] un modèle volumique des ventricules du cœur simulant la contraction du muscle cardiaque assimilé à un matériau élastique, sous l'effet d'une onde électrique et l'interaction avec une image anatomique US. Dans [SFP<sup>+</sup>03], on

trouve un modèle de segmentation 4D qui intègre également l'activité électrique du cœur et l'orientation des fibres myocardiques.

### 2.2.2 Modèles déformables à régularisation élastique

L'introduction de l'élasticité dans les problèmes d'imagerie a commencé avec la thèse de Broit [Bro81], suivi par les travaux de Bajscy et Kovacic [BK89] qui ont porté sur le recalage et de la segmentation des images cérébrales. On trouve dans [GHLBB97, Gee99] une extension de cette approche. Amit propose dans [Ami94] une version théorique bien posée où il montre l'existence d'un minimum global, de régularité  $H^1(\Omega)$ , de la fonctionnelle d'énergie dans le cadre du recalage. Le terme de régularisation dans cette version est issue de l'élasticité linéarisée. Dans ce contexte nous proposons dans le chapitre 4 un modèle avec un terme de régularisation élastique linéaire et une contrainte géométrique sur les déplacements. Nous construisons à partir de l'image un champ de forces qui s'annule sur la frontière de chaque objet détecté dans une image. La minimisation de l'énergie élastique sous la contrainte de champ nul contraint les déplacements à emporter la frontière du modèle vers les points d'annulation du champ de forces (positionnement des contours).

Dans [RWC95], Rabbit et al. propose un modèle de recalage par régularisation hyperélastique, ainsi qu'un algorithme itératif pour la résolution fondée sur un développement en série de Taylor des équations variationnelles associées au problème de minimisation, la convergence de cet algorithme n'est pas prouvée. Dans [Ric00], Richard propose un modèle 2D hyperélastique pour l'ajustement des mammographies. Il utilise un algorithme incrémental similaire à celui de Ciarlet [Cia88] pour un problème en *déplacement pur*. Nous soulignons par rapport à cette approche que :

Il n'existe pas de preuve d'existence de solution pour le problème variationnel hyperélastique en général. En effet, la densité d'un matériau hyperélastique est non convexe ce qui constitue un obstacle majeur pour appliquer le Thm. 7.3-2 de [Cia88]. Néanmoins Ball prouve dans [Bal77] un résultat d'existence de régularité  $W^{1,p}(\Omega)$  pour les densités polyconvexes. De plus Cristoforis et Valent prouvent dans [DCV82] des résultats d'existence et d'unicité pour les équations d'élasticité non-linéaire en *traction pure*. Dans [Cia88], Ciarlet propose une méthode incrémentale pour résoudre le problème d'élasticité non-linéaire pour des conditions aux limites de déplacements.

Dans le chapitre 4, nous prolongeons les résultats de [Bal77, DCV82, Cia88] établies pour des forces indépendantes de déplacements à un problème de *traction pure* en 3D avec des *forces suiveuses* (dépendant de déplacement). Ensuite, nous appliquons ces résultats à la segmentation d'images par modèle déformable élastique.

### 2.2.3 Approches déformables non-élastique

Un modèle déformable est caractérisé par son énergie totale  $E = E_i + E_e$ , et l'ajustement du modèle aux données est obtenu par minimisation de cette énergie. Des alternatives



à ce paradigme sont citées ci-dessous :

### Approche par ensembles de niveaux (level sets)

Une des limitations des modèles déformables classiques est leur incapacité à changer de topologie. La méthode *par ensemble de niveaux* permet lors de l'évolution du modèle déformable la rupture de la topologie. Cette méthode a été développée par Stanley Osher et James Sethian en 1988 dans [OS88]. On renvoie également au site internet de Sethian<sup>1</sup> et à la thèse de Dydenko [Dyd03] où cette méthode est détaillée, et où on trouvera aussi des développements récents de cette approche. Nous donnons ici le principe de cette méthode. Soit un contour initial  $\Gamma$ , une courbe fermée de  $\mathbb{R}^2$  et  $F$  une fonction qui donne la vitesse de  $\Gamma$  suivant la direction normale. La méthode des ensembles de niveaux consiste à considérer  $\Gamma$  comme le niveau zéro d'une fonction réelle  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $\Phi$  est négative à l'intérieur de  $\Gamma$  et positive à l'extérieur. Ainsi pour tout  $t$ ,  $\Phi$  est définie implicitement par la relation :

$$\Phi(\Gamma(t), t) = 0,$$

par dérivation par rapport à  $t$  de cette équation, on en déduit le problème d'évolution suivant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + F|\nabla \Phi| = 0 \quad (2.2a)$$

$$\Phi(\Gamma(t), t) = 0 \quad (2.2b)$$

Une fois le problème 2.2 résolu, l'interface  $\Gamma(t)$  est construite à l'instant  $t$  en prenant le niveau zéro de la fonction  $\Phi(\cdot, t)$  (figure 2.3). La figure 2.4 illustre le changement de topologie d'un contour initial.

Dans le cas particulier où l'on considère un front qui se propage avec une vitesse  $F$  de signe constant l'approche par ensemble de niveaux est connue sous le nom de *Fast Marching*.

Pour la résolution numérique du problème 2.2, Osher et Sethian proposent dans [OS88] des algorithmes fondés sur les équations d'Hamilton-Jacobi du mouvement. D'autres schémas de résolution sont présentés dans [Set99].

### Approche géométrique des contours actifs

Dans [CCCD93], Caselles présente une *approche géométrique* des contours actifs qui rentre dans la famille des méthodes par ensembles de niveaux (la condition initiale dans cette approche peut changer de topologie). Le modèle s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|)(c + \kappa)|\nabla u|, \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup><http://math.berkeley.edu/~sethian/>

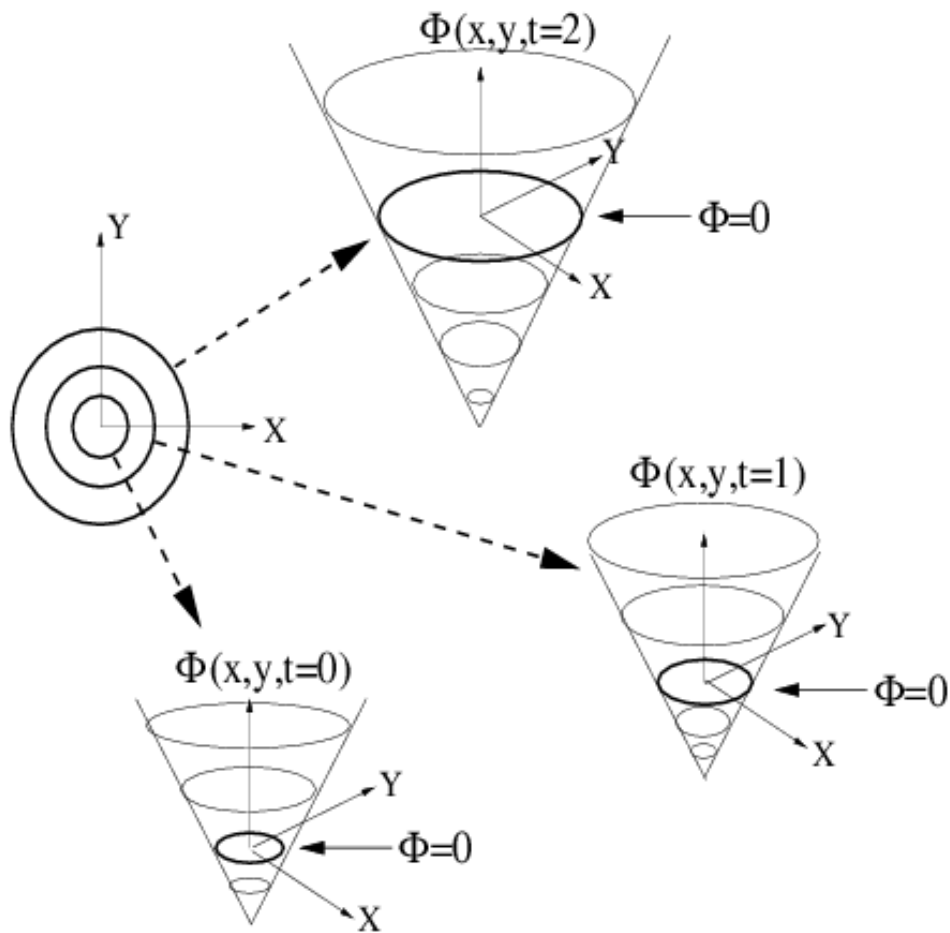


FIG. 2.3 – Représentation d'un contour par l'isocontours de niveau 0, dans la technique par ensembles de niveaux [Set99].

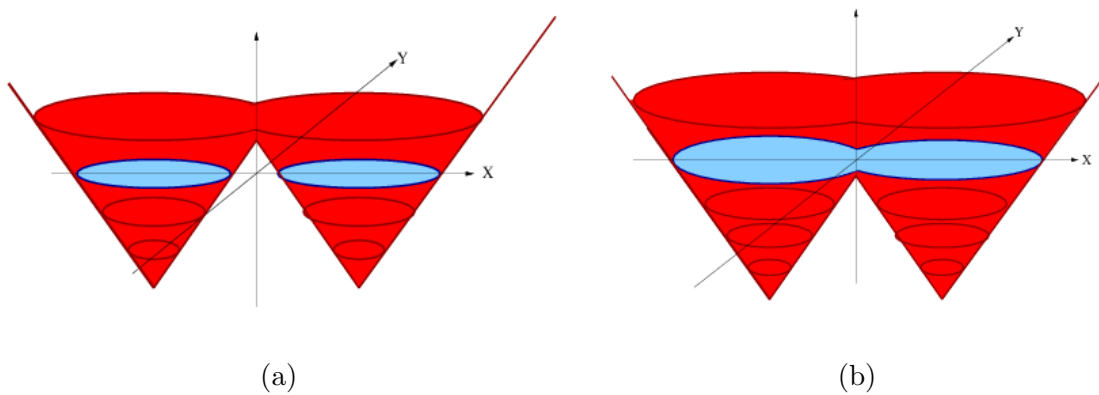


FIG. 2.4 – Segmentation par la technique des ensembles de niveaux : (a) deux fronts séparés initialement, (b) changement de topologie après quelques itérations [Set99].

avec  $c$  est une constante positive,  $\kappa$  la courbure et  $g$  une fonction qui guide le front vers les frontières de l'objet à segmenter,  $I$  est obtenu par convolution de l'image par un filtre gaussien. La fonction  $g$  est généralement du type :

$$g(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + |\nabla I|^p}, \quad p = 1, \text{ ou } 2.$$

Si l'on dresse un parallèle avec le modèle de contour actif (qui consiste à minimiser une énergie interne et une énergie externe), le terme  $(c + \kappa)$  correspond aux forces internes et  $g(|\nabla I|)$  coïncide avec la force externe. L'objection que Caselles formule vis à vis de cette méthode est la difficulté du choix du paramètre  $c$  (voir [CCCD93]).

### Approche géodésique

Dans [CKS97], Caselles et al. présentent un modèle qui permet de s'affranchir de la difficulté du choix de la constante  $c$  dans le modèle géométrique de Caselles [CCCD93]. Ils montrent qu'en négligeant les dérivées secondes la minimisation de l'énergie du contour actif classique est équivalente à la recherche d'une courbe géodésique dans un espace de Riemann dont la métrique est induite par le contenu de l'image. Précisément, rappelons que si  $\mathcal{C}$  désigne une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^2$  alors l'énergie du contour actif classique en négligeant la dérivée seconde est donnée par

$$E(\mathcal{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(s)| ds + \lambda \int_0^1 |\nabla I(\mathcal{C}(s))| ds. \quad (2.4)$$

dans [CKS97], on montre que la minimisation de (2.4) est équivalente à minimiser

$$\int_0^1 g(|\nabla I(\mathcal{C}(s))|) |\mathcal{C}'(s)| ds, \quad (2.5)$$

où  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction strictement décroissante telle que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0$ .

### Trajectoire déformable

Ce modèle est fondé sur le principe de Fermat "Pour aller d'un point à un autre, la lumière emprunte le trajet pour lequel le temps de parcours est minimum". Ce modèle a été introduit par Deléchelle et Lemoine [DL00] dans le cadre de la segmentation d'image. Le contour n'est plus assimilé à un corps élastique mais il est représenté par la trajectoire d'un rayon lumineux qui se propage dans le plan de l'image. L'image est assimilée à un milieu de propagation, l'intensité des niveaux de gris est liée à l'indice de réfraction  $n$  qui caractérise ce milieu

$$n(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x, y)|^p}, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Les points de contour dans cette approche correspondent à un indice de réfraction proche de zéro.

### Approche bayésienne

Cette approche consiste à formuler le modèle déformable sous une forme probabiliste. Soit  $\mathbf{c}$  le vecteur de paramètres du modèle, considéré comme un vecteur de variables statistiques. Pour une image  $I$ , la probabilité  $P(\mathbf{c}|I)$  appelée *probabilité a posteriori* mesure l'adéquation du modèle défini par le vecteur de paramètre  $\mathbf{c}$  à la donnée  $I$ . L'ajustement du modèle s'obtient en recherchant le maximum a posteriori (MAP).

La probabilité  $P(\mathbf{c}|I)$  peut être déterminée par la règle de Bayes

$$P(\mathbf{c}|I) = \frac{P(I|\mathbf{c})P(\mathbf{c})}{P(I)} \quad (2.6)$$

$P(I)$  est considérée comme constante.  $P(\mathbf{c})$  constitue la probabilité a priori du modèle. Cette probabilité doit être maximale pour les configurations du modèle susceptibles de convenir, minimale pour celles qui ne sont pas réalistes.  $P(I|\mathbf{c})$  est la vraisemblance des données  $I$  compte tenu de la configuration définie par  $\mathbf{c}$  du modèle.

On vérifie que le maximum de la probabilité a posteriori coïncide avec le minimum de l'énergie totale du modèle déformable, ([Sto94, DMZ96]).

## Chapitre 3

# Modèle semi-linéaire

Ce chapitre est consacré à la déformation finale du modèle géométrique vers la cible (après que celui-ci ait été placé à proximité de l'objet à segmenter par une transformation affine). Nous présentons un modèle déformable élastique sous contrainte géométrique. Un champ de forces qui s'annule sur la frontière de chaque objet est construit. La minimisation de l'énergie élastique linéaire sous contrainte de champ nul impose aux déplacements à transporter la frontière du modèle vers les points d'annulation du champ de forces (positionnement des surfaces). Nous donnons un résultat d'existence d'un minimum et des conditions nécessaires d'optimalité ainsi qu'un algorithme permettant d'en trouver une solution. Finalement, l'algorithme est mis en œuvre avec la méthode des éléments finis et nous évaluons l'algorithme sur un objet de synthèse.

### 3.1 Formulation du problème de minimisation sous contrainte

#### 3.1.1 Introduction

La région à déformer est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , qu'on suppose borné et à frontière Lipschitzienne. Nous aurons besoin d'un champ de vecteurs  $\mathbf{t}$  défini sur une région  $\mathcal{O}$  contenant  $\bar{\Omega}$ ; en d'autres termes,  $\mathbf{t}$  est défini en tout  $x$  à une distance au plus  $\delta > 0$  de  $\Omega$ . Le champ de forces extérieures  $\mathbf{t}$  qui sera utilisé pour la segmentation d'images a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \text{ est une fonction continûment différentiable de } \mathcal{O} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{et sa dérivée } D\mathbf{t} \text{ est Lipschitzienne} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si  $\varphi$  désigne la déformation, et  $u$  le déplacement, nous avons

$$\varphi(x) = x + u(x) \quad \text{et} \quad \nabla\varphi(x) = (I + \nabla u)(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Le tenseur linéarisé des déformations  $\epsilon(u)$  est défini par

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \tag{3.2}$$

ce qui revient à supposer satisfaite l'hypothèse des petits déplacements c.à.d  $\|u\| \ll 1$ . On suppose le milieu homogène et isotrope. Par conséquent en notant  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé, le tenseur des contraintes  $\sigma(u)$  est relié au tenseur des déformations  $\epsilon(u)$  par la loi de Hooke :

$$\sigma(u) = \lambda \operatorname{Tr}(\epsilon(u)) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon(u), \quad (3.3)$$

ici,  $\operatorname{Tr}(\epsilon)$  est défini par  $\operatorname{Tr}(\epsilon) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ . L'énergie élastique de déformation est

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(v) : \epsilon(v) \, dx, \quad (3.4)$$

nous étudierons la minimisation de cette énergie sous la contrainte

$$\mathbf{t}(I + u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

ainsi que les propriétés du minimiseur.

### 3.1.2 Conditions d'optimalité

Tout d'abord, nous définissons les espaces fonctionnels dont nous aurons besoin. Soit  $\mathbf{L} = (L^2(\Omega))^3$ , si  $H^1(\Omega)$  désigne l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable, dont le gradient est aussi de carré intégrable, on pose alors  $\mathbf{H} = (H^1(\Omega))^3$ . Nous notons  $\gamma$  l'opérateur de trace de  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}$  et nous définissons la fonction  $K$  par :

$$\begin{aligned} K : \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \\ v &\mapsto \gamma(\mathbf{t}(I + v)). \end{aligned}$$

L'hypothèse (3.1) implique que l'application  $v \mapsto \mathbf{t}(I + v)$  est continue de  $\mathbf{H}$  dans lui-même ; en vertu de la continuité de  $\gamma$ ,  $K$  est continue de  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}$  de plus l'image par  $K$  d'un borné de  $\mathbf{H}$  est un borné de  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}$ . Finalement, l'ensemble des champs de déplacements  $v$  admissibles est défini par

$$C = \{v \in \mathbf{H} \text{ tels que } K(v) = 0\}.$$

On considère le modèle déformable suivant : trouver  $u$  tel que

$$F(u) = \inf_{v \in C} F(v), \quad (3.5)$$

les structures d'intérêt dans les images cardiaques (IRM), notés  $\tilde{\Omega}$ , est récupéré avec  $\tilde{\Omega} = (I + u)\Omega$ .

Notons que l'application

$$v \rightarrow \left( \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

n'est pas une norme sur  $\mathbf{H}$  mais une semi-norme. Ce qui constitue une difficulté pour montrer la propriété  $\mathbf{H}$ -coercive de la fonctionnelle  $F$  à l'aide de l'inégalité de Korn.

Pour pallier cette difficulté on passe au quotient<sup>1</sup> par l'ensemble des déplacements rigides  $\mathcal{R} = \text{Ker } \epsilon$ ; on introduit l'espace de Hilbert :

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}/\mathcal{R}$$

et  $\bar{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}$  l'ensemble des traces sur  $\partial\Omega$  des fonctions de  $\bar{\mathbf{H}}$ . On définit, pour  $\bar{v} \in \bar{\mathbf{H}}$

$$\bar{F}(\bar{v}) = F(v), \quad \bar{K}(\bar{v}) = K(v) \text{ pour tout } v \in \bar{v}, \quad (3.6)$$

et l'espace des déplacement admissibles sur l'espace quotient par

$$\bar{C} = \{\bar{v} \in \bar{\mathbf{H}} \text{ tels que } \bar{K}(\bar{v}) = 0\}.$$

Notons que la fonctionnelle  $\bar{F} : \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe et  $\bar{\mathbf{H}}$ -coercive, voir [DL72] page 117. On considère le problème, de minimisation sous contrainte, auxiliaire suivant : trouver  $\bar{u}$  tel que

$$\bar{F}(\bar{u}) = \inf_{\bar{v} \in \bar{C}} \bar{F}(\bar{v}). \quad (3.7)$$

**Lemme 3.1.2.1** *Le sous-ensemble  $\bar{C}$  de  $\bar{\mathbf{H}}$  est fermé. De plus l'opérateur  $\bar{F}$  est faiblement semi-continu inférieurement (s.c.i.).*

**Preuve.** Le sous-ensemble  $\bar{C}$  est fermé puisque l'application  $\bar{K}$  est continue sur  $\bar{\mathbf{H}}$ . Soit  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\bar{\mathbf{H}}$  faiblement convergente vers  $\bar{u}$ .  $\bar{F}$  est convexe et dérivable, par conséquent

$$\bar{F}(\bar{u}_k) - (\text{D}\bar{F}(\bar{u}), \bar{u}_k - \bar{u}) \geq \bar{F}(\bar{u}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

par passage à la limite faible on obtient l'inégalité

$$\liminf \bar{F}(\bar{u}_k) \geq \bar{F}(\bar{u})$$

ce qui prouve que  $\bar{F}$  est faiblement s.c.i. ■

Notons que d'après le théorème de Hahn-Banach, toute fonction convexe continue sur un espace de Banach est faiblement s.c.i. (voir [Bre83]).

**Théorème 3.1.2.1** *Le problème (3.7) possède une solution  $\bar{u} \in \bar{C}$ . De plus si on suppose que la dérivée  $\text{DK}(\bar{u})$  est un opérateur surjectif appartenant à  $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{H}}; \bar{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}})$ , alors on a les conditions d'optimalité suivantes :  $\exists \lambda \in (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}})'$  tel que pour  $u \in \bar{u}$*

$$-\text{div}(\sigma(u)) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (3.8a)$$

$$\sigma(u) \cdot n = -\lambda \circ \text{DK}(u) = -\lambda \circ \text{Dt}(I + u) \quad \text{sur } \partial\Omega; \quad (3.8b)$$

$$K(u) = 0 \quad \text{c. à. d.} \quad \mathbf{t}(I + u)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.8c)$$

<sup>1</sup>Nous distinguons les grandeurs relatives au quotient par un bar.

**Preuve.** La fonctionnelle  $\bar{F}$  est  $\bar{\mathbf{H}}$ -coercive donc minorée. Soit  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante :

$$\bar{u}_k \in \bar{C} \quad \text{pour tout } k \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{F}(\bar{u}_k) = \inf_{\bar{v} \in \bar{C}} \bar{F}(\bar{v}).$$

La suite  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  étant bornée,  $\bar{\mathbf{H}}$  est un espace de Hilbert et  $\bar{F}$  est coercive. Donc il existe une sous-suite, encore notée  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers  $\bar{u}$  dans  $\bar{\mathbf{H}}$ . En vertu de la continuité de l'application  $\bar{K}$  de  $\bar{\mathbf{H}}$  dans  $\bar{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}$  et de la compacité de l'injection de  $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3$  dans  $(L^2(\partial\Omega))^3$ , la suite  $(\bar{K}(\bar{u}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $\bar{K}(\bar{u})$  dans  $(L^2(\partial\Omega))^3/\mathcal{R}$ . Donc il existe une sous-suite, encore notée  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $(\bar{K}(\bar{u}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge presque partout vers  $\bar{K}(\bar{u})$  (voir [Bre83] Thm. 4.9 p. 58), ainsi  $\bar{u}$  est un élément de  $\bar{C}$ . Par ailleurs  $\bar{F}$  est s.c.i. d'après le lemme 3.1.2.1, par conséquent

$$\inf_{\bar{v} \in \bar{C}} \bar{F}(\bar{v}) = \liminf \bar{F}(\bar{u}_k) \geq \bar{F}(\bar{u}) \geq \inf_{\bar{v} \in \bar{C}} \bar{F}(\bar{v}).$$

Ce qui prouve l'existence d'un minimum du problème (3.7) dans  $\bar{C}$ .

Les conditions d'optimalité sont obtenues par le Thm. 3.1.36 p. 124 de [Ber77], qui donne pour toute solution  $\bar{u}$  du problème de minimisation (3.7) et  $u \in \bar{u}$  l'existence d'un multiplicateur  $\lambda \in (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}})'$  tel que :

$$DF(u) - \lambda \circ DK(u) = 0.$$

■

*Remarque 1* Grâce à l'équation (3.8c), l'équation (3.8b) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma(u) \cdot n &= \mathbf{t}(I + u) - \lambda \circ DK(u) \\ &= \mathbf{t}(I + u) - \lambda \circ D\mathbf{t}(I + u) \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

## 3.2 Algorithme de résolution

Dans cette section nous proposons un algorithme qui permet de calculer une approximation d'une solution du problème (3.8). La convergence de cet algorithme sera traitée dans la section suivante. Lorsque l'ensemble  $C$  n'est pas convexe la résolution du problème (3.8) se heurte à deux difficultés : satisfaire la contrainte  $K(u) = 0$  et calculer le multiplicateur  $\lambda$ . Comme nous l'avons mentionné précédemment dans la remarque 1 nous pouvons modifier les conditions d'optimalité. Nous proposons de remplacer l'équation (3.8b) par

$$\begin{aligned} \sigma(u) \cdot n &= \mathbf{t}(I + u) - \lambda \circ DK(u) \\ &= \mathbf{t}(I + u) - \lambda \circ D\mathbf{t}(I + u) \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nous considérons ainsi le processus itératif : pour  $u_0 = 0$ ,  $u_k$  donnée, trouver  $(\lambda_{k+1}, u_{k+1}) \in (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}})' \times \mathbf{H}$  tel que :



$$-\operatorname{div}(\sigma(u_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (3.11a)$$

$$\sigma(u_{k+1}) \cdot n = \mathbf{t}(I + u_k) - \lambda_{k+1} \circ D\mathbf{t}(I + u_k) \quad \text{sur } \partial\Omega; \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{t}(I + u_{k+1}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.11c)$$

Pour éviter de calculer les multiplicateurs  $\lambda_{k+1}$ , nous remarquons que si l'algorithme (3.11) converge, alors l'équation (3.11b) devient à la limite sur  $k$

$$\sigma(u_\infty) \cdot n = -\lambda_\infty \circ D\mathbf{t}(I + u_\infty). \quad (3.12)$$

Ainsi nous remplaçons  $-\lambda_{k+1} \circ D\mathbf{t}(I + u_k)$  par  $\sigma(u_k) \cdot n$ , l'équation (3.11c) peut être enlevée du système (3.11) vu que cette condition est satisfaite implicitement quand on passe à la limite. Donc l'algorithme (3.11) devient : pour  $u_0 = 0$ ,  $u_k$  donnée, trouver  $u_{k+1} \in \mathbf{H}$  tel que :

$$-\operatorname{div}(\sigma(u_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (3.13a)$$

$$\sigma(u_{k+1}) \cdot n = \mathbf{t}(I + u_k) + \sigma(u_k) \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.13b)$$

ce qui correspond à un processus itératif de type petites déformations dans le corps, mais les conditions aux bord sont de type grandes déformations en traction pure. Pour éviter de supposer que  $\mathbf{t}(I + u_k)$  soit équilibré, soit  $0 < \beta$  un paramètre fixe, nous considérons l'algorithme suivant :

$$-\operatorname{div}(\sigma(u_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (3.14a)$$

$$\sigma(u_{k+1}) \cdot n + \beta(u_{k+1} - u_k) = \mathbf{t}(I + u_k) + \sigma(u_k) \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.14b)$$

Nous obtenons

**Lemme 3.2.0.2** *Pour  $u_k \in \mathbf{H}$  donnée, le problème (3.14) admet une unique solution  $u_{k+1} \in \mathbf{H}$ .*

**Preuve.** Nous introduisons la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  définie par

$$a : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi, \psi \mapsto a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma(\varphi)_{ij} \epsilon(\psi)_{ij} \, dx. \quad (3.15)$$

Une formulation variationnelle du problème (3.14) s'écrit : pour  $u_k$  donné tel que  $\operatorname{div}(\sigma(u_k)) = 0$ , trouver  $u_{k+1} \in \mathbf{H}$  vérifiant pour tout  $\varphi \in \mathbf{H}$ ,

$$a(u_{k+1}, \varphi) + \beta(u_{k+1}, \varphi)_{\partial\Omega} = \beta(u_k, \varphi)_{\partial\Omega} + a(u_k, \varphi) + (\mathbf{t}(I + u_k), \varphi)_{\partial\Omega}. \quad (3.16)$$

Le second membre de l'équation 3.16 définit une forme linéaire sur  $\mathbf{H}$ . La continuité de la forme linéaire  $\phi \mapsto \beta(\psi, \phi)_{\partial\Omega}$   $\psi \mapsto (\mathbf{t}(I + \psi), \phi)_{\partial\Omega}$  est une conséquence de l'hypothèse (3.1) (si  $D\mathbf{t}$  est une fonction bornée alors  $\mathbf{t}(I + \psi) \in \mathbf{H}_{\mathbf{N}}$  pour tout  $\psi \in \mathbf{H}_{\mathbf{N}}$  voir [GT83] lemme 7.5 p. 144).

Par ailleurs, la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot) + \beta(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$  est  $\mathbf{H}$ -coercitive puisque si une fonction  $\varphi \in \mathbf{H}$  a une trace nulle sur le bord et vérifie  $\epsilon(\varphi) = 0$  alors cette fonction est nulle (voir [DL72] p. ). Le théorème de Lax-Milgram s'applique et nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.14). ■

Montrons que si l'algorithme (3.14) converge, alors la limite  $\tilde{u}$  vérifie la contrainte :  $K(\tilde{u}) = 0$ .

**Lemme 3.2.0.3** *Supposons que la suite  $(u_0 = 0, \{u_k\}_{k=1}^{\infty}) \subset \mathbf{H}$  des solutions de l'algorithme (3.14) existe et converge faiblement vers  $\tilde{u}$ . Alors  $\tilde{u}$  vérifie :*

$$-\operatorname{div}(\sigma(\tilde{u})) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (3.17a)$$

$$\sigma(\tilde{u}) \cdot n = -\beta\tilde{u} + \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{t}(I + u_l) \quad \text{sur } \partial\Omega; \quad (3.17b)$$

$$K(\tilde{u}) = 0 \quad \text{c. à. d.} \quad \mathbf{t}(I + \tilde{u})|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.17c)$$

De plus si  $DK^*(\tilde{u})$  est surjective, alors il existe  $\mu$  tel que

$$\sigma(\tilde{u}) \cdot n = -\mu \circ DK(\tilde{u}),$$

**Preuve.** D'après l'équation (3.14b) on a la convergence faible  $(\mathbf{t}(I + u_k))$  vers zéro dans  $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3$ . Comme l'injection de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  est compacte, on peut extraire de  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite, encore notée  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\tilde{u}$  p. p. sur  $\partial\Omega$ . Nous en déduisons que  $\mathbf{t}(I + \tilde{u}) = 0$  p. p. sur  $\partial\Omega$ .

Quelle est la relation entre le problème (3.17) et le problème (3.8) ? Si nous supposons que  $DK^*(\tilde{u})$  est surjective, il suffit de prendre  $-\mu^* \in DK^*(\tilde{u})^{-1} \left( \beta(\tilde{u}) - \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{t}(I + u_l) \right)^*$  d'où  $\tilde{u}$  est une solution du problème (3.8).

■

Pour un paramètre  $\tau$  strictement positif très petit. On définit un champ de forces  $\mathbf{t}^\tau$  défini par

$$\mathbf{t}^\tau(I + v) = \mathbf{t}(I + v) - \tau v$$

Nous perturbons le problème (3.14) par le paramètre  $\tau$ . Soit  $0 < \beta$  un paramètre fixé, nous considérons l'algorithme : pour  $u_k \in \mathbf{H}$  donné tel que  $\operatorname{div}(\sigma(u_k)) = 0$ , trouver  $u_{k+1} \in \mathbf{H}$  vérifiant :

$$-\operatorname{div}(\sigma(u_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (3.18a)$$

$$\sigma(u_{k+1}) \cdot n + \beta(u_{k+1} - u_k) = \mathbf{t}^\tau(I + u_k) + \sigma(u_k) \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.18b)$$

Dans [PVC<sup>+</sup>01] un algorithme similaire a été proposé sans tenir compte de la contrainte de champ nul considérée dans ce chapitre. L'équation (3.14b) a été remplacée par  $\sigma(u_{k+1}) \cdot n = \mathbf{t}(I + u_k)$ . Cet algorithme a été testé dans [BPP02] et ne converge pas vers les formes que l'on souhaite identifier. Pour mettre en évidence la pertinence de l'ajout de la contrainte géométrique sur le bord, nous testons dans la section 3.5 sur une image de synthèse l'algorithme sans contrainte proposé par [PVC<sup>+</sup>01] et l'algorithme (3.14) qui tient compte de la contrainte de champ nul.

### 3.3 Convergence de l'algorithme en dimension finie

Notons que la dérivée de  $\mathbf{t}$  est non inversible puisque l'ensemble de ses zéros est le bord de l'objet que l'on veut détecter. La méthode du Gradient Vector Flow construit la fonction  $\mathbf{t}$  en résolvant une équation aux dérivées partielles. Dans ce qui suit nous donnons des conditions suffisantes pour prouver la convergence de l'algorithme (3.14) lorsque l'espace  $\mathbf{H}$  est approché par un espace de dimension finie construit avec une méthode de Galerkin. Puis nous considérerons un problème "jouet" qui mime les principales difficultés du problème original (c'est-à-dire que la dérivée  $D\mathbf{t}$  n'est pas régulière), pour lequel la convergence de l'algorithme (3.14) sera étudiée numériquement.

Soit  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une famille dense de fonctions de base de  $\mathbf{H}$ . Pour un entier positif donné  $N$ , nous introduisons un espace  $\mathbf{H}_N$  de dimension finie  $N$  défini par

$$\mathbf{H}_N = \text{Vect}\{\psi_1, \dots, \psi_N\}.$$

Dans ce qui suit, nous notons par  $u$  une solution du problème (3.7) dans  $\mathbf{H}_N \cap C$ . Pour étudier la convergence de l'algorithme (3.14) nous introduisons sur la dérivée pour le champ de forces  $\mathbf{t}$  les hypothèses suivantes :

$$\langle DK(u)\varphi, \varphi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}} = (D\mathbf{t}(I + u)\varphi, \varphi)_{\partial\Omega} \leq 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathbf{H}_N, \quad (3.19a)$$

Si l'opérateur  $DK(u)$  vérifie l'hypothèse (3.19a), alors  $DK(u)$  est semi-définie négative en  $u$  pour tout  $\varphi \in \mathbf{H}_N$ .

Nous rappelons que pour un paramètre très petit donné  $\tau$ , nous avons défini un champ de forces  $\mathbf{t}^\tau$  défini par

$$\mathbf{t}^\tau(I + v) = \mathbf{t}(I + v) - \tau v.$$

Soit  $0 < \beta$  un paramètre fixé, nous considérons l'algorithme : pour  $u_k \in \mathbf{H}_N$  donné tel que  $\text{div}(\sigma(u_k)) = 0$ , trouver  $u_{k+1} \in \mathbf{H}_N$  vérifiant :

$$-\text{div}(\sigma(u_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.20a)$$

$$\sigma(u_{k+1}) \cdot n + \beta(u_{k+1} - u_k) = \mathbf{t}^\tau(I + u_k) + \sigma(u_k) \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.20b)$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés de la suite des solutions  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de l'algorithme (3.20).

Dans ce qui suit nous donnons quelques résultats préliminaires pour établir par la suite un résultat de convergence de l'algorithme (3.20)

**Lemme 3.3.0.1** *Pour tout  $\psi \in \mathbf{H}_N$  l'opérateur*

$$\begin{aligned} L^{-1} : \mathbf{H}_N &\longrightarrow \mathbf{H}_N \\ \psi &\longmapsto w \text{ vérifiant} \\ a(w, \varphi) + \beta(w, \varphi)_{\partial\Omega} &= \beta(\psi, \varphi)_{\partial\Omega} + \\ a(\psi, \varphi) + (\mathbf{t}^\tau(I + \psi), \varphi)_{\partial\Omega} &\quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_N \end{aligned} \quad (3.21)$$

*est bien défini.*

Pour la démonstration de ce lemme voir le lemme 3.2.0.2.

**Lemme 3.3.0.2** *Nous supposons que  $D\mathbf{t}^\tau$  est une fonction localement Lipchitzienne, soit  $\psi \in \mathbf{H}_N$  donnée, alors  $L^{-1}$  est un opérateur de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus l'opérateur linéaire  $DL^{-1}(\psi)$  est défini par*

$$\begin{aligned} DL^{-1}(\psi) : \mathbf{H}_N &\longrightarrow \mathbf{H}_N \\ v &\longmapsto w \text{ vérifiant} \\ a(w, \varphi) + \beta(w, \varphi)_{\partial\Omega} &= \beta(v, \varphi)_{\partial\Omega} + \\ a(v, \varphi) + (D\mathbf{t}^\tau(I + \psi)v, \varphi)_{\partial\Omega} &\quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_N. \end{aligned} \quad (3.22)$$

**Preuve.** Posons  $L^{-1}(\psi + v) = z + w$ ;  $L^{-1}(\psi) = z$ , d'après l'hypothèse (3.1) nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\tau(I + \psi + v) - \mathbf{t}^\tau(I + \psi) &= D\mathbf{t}^\tau(I + \psi)v \\ + \int_0^1 (D\mathbf{t}^\tau(I + \psi + sv) - D\mathbf{t}^\tau(I + \psi))v ds &\text{ p. p. sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Etant donné que l'opérateur  $D\mathbf{t}^\tau$  est localement Lipchitzien, la continuité de l'opérateur trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^p(\partial\Omega)$  pour  $1 \leq p \leq 3$

$$\|\varphi\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_p \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (3.24)$$

nous conduit à l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 (D\mathbf{t}^\tau(I + \psi + sv) - D\mathbf{t}^\tau(I + \psi)) ds v, \varphi \right)_{\partial\Omega} &\leq \\ C_{Lips} C \|v\|_{\mathbf{H}_N}^2 \|\varphi\|_{(L^2(\partial\Omega))^3}. &\end{aligned} \quad (3.25)$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} a(L^{-1}(\psi + v) - L^{-1}(\psi) - DL^{-1}(\psi)v, \varphi) + \\ \beta(L^{-1}(\psi + v) - L^{-1}(\psi) - DL^{-1}(\psi)v, \varphi)_{\partial\Omega} &\leq \\ C_{Lips} C \|v\|_{\mathbf{H}_N}^2 \|\varphi\|_{(L^2(\partial\Omega))^3}. &\quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_N. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le lemme est donc prouvé. ■

**Lemme 3.3.0.3** *Soit  $B$  un espace de Banach de dimension finie et soit  $T \in \mathcal{L}(B)$  un opérateur de rayon spectral  $\rho(T)$ . Pour un réel  $0 < \epsilon$  donné, il existe une norme  $\|\cdot\|$  telle que :*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(B)} \leq \rho(T) + \epsilon.$$

**Preuve.** Le rayon spectral de  $T$  peut être caractérisé par la relation

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|_B^{\frac{1}{n}}. \quad (3.27)$$

Soit  $N(\epsilon)$  tel que

$$\|T^{N(\epsilon)+1}\|_B^{\frac{1}{N(\epsilon)+1}} \leq \rho(T) + \epsilon. \quad (3.28)$$

Nous introduisons la norme  $\|\cdot\|$  définie par

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{N(\epsilon)} \frac{1}{(\rho(T) + \epsilon)^j} \|T^j x\|_B.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}(B)} &= \sup_{x \neq 0} \left( \frac{\sum_{j=0}^{N(\epsilon)} \frac{\|T^{j+1}x\|_B}{(\rho(T) + \epsilon)^j}}{\sum_{j=0}^{N(\epsilon)} \frac{\|T^j x\|_B}{(\rho(T) + \epsilon)^j}} \right) \\ &= (\rho(T) + \epsilon) \sup_{x \neq 0} \left( \frac{\sum_{j=0}^{N(\epsilon)} \frac{\|T^{j+1}x\|_B}{(\rho(T) + \epsilon)^{j+1}}}{\sum_{j=0}^{N(\epsilon)} \frac{\|T^j x\|_B}{(\rho(T) + \epsilon)^j}} \right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\|T\|_{\mathcal{L}(B)} = \sup_{x \neq 0} \left( \frac{\|x\| - \|x\|_B + \frac{\|T^{N(\epsilon)+1}x\|_B}{(\rho(T)+\epsilon)^{N(\epsilon)+1}}}{\|x\|} \right).$$

Comme  $\|T^{N(\epsilon)+1}x\|_B \leq \|T^{N(\epsilon)+1}\|_{\mathcal{L}(B)} \|x\|_B$ , l'inégalité (3.28) achève la démonstration.

■

Maintenant, nous sommes en mesure de donner un théorème de convergence de l'algorithme (3.20).

**Théorème 3.3.0.2** *Soit  $\beta$  tel que  $\|D(\mathbf{t}^\tau(I+u))\|_{\mathcal{L}} < \beta$  donné, nous supposons que les hypothèses (3.1) et (3.19) sont satisfaites. Alors les valeurs propres  $\mu$  de l'opérateur  $DL^{-1}(u) : \mathbf{H}_{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbf{N}}$  vérifient :*

$$0 < \mu < 1.$$

*De plus il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $u$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}$ , et telle que pour tout  $u_0 \in \mathcal{U}$  avec  $\operatorname{div}(\sigma(u_0)) = 0$  tel que la suite des fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{H}_{\mathbf{N}}$  vérifiant*

$$\begin{aligned} a(u_{n+1}, \varphi) + \beta(u_{n+1}, \varphi)_{\partial\Omega} &= a(u_n, \varphi) + \\ \beta(u_n, \varphi)_{\partial\Omega} + (\mathbf{t}^\tau(I+u_n), \varphi)_{\partial\Omega} &\quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_{\mathbf{N}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

est convergente.

**Preuve.** Soit  $\mu$  une valeur propre de  $DL^{-1}(u)$ , c'est à dire qu'il existe  $v \in \mathbf{H}_N$  tel que

$$DL^{-1}(u)v = \mu v \quad (3.30)$$

Posons  $w = \mu v$ , nous avons pour tout  $\varphi \in \mathbf{H}_N$

$$\begin{aligned} a(w, \varphi) + \beta(w, \varphi)_{\partial\Omega} &= \beta(v, \varphi)_{\partial\Omega} + a(v, \varphi) + \\ (D\mathbf{t}^\tau(I + u)v, \varphi)_{\partial\Omega} &= \frac{1}{\mu}(\beta(w, \varphi)_{\partial\Omega} + a(w, \varphi) + \\ (D\mathbf{t}^\tau(I + u)w, \varphi)_{\partial\Omega}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Prenons  $\varphi = v$  dans (3.31) nous obtenons

$$0 < \frac{(\beta - \|D(\mathbf{t}^\tau(I + u))\|_{\mathcal{L}})}{a(v, v) + \beta(v, v)_{\partial\Omega}} \leq \mu. \quad (3.32)$$

Pour  $\varphi = w$  dans (3.31) nous avons

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{\mu})(a(w, w) + \beta(w, w)_{\partial\Omega}) &= \\ \frac{1}{\mu}(D\mathbf{t}^\tau(I + u)w, w)_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot) + \beta(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$  est  $\mathbf{H}$ -coercitive. Le terme de gauche dans la relation (3.33) est estimé par

$$(1 - \frac{1}{\mu})(\beta\|w\|_{(L^2(\partial\Omega))}^2 + a(w, w)). \quad (3.34)$$

L'hypothèse (3.19a ) implique que le terme de droite soit négatif, nous obtenons

$$(1 - \frac{1}{\mu}) < 0. \quad (3.35)$$

Comme  $0 < \mu$  nous obtenons  $0 < \mu < 1$ . Si  $u_0 \in \mathbf{H}_N$  d'après le lemme 3.2.0.2 le terme  $u_{n+1}$  vérifiant (3.29) appartient à  $\mathbf{H}_N$ . Donc nous considérons l'algorithme du point fixe (3.20) dans  $\mathbf{H}_N$ . Le rayon spectral de l'opérateur linéaire  $DL^{-1}(u)$  vérifie  $\rho(DL^{-1}(u)) < 1$ . D'après le lemme 3.3.0.3 nous avons pour  $0 < \epsilon$  l'existence d'une norme équivalente  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbf{H}_N$  tel que

$$\|DL^{-1}(u)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{H})} \leq \rho(DL^{-1}(u)) + \epsilon$$

Le théorème classique du point fixe pour les applications contractantes s'applique (voir Contraction Mapping Theorem [Ber77] p.111 ) et nous obtenons l'existence d'un voisinage  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbf{H}_N$  de  $u$  tel que pour tout  $u_0 \in \mathcal{U}$ ,  $\text{div}(\sigma(u_0)) = 0$  la suite des fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge.

■

*Remarque 2* Pour  $0 < \eta$  suffisamment grand fixé, la fonction  $F$  définie à la section 1 peut être augmentée d'un terme d'ordre zéro  $\eta \int_{\Omega} |v|^2 dx$ . L'opérateur  $L$  induit n'est plus l'opérateur classique de l'élasticité.

Le paramètre  $\beta$  peut être choisi nul si

$$0 < \sup_{v \in \mathbf{H}_N} a(v, v) + \int_{\Omega} |v|^2 dx - \|D(\mathbf{t}^\tau(I + u))\|_{\mathcal{L}}.$$

Le résultat de convergence obtenu en dimension finie ne peut pas être étendu simplement à la dimension infinie puisque l'opérateur  $DL^{-1}(u)$  n'est pas compact.

### 3.4 Evaluation sur des images synthétiques

Soit  $x \in \mathbb{R}^3$  et  $R_f$  un nombre positif, la norme euclidienne est notée  $\|x\|$ . Nous choisissons comme champ de forces externe la fonction suivante :

$$\mathbf{t}(x) = -\alpha \left( \|x\| - R_f \right) \frac{x}{\|x\|}. \quad (3.36)$$

avec  $0 < \alpha < 1$ .

Dans ce qui suit nous analysons les propriétés de convergence de l'algorithme (3.20) pour un tel champ de force avec une valeur du paramètre  $\tau$  fixée à zéro. Pour  $R_f = \frac{1}{2}$ ,  $R_f < R_0$  soit  $u \in \left( (H^1(B_{R_0}))^3 \right)$  la fonction solution du problème (3.7). Concernant la dérivée de l'opérateur  $K$  nous avons :

**Lemme 3.4.0.4** La dérivée  $DK(u)$  de l'opérateur  $K$  est définie par : pour tout  $v \in \left( H^1(B_{R_0}) \right)^3$

$$\begin{aligned} & \langle DK(u)\varphi, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}} = \\ & -\alpha \int_{\partial B_{R_0}} \frac{((I+u)(x)/\varphi(x))_{\mathbb{R}^3} ((I+u)(x)/v(x))_{\mathbb{R}^3}}{\|(I+u)(x)\|_{\mathbb{R}^3}^3} + \\ & \left( 1 - \frac{1}{2\|(I+u)(x)\|_{\mathbb{R}^3}} \right) (\varphi(x)/v(x))_{\mathbb{R}^3} dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Puisque  $u$  est une solution du problème (3.8) avec  $\Omega = B_{R_0}$ , nous avons  $\|(I + u)(x)\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{2}$  presque partout sur  $\partial B_{R_0}$ . Ainsi l'équation (3.37) devient : pour tout  $v \in \left( H^1(B_{R_0}) \right)^3$

$$\begin{aligned} & \langle D\mathbf{t}(I + u)\varphi, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}} = \\ & -\alpha \int_{\partial B_{R_0}} \frac{((I+u)(x)/\varphi(x))_{\mathbb{R}^3} ((I+u)(x)/v(x))_{\mathbb{R}^3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} dx, \end{aligned} \quad (3.38)$$

ce qui prouve que la forme bilinéaire induite  $D\mathbf{t}(I + u)$  est semi définie négative.

#### 3.4.1 Un problème "jouet" 2D

Afin d'évaluer pratiquement la vitesse de convergence des algorithmes du type (3.20), nous considérons un ensemble de points de  $\mathbb{R}^2$  qui sont liés les uns aux autres par des ressorts. Les constantes d'élasticité des ressorts sont des constantes. Les coordonnées des points sont représentées par un vecteur  $u_n$ , et une simplification extrême du modèle est représentée par une matrice tri-diagonale définie positive  $A^{-1}$ . La fonction  $\mathbf{t}$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$  avec  $\alpha = 0.2$  par :

$$\mathbf{t}(x) = -\alpha \left( \|x\| - 1 \right) \frac{x}{\|x\|}. \quad (3.39)$$

Remarquons qu'avec les notations introduites dans les sections précédentes, puisque  $u_0 = 0$ , nous pouvons ajouter  $\text{div}(\sigma(u_k))$  à la première équation de l'algorithme (3.20) qui se réécrit comme :

$$u_{n+1} = u_n + L^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{t}(I + u_n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi une version simplifiée du problème 2D est :

$$u_{n+1} = u_n + A^{-1} \mathbf{t}(I + u_n).$$

Les trois illustrations qui suivent (figures 3.1) représentent l'évolution des ressorts, où les points représentent la configuration initiale (figure 3.1-(a)). Dans la figure 3.1-(b), la configuration déformée après 4 itérations est représentée par des carrés qui sont les points et des lignes qui les relient sont les ressorts. La figure 3.1-(c) représente la configuration déformée après 30 itérations. La figure 3.1-(d) représente la configuration déformée après 3 itérations mais pour une valeur de la constante d'élasticité qui est double.

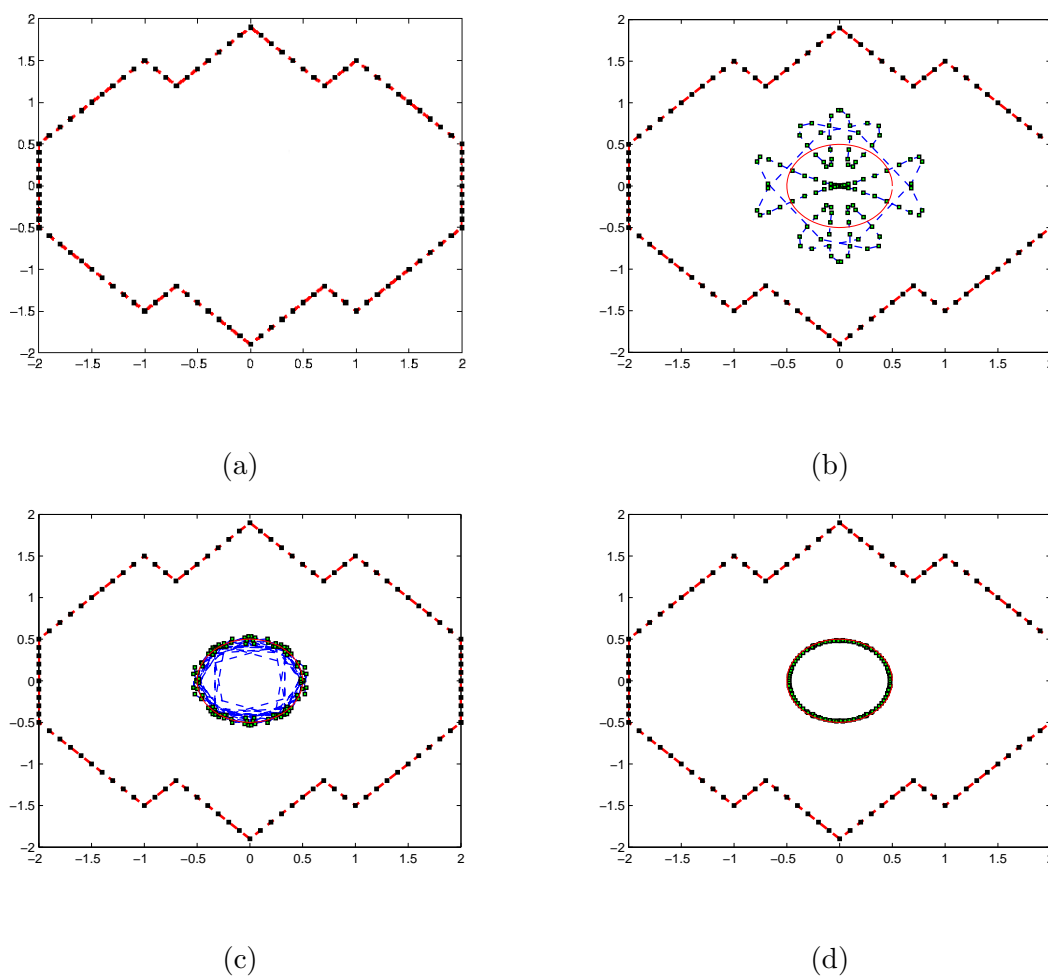


FIG. 3.1 – (a) Configuration initiale, (b) après 4 itérations, (c) après 30 itérations, (d) après 3 itérations avec une constante d'élasticité double.



### 3.5 Discussion et conclusions

Nous terminons ce chapitre par un test qui consiste à segmenter un cube sous forme d'image 3D binaire à partir d'un maillage sphérique. La segmentation est réalisée avec l'algorithme (3.20). L'espace  $\mathbf{H}$  est approché par la méthode des éléments finis tétraédrique de premier ordre, le paramètre  $\tau$  est fixé à zéro. Le maillage comporte 2237 tétraèdres et 519 nœuds, (cela représente une discrétisation du domaine initial  $\Omega$ ). Pour déformer le maillage nous avons utilisé deux types de champs de forces, le premier dérive d'un champ de potentiel calculé à partir d'une carte de distance, le second est généré par la méthode GVF. Les deux champs de forces sont à peu près nuls sur toutes les arêtes du cube, en supposant le champs de forces différentiable, on ne peut prendre en compte l'existence de coins dans l'image, qui doivent être arrondis, (figure 3.2-(a)). Nous donnons dans le chapitre 5 plus de détails sur le calcul des champs de forces. Le modèle géométrique, c'est à dire le maillage sphérique, et l'image (le cube) sont initialement centrés l'un par rapport à l'autre, comme le montre la figure 3.2-(b). La convergence de l'algorithme (3.20) est atteinte au bout de 15 itérations vers l'image cube. Le résultat de la simulation est donnée dans le figure 3.3-(b).

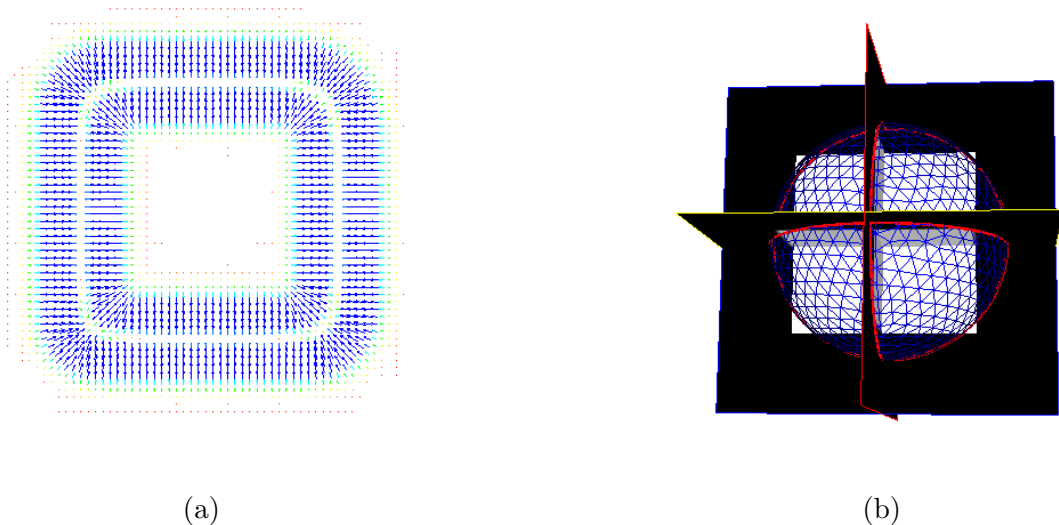


FIG. 3.2 – Segmentation sphère sur cube : données. (a) Champ de forces obtenu par GVF projeté en 2D sur un plan de coupe. (b) Vue 3D de la position initiale.

Dans [PVC<sup>+</sup>01] un algorithme similaire a été proposé sans tenir compte de la contrainte de champ nul considéré dans ce chapitre. L'algorithme n'a pas convergé vers les formes souhaités [BPP02]. Nous avons testé cet algorithme sur l'expérience décrite ci-dessus pour segmenter un cube sous forme d'image 3D binaire à partir d'un maillage sphérique (voir sur la Figure 3.3-(a) le résultat de la segmentation).

Notons que dans l'algorithme (3.20) proposé dans ce chapitre à chaque pas d'itération, la modélisation dans le corps est de type petites déformations, mais les conditions au

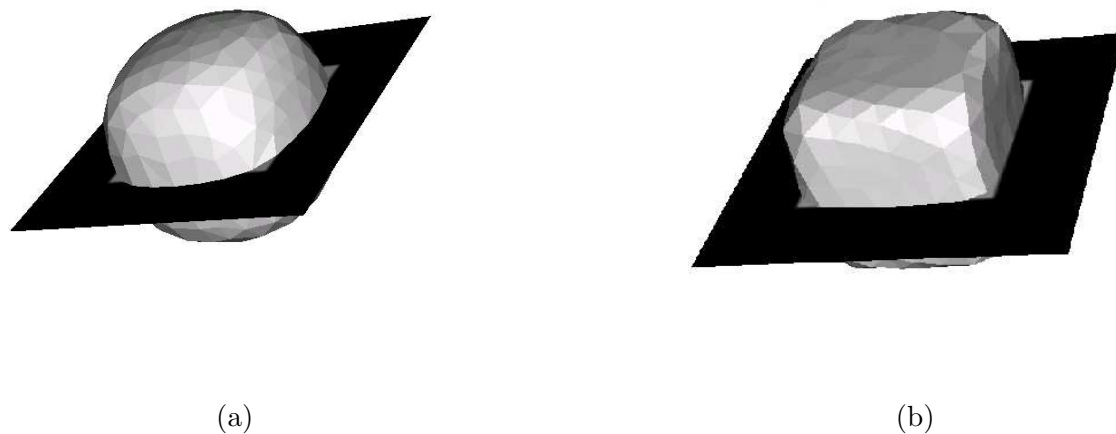


FIG. 3.3 – Segmentation sphère sur cube : résultats. (a) Sans contrainte. (b) L’algorithme avec contrainte (3.20).

bord sont de type grandes déformations. Est-ce que quand on passe à la limite on obtient effectivement la solution d’un vrai problème de grandes déformations ou au moins de grands déplacements? Dans une expérience de synthèse qui sera exposée dans le chapitre 5 nous avons pris une position initiale pour le modèle géométrique éloignée de l’objet à segmenter de sorte que la transformation nécessite au moins des grands déplacements. L’algorithme (3.20) n’a pas permis d’atteindre les surfaces souhaitées. Donc l’hypothèse de petits déplacements introduite dans la première section de ce chapitre est nécessaire. Dans le chapitre suivant nous apportons des éléments de réponse pour lever l’hypothèse des petits déplacements.

## Chapitre 4

# Modèles non-linéaires

Lorsque le modèle géométrique (configuration initiale), n'est pas proche de l'objet à segmenter, l'algorithme proposé dans le chapitre trois ne converge pas vers les formes souhaitées (voir chapitre 5 section 5.5). Dans le cadre de l'imagerie cardiaque, la nécessité de lever la contrainte des petits déplacements est évidente du fait d'une part de la variabilité de forme du muscle cardiaque d'un patient à l'autre, d'autre part de l'amplitude des déplacements observés durant la contraction du myocarde. Pour pallier cette difficulté nous proposons dans ce chapitre deux approches non-linéaires. Dans la première approche nous utilisons les équations de l'élasticité non-linéaire exprimées dans une configuration de référence au moyen du premier tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff avec des conditions aux limites de traction pure. Nous construisons un algorithme à l'aide d'une méthode incrémentale qui permet de trouver la solution du problème non-linéaire, ensuite nous appliquons ces résultats pour construire un modèle déformable. La seconde approche se base sur le modèle semi-linéaire présenté dans le chapitre précédent en faisant varier la géométrie de la configuration de référence à chaque itération.

### 4.1 Elasticité non-linéaire en traction pure avec forces suiveuses

#### 4.1.1 Notations et résultats de base

Cette section est consacrée à l'étude des équations d'équilibre d'un matériau élastique non-linéaire en grandes déformations. Ces équations seraient représentées dans une configuration de référence au moyen du premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff. Les conditions aux limites sont précisées ci-dessous. Précisément, soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial\Omega$  son bord et  $\nu$  le vecteur unité normal à  $\partial\Omega$ ,  $a : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , vérifiant

$$a(x, \mathbf{1}) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}. \quad (4.1)$$

Notons  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $y^t$  est la transposée de la matrice  $y$  et  $a^t(x, y)$  est la transposée de la matrice  $a(x, y)$ .

Conformément à la physique des matériaux nous faisons les hypothèses (4.2) sur la fonction  $a$ . Soit  $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \setminus \{0\}$  avec  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

$$a(x, qy) = qa(x, y)q^t \quad \text{pour tout } (x, y) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ et } q \in \mathbf{Q}, \quad (4.2a)$$

indépendance par rapport au repère, aussi appelée indifférence matérielle

$$a(x, y)y^t = ya^t(x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (4.2b)$$

cela résulte de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 1)\sigma_{ij}\sigma_{hk} > 0 \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}. \quad (4.2c)$$

Soient  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  des fonctions données. Nous supposons que le couple  $(h, g)$  est équilibré, c'est à dire

$$\int_{\Omega} h(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma = 0, \quad (4.3a)$$

$$\int_{\Omega} (x_i h_j(x) - x_j h_i(x)) dx + \int_{\partial\Omega} (x_i g_j(x) - x_j g_i(x)) d\sigma = 0 \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.3b)$$

Par conséquent la matrice astatique  $c$  de  $(h, g)$ , définie par

$$c_{ij} = \int_{\Omega} x_i h_j(x) dx + \int_{\partial\Omega} x_i g_j(x) d\sigma, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

est symétrique.

Lanza de Cristophoris et Valent ont établi dans [DCV82] qu'il existe  $r > 0$  tel que si  $0 < \mu < r$  alors il existe  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\operatorname{div} A(u) + \mu h = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.5a)$$

$$-A(u)\nu + \mu g = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.5b)$$

où  $A(u)(x) = a(x, \mathbf{1} + \nabla u(x))$  avec  $\nabla u(x) = (\partial_j u_i(x))_{i,j=1,2,3}$  est le gradient de  $u$  et  $A(u)\nu$  est une fonction de  $\partial\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$(A(u)\nu)_i(x) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(x, \mathbf{1} + \nabla u(x))\nu_j(x) \quad i = 1, 2, 3.$$

Les équations (4.5) correspondent à un problème de traction pure de l'élasticité non linéaire. Physiquement,  $\Omega$  représente la configuration de référence d'un corps élastique à l'état naturel,  $u$  est le déplacement,  $\mathbf{1} + u$  est la déformation correspondante à  $u$ ,  $a$  est la réponse du matériau puisque  $a(x, \mathbf{1} + \nabla u(x))$  est le premier tenseur des contraintes de

Piola-Kirchhoff au point  $x \in \Omega$  quand le corps est déformé par  $\mathbf{1} + u$ ,  $g$  est la force de traction surfacique appliquée dans la configuration de référence  $\Omega$ .

Dans tout ce qui suit nous désignons par  $\Omega$  un ensemble non vide, borné, ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\bar{\Omega}$  l'adhérence de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  le bord de  $\Omega$  et  $\nu$  le vecteur normal en tout point régulier de  $\partial\Omega$ ,  $n, m$  des entiers positifs et  $p$  un réel  $> 1$ . Les notations suivantes sont standard.  $L^p(\Omega)$  est l'espace de (classe de) fonctions mesurables  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dont  $|v|^p$  est intégrable au sens de Lebesgue,  $W^{m,p}(\Omega)$  est l'espace (Banach) des éléments  $v$  de  $L^p(\Omega)$  équipé de la norme

$$\|v\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,p},$$

où  $\|\cdot\|_{0,p}$  est la norme usuelle de  $L^p(\Omega)$ . Si  $\Omega$  est un cône [Ada75] (has the cone property) et  $mp > 3$ , alors  $W^{m,p}(\Omega)$  est une algèbre, c.à.d.,

$$u, v \in W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow uv \in W^{m,p}(\Omega), \|uv\|_{m,p} \leq c_{m,p} \|u\|_{m,p} \|v\|_{m,p},$$

où  $c_{m,p}$  est un réel positif indépendant de  $u$  et  $v$  (voir [Ada75], Thm. 5.23). Si  $v = (v_i)_{i=1,2,3}$  appartient à  $(W^{m,p}(\Omega))^3$  nous considérons

$$\|v\|_{m,p} = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{m,p}$$

Lanza De Cristoforis et Valent ont introduit les espaces suivant

$$V_{m,p} = \left\{ v \in (W^{m+2,p}(\Omega))^3 : \int_{\Omega} v dx = 0, \int_{\Omega} (\partial_j v_i - \partial_i v_j) dx = 0, i, j = 1, 2, 3. \right\}; \quad (4.6a)$$

$$F_{m,p} = \left\{ (h, g) \in (W^{m,p}(\Omega))^3 \times (W^{m+1-1/p,p}(\partial\Omega))^3 : (h, g) \text{ est équilibré} \right\}. \quad (4.6b)$$

L'énoncé exact de leur résultat [DCV82] est le suivant

**Théorème 4.1.1.1 (Lanza de Cristoforis et Valent)** *Supposons que le bord de  $\Omega$  est une variété de classe  $C^{m+2}$ , que  $p(m+1) > 3$ ,  $a$  est de classe  $C^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3})$  et que les hypothèses (4.2) sont satisfaites. Soit  $g \in F_{m,p}$  tel que, si  $c_1, c_2, c_3$  sont les valeurs propres de la matrice  $c$  définie par (4.4), alors  $c_i + c_j \neq 0$  quand  $i \neq j$ . Alors il existe deux réels positifs  $r$  et  $\rho$  tel que, si  $0 < \mu \leq r$ , le problème (4.5) admet une solution unique  $u \in (W^{m+2,p}(\Omega))^3$  telle que  $\int_{\Omega} u dx = 0$  et  $\|u\|_{m+2,p} \leq \rho$ .*

### Remarques

- Dans [Val77, Val82] on donne des arguments sur le choix de la régularité considérée dans ce théorème ;
- Une extension du résultat de Cristoforis et Valent aux espaces de Schauder est faite dans [DCV82].

Dans ce chapitre nous prolongeons les résultats du Thm. 4.1.1.1 à un problème de traction pure avec des forces suiveuses (les fonctions  $h$  et  $g$  dépendent des déplacements  $u$ ). De plus nous résolvons ce problème au moyen d'une méthode incrémentale.

Pour simplifier les notations, posons

$$V = (W^{m+2,p}(\Omega))^3 \text{ et } X = (W^{m,p}(\Omega))^3 \times (W^{m+1-1/p,p}(\partial\Omega))^3,$$

et soit  $L$  l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} L : V &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto L(u) = (\operatorname{div}(A(u)), A(u)\nu), \end{aligned}$$

on notera

$$f = \begin{pmatrix} -h \\ g \end{pmatrix} \in X.$$

Alors le problème de traction pure (4.5) se met sous la forme

$$L(u) = \mu f, \quad (4.7)$$

Pour tout entier  $i, j, h, k$ ,  $u$  dans  $V$ ,  $y_{hk}$  désigne l'élément  $(h, k)$  du deuxième argument de  $a$  et

$$R_{ij,hk}(u) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(\cdot, \mathbf{1} + \nabla u(\cdot))$$

la dérivée de  $a_{ij}$  par rapport au coefficient  $(h, k)$  de son deuxième argument.

**Lemme 4.1.1.1** *Supposons que le bord de  $\Omega$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ ,  $p(m+1) > 3$  et  $a \in (\mathcal{C}^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$ . Alors  $R_{ij,hk}(u)$  est un élément de  $W^{m+1,p}(\Omega)$ .*

**Preuve.**

Pour simplifier les notations, on prend  $\eta \in V$ ,  $\psi \in \mathcal{C}^{m,p}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3)$  et  $R : (W^{m,p}(\Omega))^3 \longrightarrow W^{m,p}(\Omega)$  avec  $R(\eta)(x) = \psi(x, \eta(x))$  et nous montrons que si  $mp > 3$  alors  $R(\eta) \in W^{m,p}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3)$ .

Vérifions que la propriété est vraie pour  $m = 1$ . Si  $p > 3$  l'injection de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  est continue. De plus  $\Omega$  est borné donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\cdot, \eta(\cdot)) \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(\cdot, \eta(\cdot))$$

sont des éléments de  $L^p(\Omega)$ . Par ailleurs

$$\frac{\partial R(\eta)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, \eta(x)) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(x, \eta(x)) \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}(x)$$

d'où  $R(\eta) \in W^{1,p}(\Omega)$ . Pour  $m \geq 1$  l'expression de la  $m$ ème dérivée de  $R(\eta)$  est

$$D^m(R(\eta))(x) = \sum_{l=1}^m \sum_{|\alpha_x^l|+|\alpha_y^l| \leq m} a_l \partial^{\alpha_x^l, \alpha_y^l} \psi(x, \eta(x)) \prod_{i=1}^s b_l \partial_i^{\beta_i^l} \eta_{\gamma_i^l}(x) + \sum_{|\alpha_x^0|=m} \partial^{\alpha_x^0} \psi(x, \eta(x))$$

où  $s, \gamma_i^l, a_l, b_l, c_{\alpha_x^0}$  sont des entiers.  $\alpha_x^l$  et  $\beta_i^l$  (resp.  $\alpha_y^l$ ) multi-indices de la dérivation par rapport à  $x$  (resp.  $y$ ) avec  $1 \leq |\beta_i^l|$  et  $\sum_{i=1}^s \beta_i^l = m$ ,

$$\partial^{\alpha_x^l, \alpha_y^l} \psi(x, \eta(x)) = \frac{\partial^{\alpha_{x,1}^l} \partial^{\alpha_{x,2}^l} \partial^{\alpha_{x,3}^l} \partial^{\alpha_{y,1}^l} \partial^{\alpha_{y,2}^l} \partial^{\alpha_{y,3}^l} \psi}{\partial_{x_1} \partial_{x_2} \partial_{x_3} \partial_{y_1} \partial_{y_2} \partial_{y_3}}(x, \eta(x)).$$

L'injection  $W^{m-|\beta_i^l|, p}(\Omega) \subset L^{q_i}(\Omega)$  est continue pour  $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p} - \frac{m-|\beta_i^l|}{3}$ . Soit  $m_i = \frac{q_i}{p}$

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^s \partial_i^{\beta_i^l} \eta_{\gamma_i^l} \right|^p dx \leq \prod_{i=1}^s \left( \int_{\Omega} |\partial_i^{\beta_i^l} \eta_{\gamma_i^l}|^{pm_i} \right)^{1/m_i} \left( \int_{\Omega} 1^{m_0} \right)^{1/m_0}$$

avec  $\sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0} = 1, 1 \leq m_i \leq \infty$ . On a

$$\frac{1}{m_i} = \frac{3 - p(m_i - |\beta_i^l|)}{3}$$

les  $m_i$  doivent vérifier la relation

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{m_i} = s - \frac{pm(s-1)}{3} < 1$$

ce qui revient à supposer que  $3 < mp$ .

Donc

$$\prod_{i=1}^m \partial_i^{\beta_i^l} \eta_{\gamma_i^l} \in L^p(\Omega).$$

Par ailleurs

$$\partial^{\alpha_x^0} \psi(\cdot, \eta(\cdot)) \text{ et } \partial^{\alpha_x^l, \alpha_y^l} \psi(\cdot, \eta(\cdot)) \in L^\infty(\Omega)$$

D'où  $R(\eta)$  est élément de  $W^{m,p}(\Omega)$  ■

**Lemme 4.1.1.2** *Supposons que le bord de  $\Omega$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ ,  $pm > 3$  et  $a \in (\mathcal{C}^{m+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$ . Alors  $L$  est un opérateur deux fois continûment différentiable de  $V$  dans  $X$ . De plus la dérivée seconde est bornée sur les boules, c'est à dire :*

$$\sup_{\|u\|_V \leq \eta} |L''(u)|_{\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V; X))} < \infty \quad \text{pour tout } \eta > 0.$$

**Preuve.** Pour tout  $r > 0$ , notons  $\mathcal{B}(0, r)$  la boule de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $V$ . L'application  $a$  appartient à  $(\mathcal{C}^{m+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$ , elle est bornée ainsi que ses dérivées d'ordre au plus  $m+3$ .

Lanza de Cristoforis et Valent ont démontré dans ([DCV82], [Val79]) la différentiabilité de l'opérateur  $L$ . Dans ce qui suit nous calculons la dérivée seconde de  $L$  et nous déduisons que  $L''$  est bornée sur les boules de  $V$ . La preuve repose sur la formule de Taylor est le fait que pour  $mp > 3$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est une algèbre. Soit  $u \in V$  nous avons

$$A_{ij}(u+v) - A_{ij}(u) - \sum_{h,k}^3 R_{ij,hk}(u)(x) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) = \quad (4.8)$$

$$\int_0^1 \sum_{h,k}^3 \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) (R_{ij,hk}(u+tv) - R_{ij,hk}(u)) dt$$

Pour  $mp > 3$  il existe une constante  $c_{m,p}$  ne dépendant que de  $m$  et  $n$ , telle que, pour tout  $u$  et  $v$  dans  $W^{m+2,p}(\Omega)$  on a l'inégalité

$$\|uv\|_{m+2,p} \leq c_{m,p} \|u\|_{m+2,p} \|v\|_{m+2,p}. \quad (4.9)$$

Nous appliquons la relation (4.9) et le lemme 4.1.1.1 pour majorer le premier membre de l'inégalité (4.8)

$$\begin{aligned} & \left\| A_{ij}(u+v) - A_{ij}(u) - \sum_{h,k}^3 R_{ij,hk}(u)(x) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) \right\| \\ & \leq c_{m,p} \|v\| \sum_{h,k=1}^3 \left\| \int_0^1 (R_{ij,hk}(u+tv) - R_{ij,hk}(u)) dt \right\| \\ & \leq c_{m,p} \|v\| \sum_{hk=1}^3 \int_0^1 \|R_{ij,hk}(u+tv) - R_{ij,hk}(u)\| dt \end{aligned}$$

l'application qui à chaque  $v$  associe

$$\sum_{h,k}^3 R_{ij,hk}(u) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}$$

est continue sur  $V$  est linéaire.

De plus les  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}} \in (\mathcal{C}^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$  et  $(m+1)p > 2$  donc les applications  $u \rightarrow R_{ij,hk}(u)$  sont continues, voir [DCV82], alors le terme sous l'intégrale à droite de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque  $\|v\|_{m+2,p}$  tend vers 0. Nous en déduisons

$$(A'_{ij}(u)v)(x) = \sum_{h,k}^3 R_{ij,hk}(u)(x) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) \quad (4.10)$$

Par conséquent l'opérateur  $L$  est différentiable et son différentiel est donné par les relations



$$(L'_1(u)v)(x) = \left( \sum_{h,k,j}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, \mathbf{1} + \nabla u(x)) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) \right) \right)_{i=1,\dots,3}, \quad (4.11a)$$

$$(L'_2(u)v)(x) = \left( \sum_{h,k,j}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, \mathbf{1} + \nabla u(x)) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) \nu_j(x) \right)_{i=1,\dots,3}. \quad (4.11b)$$

Nous montrons de la même manière que

$$(L''_1(u)(v, w))(x) = \left( \sum_{p,q}^3 \sum_{h,k}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_{p,q} \partial y_{h,k,j}}(x, \mathbf{1} + \nabla u(x)) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) \frac{\partial w_p}{\partial x_q} \right) \right)_{i=1,\dots,3}$$

$$(L''_2(u)(v, w))(x) = \left( \sum_{p,q}^3 \sum_{h,k,j}^3 \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_{pq} \partial y_{hk}}(x, \mathbf{1} + \nabla u(x)) \frac{\partial v_h}{\partial x_k}(x) \frac{\partial w_p}{\partial x_q} \nu_j(x) \right)_{i=1,\dots,3}$$

L'application  $a \in (\mathcal{C}^{m+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$  est bornée ainsi que ses dérivées d'ordre au plus  $m+3$  dans  $\mathcal{B}(0, r)$  par conséquent  $L''(u)$  est bornée sur les boules  $\mathcal{B}(0, r)$  en tant qu'application bilinéaire de  $V \times V$  dans  $X$ .

■

**Lemme 4.1.1.3 (Lanza de Cristoforis et Valent)** *Supposons que le bord de  $\Omega$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ ,  $p(m+1) > 3$ ,  $a \in (\mathcal{C}^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$  et que  $a$  vérifié les hypothèses (4.2). Alors  $L'(0)$  est un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$ .*

#### 4.1.2 Étude par méthode incrémentale

Dans cette section nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution du problème d'élasticité en traction pure avec des forces suiveuses. Nous donnons ensuite un algorithme de résolution pour calculer la solution. Pour cela nous utilisons une méthode incrémentale similaire à celle de Ciarlet [Cia88], la convergence de cette méthode a été démontrée pour un problème de déplacement pur avec des forces indépendantes des déplacements. Ici nous prolongeons ses résultats de convergence à un problème de traction pure avec des forces suiveuses. Soit  $h$  un champ de vecteur défini sur  $\Omega$ . Nous aurons aussi besoin d'un champ de vecteurs  $g$  défini sur une région  $\mathcal{O}$  contenant  $\bar{\Omega}$ ; en d'autres termes,  $g$  est défini en tout  $x$  à une distance au plus  $\delta > 0$  de  $\Omega$ . Le champ de forces extérieurs  $g$  sera utilisé pour la segmentation d'images. Les équations d'équilibre pour un problème avec des conditions aux limites de traction pure et des forces appliquées suiveuses.

$$\operatorname{div} A(u) + h(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.12a)$$

$$-A(u)\nu + g(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.12b)$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$L(u) = f(u) \quad \text{dans } \Omega \times \partial\Omega, \quad (4.13)$$

avec  $L(u) = (\operatorname{div} A(u), A(u)\nu)$  et  $f \in C^2(V_{m,p}; F_{m,p})$ . Les notations utilisées sont décrites dans la section (4.1.1).

Le principe de la méthode incrémentale, et des méthodes de continuation en général, consiste à introduire une série de problèmes paramétrés. Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , soit  $u(\lambda)$  solution de l'équation

$$L(u(\lambda)) = \lambda f(u(\lambda)) \quad \text{dans } \Omega \times \partial\Omega, \quad (4.14)$$

en dérivant cette relation par rapport à  $\lambda$  et en ajoutant une condition initiale, nous obtenons le problème de Cauchy suivant :

$$u'(\lambda) = \{L'(u(\lambda)) - \lambda f'(u(\lambda))\}^{-1} f(u(\lambda)), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (4.15a)$$

$$u(0) = 0. \quad (4.15b)$$

Dans ce qui suit nous donnons quelques résultats préliminaires pour montrer que le problème (4.15) est bien posé.

**Lemme 4.1.2.1** *Supposons que le bord  $\Omega$  est une variété de classe  $C^{m+2}$ ,  $pm > 3$ ,  $a \in (C^{m+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$  et que  $a$  vérifie les hypothèses (4.2). S'il existe  $\rho > 0$  et une constante  $K$  tels que  $|f'(v)|_{\mathcal{L}(V;X)} \leq K \|v\|_{m+2,p}$  pour tout  $v$  dans la boule  $\mathcal{B}(0, \rho)$  de centre 0 et de rayon  $\rho$  de  $V_{m,p}$ , alors il existe  $\rho_1$  tel que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  l'opérateur  $(L'(u) - \lambda f'(u))$  est un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$  pour tout  $u$  dans la boule  $\mathcal{B}(0, \rho_1)$ .*

**Preuve.** Bien qu'on soit en dimension infinie, il existe un  $\rho > 0$  tel que pour tout  $\|v\|_{m+2,p} \leq \rho$ ,  $L'(v)$  est un isomorphisme. En effet : d'après le lemme 4.1.1.3  $L'(0)$  est un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$ , les espaces  $V_{m,p}$  et  $F_{m,p}$  sont définis par les relations (4.6), nous pouvons écrire

$$L'(v) = L'(0)(\mathbf{1} - L'(0)^{-1}(L'(0) - L'(v))),$$

L'opérateur défini par  $T_v = L'(0)^{-1}(L'(0) - L'(v))$  est linéaire et continue de  $V_{m,p}$  dans  $V_{m,p}$  pour tout  $v \in V_{m,p}$ . On remarque que si

$$|T_v|_{\mathcal{L}(V)} < 1 \quad (4.16)$$

alors l'opérateur  $L'(v)$  est inversible. Montrons que la relation (4.16) est vraie localement. En appliquant le lemme (4.1.1.2) et le théorème des accroissements finis nous obtenons les inégalités

$$\begin{aligned} |T_v|_{\mathcal{L}(V)} &\leq |L'(0)^{-1}|_{\mathcal{L}(X;V)} |L'(0) - L'(v)|_{\mathcal{L}(V;X)} \\ &\leq |L'(0)^{-1}|_{\mathcal{L}(V;X)} \sup_{\|v\|_V \leq \rho} |L''(v)|_{\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V;X))} \|v\|_V \\ &\leq M_1 M_2^\rho \|v\|_V \end{aligned}$$

$M_1$  étant un majorant de la norme de  $L'(0)^{-1}$  et  $M_2^\rho$  une constante issue du lemme 4.1.1.2 qui majore la dérivée seconde de  $L$  sur la boule centrée à l'origine et de rayon  $\rho$ . Soit  $\rho_2$  un réel strictement positif tel que

$$\rho_2 < \min\left(\frac{1}{M_1 M_2^\rho}, \rho\right),$$

alors  $|T_v|_{\mathcal{L}(V)} < 1$  pour tout  $v$  dans la boule  $\mathcal{B}(0, \rho_2)$ , par conséquent l'opérateur

$$L'(v) = L'(0)(\mathbf{1} - T_v)$$

est un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$  pour tout  $\|v\|_V \leq \rho_2$ .

Montrons qu'il existe  $\rho_1 > 0$  tel que  $L'(u) - \lambda f'(u)$  soit un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$  pour tout  $\|u\|_V \leq \rho_1$ . Pour  $u$  dans la boule  $\mathcal{B}(0, \rho_2)$  on a montré ci-dessus que l'opérateur  $L'(u)$  est un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$ , nous avons l'égalité suivante

$$L'(u) - \lambda f'(u) = L'(u)(\mathbf{1} - \lambda L'(u)^{-1} f'(u))$$

Posons  $T_u = \lambda L'(u)^{-1} f'(u)$ . Par hypothèse, il existe  $\rho > 0$  et une constante  $K$  vérifiant

$$|f'(u)|_{\mathcal{L}(V;X)} \leq K \|u\|_{m+2,p},$$

pour tout  $\|u\|_{m+2} < \rho$ , par conséquent

$$|T_u|_{\mathcal{L}(V)} \leq K M_2 \|u\|_{m+2,p}$$

$M$  étant un majorant de la norme de  $L'(u)^{-1}$ . Donc  $L'(u) - \lambda f'(u)$  est un isomorphisme de  $V_{m,p}$  dans  $F_{m,p}$  pour tout  $\|u\|_V \leq \rho_1$  avec

$$\rho_1 < \min\left(\frac{1}{K M_2}; \rho; \rho_2\right)$$

■

Posons

$$B(u) = L'(u) - \lambda f'(u)$$

**Lemme 4.1.2.2** *Supposons que le bord de  $\Omega$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ ,  $pm > 3$ ,  $a \in (\mathcal{C}^{m+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$  et que  $a$  vérifie les hypothèses (4.2). S'il existe  $\rho > 0$  et une constante  $K$  tels que  $|f'(v)|_{\mathcal{L}(V;X)} \leq K \|v\|_{m+2,p}$  pour tout  $v$  dans une boule de  $V_{m,p}$  de centre 0 et de rayon  $\rho$ , alors il existe  $\rho_1 > 0$  tel que l'application qui à chaque  $u \in V_{m,p}$  associe  $B(u)^{-1} f(u)$  est Lipschitzienne sur la boule de centre 0 et de rayon  $\rho$  de  $V$ ; plus précisément, il existe une constante  $C$  telle que :  $\forall u_1, u_2$  satisfaisant  $\|u_1\|_V < \rho$ ,  $\|u_2\|_V < \rho$  :*

$$|B(u_1)^{-1} f(u_1) - B(u_2)^{-1} f(u_2)|_{\mathcal{L}(X;V)} \leq C \|u_1 - u_2\|_V. \quad (4.17)$$

**Preuve.** D'après le lemme précédant il existe  $\rho_1$  tel que  $B(u)$  soit inversible pour tout  $\|u\|_{m+2,p} \leq \rho_1$ . Donc pour  $\|u_1\|_V \leq \rho_1$ ,  $\|u_2\|_V \leq \rho_1$ , nous avons les relations

$$\begin{aligned} B(u_1)^{-1} - B(u_2)^{-1} &= B(u_1)^{-1}(B(u_2) - B(u_1))B(u_2)^{-1} \\ B(u_1)^{-1}f(u_1) - B(u_2)^{-1}f(u_2) &= (B(u_1)^{-1} - B(u_2)^{-1})f(u_1) + \\ &B(u_2)^{-1}(f(u_1) - f(u_2)); \end{aligned}$$

On applique le théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned} \|B(u_1)^{-1}f(u_1) - B(u_2)^{-1}f(u_2)\| &\leq \|B(u_1)^{-1} - B(u_2)^{-1}\| \|f(u_1)\| + \\ &\|B(u_2)^{-1}\| \|f(u_1) - f(u_2)\| \\ &\leq k_1 \|B(u_1)^{-1}(B(u_2) - B(u_1))B(u_2)^{-1}\| + \\ &M_1 K \rho_1 \|u_1 - u_2\| \\ &\leq k_1 M_1^2 \|B(u_2) - B(u_1)\| + M_1 K \rho_1 \|u_1 - u_2\| \\ &\leq (k_1 k_2 M_1^2 + M_1 K \rho_1) \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

**Corollaire 4.1.2.1** *Supposons que le bord de  $\Omega$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ ,  $pm > 3$ ,  $a \in (\mathcal{C}^{m+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}))^{3 \times 3}$ ,  $a$  vérifie les hypothèses (4.2). S'il existe  $\rho_1 > 0$  et une constante  $K$  tels que  $|f'(v)|_{\mathcal{L}(V;X)} \leq K \|v\|_{m+2,p}$  pour tout  $v$  dans une boule de  $V_{m,p}$  de centre 0 et de rayon  $\rho_1$ , alors il existe une solution unique  $u$  de l'équation différentielle (4.15). De plus cette solution est solution de  $L(u(\lambda)) = \lambda f(u(\lambda))$  jusqu'en  $\lambda = 1$ .*

**Preuve.** La démonstration de l'existence et de l'unicité de cette équation est classique avec les hypothèses faites dans les lemmes 4.1.2.1 et 4.1.2.2. En effet, l'application

$$\Phi : u \in \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathcal{B}(0, \rho)) \rightarrow \Phi(u) \in \mathcal{C}^0([0, 1]; V_{m,p})$$

avec

$$\Phi(u)(\lambda) = \int_0^\lambda \left( L'(u(\mu)) - \mu f'(u(\mu)) \right)^{-1} f(u(\mu)) \, d\mu$$

est bien définie :  $\lambda \rightarrow \left( L'(u(\lambda)) - \lambda f'(u(\lambda)) \right)^{-1} \in V_{m,p}$  est continue, par composition des fonctions continues. Donc pour  $u \in \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathcal{B}(0, \rho))$  nous avons  $\Phi(u) \in \mathcal{C}^0([0, 1]; V_{m,p})$ . De plus si on munit  $\mathcal{C}^0([0, 1]; V_{m,p})$  de la norme

$$\|\Psi\| := \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|\Psi(\lambda)\|_{2+m},$$

il devient un espace de Banach, a fortiori le sous-ensemble  $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathcal{B}(0, \rho))$  est un espace complet.

Par ailleurs, on montre facilement en utilisant les lemmes 4.1.2.1 et 4.1.2.2 que l'application  $\Phi$  ainsi que ses itérées  $\Phi^k = \Phi(\Phi(\dots))$  est contractante sur l'espace  $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathcal{B}(0, \rho))$ . Donc l'existence et l'unicité de l'équation différentielle (4.15) sont des conséquences du théorème du point fixe. Pour  $u$  solution de l'équation différentielle 4.15 nous avons

$$0 = L'(u(\lambda))u'(\lambda) - f(u(\lambda)) - \lambda f'(u(\lambda))u'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(L(u(\lambda)) - \lambda f(u(\lambda)))$$

par conséquent l'application

$$\lambda \in [0, 1] \rightarrow (L(u(\lambda)) - \lambda f(u(\lambda)))$$

est constante, qui est donc nulle puisque  $u(0) = 0$ , autrement dit  $u$  est solution de l'équation

$$L(u(\lambda)) = \lambda f(u(\lambda)) \text{ dans } \Omega \times \partial\Omega \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

■

**Théorème 4.1.2.1** *Supposons les hypothèses du corollaire (4.1.2.1) satisfaites et soit  $(\lambda_n)_n$  une suite de  $[0, 1]$ . Il existe une suite  $(u_n)_{n=0}^{n=N}$  vérifiant*

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad 0 \leq n \leq N, \\ L'_1(u_n)(u_{n+1} - u_n) &= h(u_n) \text{ dans } \Omega \\ (L'_2(u_n) - \lambda_n g'(u_n))(u_{n+1} - u_n) &= (\lambda_{n+1} - \lambda_n) g(u_n) \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En outre, il existe une constante  $c$  telle que

$$\|u_n - u(\lambda_n f)\| \leq c(\lambda_{n+1} - \lambda_n),$$

où  $u(\lambda_n f)$  désigne la solution exacte de l'équation  $L(u) = \lambda_n f(u)$ .

**Preuve.**

Cet algorithme correspond à une méthode explicite de type Euler par rapport à l'inconnue  $u_{n+1}$ . Avec les hypothèses faites dans le corollaire 4.1.2.1 nous avons d'après les lemmes 4.1.2.1 et 4.1.2.2 :

- $u \rightarrow \left(L'(u) - \lambda f'(u)\right)^{-1} f(u)$  est Lipschitzienne sur la boule de centre 0 et de rayon  $\rho$  de  $V$  ;
- $\lambda \in [0, 1] \rightarrow \left(L'(u(\lambda)) - \lambda f'(u(\lambda))\right)^{-1} f(u(\lambda)) \in V_{m,p}$  est continue, par composition des fonctions continues.

Donc la convergence de l'algorithme 4.1.2.1 est immédiate quand  $h$  le pas maximal de la suite de terme  $\lambda_{j+1} = \lambda_j + h$  tend vers 0, (voir Mignot [CM84]).

■

### 4.1.3 Existence d'un minimum du problème variationnel hyperélastique

**Définition 4.1.3.1 (Forces conservatives)** *Les forces appliquées respectivement de volume et de surface  $h$  et  $g$  sont dites conservatives s'il existe deux potentiels des forces appliquées  $\hat{F} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\hat{G} : \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que les fonctionnelles*

$$F(\psi) = \int_{\Omega} \hat{F}(x, \psi(x)) dx \quad \text{et} \quad G(\psi) = \int_{\partial\Omega} \hat{G}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) d\sigma(x)$$

*ont respectivement comme dérivée de Gâteaux*

$$F'(\phi)\theta = \int_{\Omega} h(\phi(x)) \cdot \theta(x) dx \quad \text{et} \quad G'(\phi)v = \int_{\partial\Omega} g(\phi(x)) \cdot v(x) d\sigma(x)$$

**Définition 4.1.3.2 (Matériau hyperélastique)** *Un matériau élastique de réponse  $a : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est hyperélastique s'il existe une fonction  $W : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable par rapport à la variable  $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , telle que*

$$a_{ij}(x, F) = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(x, F) \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}, F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, 0 \leq i, j \leq 3$$

*La fonction  $W$  est appelée densité d'énergie.*

**Théorème 4.1.3.1** *Considérons un matériau hyperélastique soumis à des forces appliquées de volume et de surface conservatives. Soit l'ensemble  $\mathcal{U}$  défini par*

$$\mathcal{U} = \left\{ \psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, \det \nabla\psi > 0, \int_{\Omega} \psi dx = e \right\}.$$

*Alors, les équations d'équilibre local sont formellement équivalentes au problème de minimisation :*

$$\phi \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad I(\phi) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} I(\psi),$$

*où  $e$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et*

$$I(\psi) = \int_{\Omega} W(x, \nabla\psi(x)) dx - (F(\psi) + G(\psi)),$$

*et  $W$  est la densité d'énergie hyperélastique.*

Pour la démonstration du Thm.4.1.3.1 voir Ciarlet (page 256 exercice 5.1 de [Cia88] et Thm. 7.2-2 [Cia82]).

**Définition 4.1.3.3 (Densité d'énergie polyconvexe)** *La densité d'énergie  $W : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  d'un matériau hyperélastique est polyconvexe si, pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , il existe une fonction convexe*

$$\tilde{W}(x, \cdot) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

*telle que*

$$W(x, F) = \tilde{W}(x, F, \text{Cof } F, \det F) \quad \text{pour tout } F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}.$$

**Théorème 4.1.3.2** Soit  $W : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  la densité d'un matériau hyperélastique polyconvexe, telle que  $W(x, F) = \tilde{W}(x, F, \text{Cof } F, \det F)$  pour tout  $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ . Supposons que  $W$  et  $\tilde{W}$  vérifient respectivement les relations suivantes

– il existe  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq \alpha$  tels que

$$W(x, F) \geq (\|F\|^p + \|\text{Cof } F\|^q + \|\det F\|^r) + \beta \text{ pour tout } F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}.$$

– si  $F_n \rightarrow F$  dans  $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ ,  $H_n \rightarrow H$  dans  $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ ,  $\delta_n \rightarrow 0^+$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{W}(x, F_n, H_n, \delta_n) = +\infty;$$

Soit  $\mathcal{U} \subset W^{1,p}(\Omega)$  l'ensemble défini par

$$\mathcal{U} = \left\{ \psi \in W^{1,p}(\Omega); \text{Cof } \nabla \psi \in L^q(\Omega), \det \nabla \psi \in L^r(\Omega), \det \nabla \psi > 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \int_{\Omega} \psi dx = e \right\}$$

où  $e \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $h \in C^1(W^{1,p}(\Omega); L^\sigma(\Omega))$ ,  $g \in C^1(W^{1,p}(\Omega); L^{p^*}(\partial\Omega))$  bornés tels que

$$\langle h'(\psi) \cdot \phi, \theta \rangle \leq 0 \text{ et } \langle g'(\psi) \cdot \phi, \theta \rangle \leq 0 \text{ pour tout } \psi, \phi, \theta \in \mathcal{U},$$

et soit enfin  $I : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  l'énergie totale définie par

$$I(\psi) = \int_{\Omega} W(x, \nabla \psi(x)) dx - F(\psi) - G(\psi).$$

On suppose que  $\mathcal{U} \neq \emptyset$  et qu'il existe  $\psi_0 \in \mathcal{U}$  tel que

$$I(\psi_0) < +\infty.$$

Alors le problème : Trouver  $\phi \in \mathcal{U}$  tel que

$$I(\phi) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} I(\psi) \tag{4.18}$$

possède au moins une solution.

**Preuve.** La démonstration est similaire à celle proposée par Ball dans [Bal77] pour des forces indépendantes des déformations. Dans ce qui suit nous adaptions cette démonstration pour un problème avec des forces suiveuses. La fonction  $I$  n'est pas convexe donc une transformation du problème est nécessaire pour utiliser les suites minimisantes. Définissons la fonction

$$\bar{W} : (\cdot, F, H, \delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{W}(\cdot, F, H, \delta) = \begin{cases} \tilde{W}(\cdot, F, H, \delta) & \text{si } \delta > 0, \\ +\infty & \text{si } \delta \leq 0. \end{cases}$$

Cette fonction  $\bar{W}$  est continue grâce à la continuité à l'infini de la fonction  $\tilde{W}$  et convexe sur  $\mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}$  grâce à la polyconvexité de la fonction  $\tilde{W}$ . La fonction  $x \in \Omega \rightarrow$

$\bar{W}(x, F(x), H(x), \delta(x)) \in \mathbb{R}$  est mesurable dès que la fonction  $x \in \Omega \rightarrow (F(x), H(x), \delta(x)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}$  est mesurable (voir [ET79], p. 216 et Prop. 1.1), et d'après la coercivité,

$$\bar{W}(\cdot, F, H, \delta) \geq a \text{ pour tout } (F, H, \delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}$$

L'intégrale

$$\int_{\Omega} W(x, \nabla \psi(x)) dx = \int_{\Omega} \bar{W}(x, \nabla \psi(x), \text{Cof } \nabla \psi(x), \det \nabla \psi(x)) dx$$

est donc bien définie de l'intervalle  $[\text{ames}(\Omega), +\infty]$  si les fonctions  $\nabla \psi$ ,  $\text{Cof } \nabla \psi$ ,  $\det \nabla \psi$  sont mesurables. Par suite, la fonctionnelle définie par

$$\bar{I}(\psi) = \int_{\Omega} \bar{W}(x, \nabla \psi(x), \text{Cof } \nabla \psi(x), \det \nabla \psi(x)) dx - (F(\psi) + G(\psi))$$

est un nombre bien défini dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  si  $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\text{Cof } \nabla \psi \in L^q(\Omega)$ ,  $\det \nabla \psi \in L^r(\Omega)$ . De plus,

$\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\text{Cof } \nabla \psi \in L^q(\Omega)$ ,  $\det \nabla \psi \in L^r(\Omega)$  et  $\bar{I}(\psi) < +\infty \Rightarrow \det \nabla \psi > 0$  p.p. dans  $\Omega$ .

(par définition de  $\bar{I}$ ) Remarquons enfin que si  $\psi \in \mathcal{U}$ , alors  $I(\psi) = \bar{I}(\psi)$ . Par conséquent les solutions du problème (4.18) coïncident avec les solutions du problème modifié : trouver  $\phi \in U$  tel que

$$\bar{I}(\phi) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \bar{I}(\psi) \quad (4.19)$$

Donc il suffit de prouver un résultat d'existence pour le problème modifié (4.19).

Montrons que la fonctionnelle  $\bar{I}$  est minorée sur  $\mathcal{U}$ . Les fonctions  $F$  et  $G$  sont concaves, puisque

$$F''(\psi)(\phi, \theta) = \langle h'(\psi) \cdot \phi, \theta \rangle \leq 0, \text{ et } G''(\psi)(\phi, \theta) = \langle g'(\psi) \cdot \phi, \theta \rangle \leq 0$$

d'où

$$-F(\psi) \geq -F(\psi_0) - F'(\psi)(\psi - \psi_0), \text{ et } -G(\psi) \geq -G(\psi_0) - G'(\psi)(\psi - \psi_0)$$

posons  $\theta = \psi - \psi_0$ . En utilisant la continuité de l'application trace de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $W^{1,1-\frac{1}{p}}(\Omega)$  et le fait que l'injection de  $W^{1-s,p}(\Omega)$  dans  $L^{p^*}(\Omega)$  est continue pour  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1-s}{3}$ , nous obtenons les inégalités suivantes :

$$|G'(\psi)(\theta)| = \left| \int_{\partial\Omega} g(\psi)(\theta) dx \right| \leq \|g(\psi)\|_{0,p^*} \|\theta\|_{0,q^*,\partial\Omega} \leq k_1 k_2 \|g(\psi)\|_{0,p^*} \|\theta\|_{1,p} \quad (4.20)$$

$k_1$  étant la norme de l'injection de  $W^{1-s,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$  et  $k_2$  étant la norme de l'application trace de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $W^{1,1-\frac{1}{p}}(\Omega)$ , avec  $p^* = \frac{3p}{4-p}$ .

En utilisant l'injection  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $L^\gamma(\Omega)$  pour  $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{3} = \frac{1}{p}$  nous obtenons



$$|F'(\psi)(\theta)| = \left| \int_{\Omega} h(\psi)(\theta) dx \right| \leq \|h(\psi)\|_{0,\sigma} \|\theta\|_{0,\gamma} \leq k \|h(\psi)\|_{0,\sigma} \|\theta\|_{1,p} \quad (4.21)$$

$k$  étant la norme de l'injection de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $L^\gamma(\Omega)$ . D'après l'inégalité de coercivité nous avons la minoration suivante

$$I(\psi) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla \psi|^p dx + b \int_{\Omega} |\text{Cof } \nabla \psi|^q dx + b \int_{\Omega} (\det \nabla \psi) dx + \beta \text{mes}(\Omega) - (k \|h(\psi)\|_{0,\sigma} + k_1 k_2 \|g(\psi)\|_{0,p^*}) \|\psi - \psi_0\|_{1,p} - C$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{U}$ . D'après l'inégalité de Poincaré généralisée, il existe  $c > 0$  tel que

$$\int_{\Omega} |\psi|^p dx \leq c \left( \int_{\Omega} |\nabla \psi|^p dx + \left| \int_{\Omega} \psi dx \right|^p \right) \quad (4.22)$$

pour tout  $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $p > 1$ . Par conséquent il existe deux constantes  $c_0 > 0$  et  $d$  telles que

$$\bar{I}(\psi) \geq c_0 (\|\psi\|_{1,p}^p + |\text{Cof } \nabla \psi|_{0,p}^q + |\det \nabla \psi|_{0,r}^r) + d \quad (4.23)$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{U}$ .

Considérons une suite minimisante de terme générique  $\phi_n \in \mathcal{U}$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{I}(\phi_n) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \bar{I}(\psi).$$

d'après l'inégalité de coercivité et l'hypothèse  $\inf_{\psi \in \mathcal{U}} I(\psi) < +\infty$  les suites  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\int_{\Omega} \phi_n dx)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\text{Cof } \nabla \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\det \nabla \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées respectivement dans  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega)$  et  $L^r(\Omega)$ . Chacun de ces espaces étant réflexif pour,  $p \geq 2$ ,  $q \geq \frac{p-1}{p}$ ,  $r > 1$ , il existe une sous suite, encore notée  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $H \in L^p(\Omega)$ ,  $\delta \in L^r(\Omega)$ , telle que les suites  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\int_{\Omega} \phi_n dx)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\text{Cof } \nabla \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\det \nabla \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent faiblement, respectivement vers  $\phi$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} \phi dx$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $H$  dans  $L^q(\Omega)$ ,  $\delta$  dans  $L^r(\Omega)$ . D'après [Bal77] nous avons

$$H = \text{Cof } \nabla \phi, \quad \delta = \det \nabla \phi$$

La fonctionnelle  $\bar{I}$  est continue et convexe puisque les fonctions  $\tilde{W}$ ,  $F$  et  $G$  sont convexes et continues. D'après le théorème de Hahn Banach  $\bar{I}$  est faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i.) (voir [Bre83]), d'où l'inégalité suivante

$$\bar{I}(\phi) \leq \liminf \bar{I}(\phi_n) < +\infty$$

On a donc  $\det \nabla \phi > 0$ . De plus  $\int_{\Omega} \phi dx = e$ , on a donc  $\phi \in \mathcal{U}$ , d'où

$$\bar{I}(\phi) \leq \liminf \bar{I}(\phi_n) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \bar{I}(\psi) \leq \bar{I}(\phi)$$

ce qui prouve que la fonctionnelle  $I$  atteint son minimum en  $\phi \in \mathcal{U}$ .

■

Notons que l'inconvénient majeur du Thm. 4.1.3.2 réside dans le manque de régularité des solutions obtenues.

## 4.2 Application à la segmentation d'images

L'énergie interne du modèle est calculée à partir de l'élasticité non linéaire en utilisant le matériau le plus simple et qui respecte les hypothèses physiques introduites dans la première section : le matériau de St Venant-Kirchhoff. Les matériaux de St Venant-Kirchhoff s'obtiennent simplement en négligeant les termes  $o(\mathbf{E})$  dans le développement du tenseur de Piola-Kirchhoff.

Le tenseur des déformations de Green-St Venant

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^t + \nabla u + \nabla u^t \nabla u), \quad (4.24)$$

La densité d'énergie hyperélastique est définie par

$$W(E) = \frac{\lambda}{2} (\text{Tr } E)^2 + \mu \text{Tr } E^2 \quad (4.25)$$

L'énergie interne hyperélastique est définie sur la configuration de référence par :

$$E_{int}(u) = \int_{\Omega} W(x, \nabla(\mathbf{1} + u)(x)) \, dx. \quad (4.26)$$

Tandis que que l'énergie externe est donnée sur la configuration déformée par :

$$E_{ext}(u) = - \int_{\partial\Omega} \hat{G}(x, (\mathbf{1} + u)(x), \nabla(\mathbf{1} + u)(x)) \, d\sigma. \quad (4.27)$$

La fonction  $\hat{G} : \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est le potentiel des forces surfaciques. Par exemple le gradient de l'image, une carte de contour obtenue par l'opérateur de Canny [Can86] et lissée par un filtre Gaussien, ou une carte de distances [Bor86], [ST94b]. L'algorithme Gradient Vector Flow (GVF) introduit par Xu dans [XP98] génère un champ de forces par diffusion. Ce champ de forces n'est pas conservatif; mais si on l'utilise dans les équations 4.28 on obtient les mêmes résultats qu'avec la méthode de Canny.

La minimisation de l'énergie totale de déformation

$$E_{total}(u) = E_{int}(u) + E_{ext}(u);$$

est formellement équivalente à résoudre les équations d'Euler associées. Ces dernières correspondent aux équations d'équilibre du matériau de St Venant Kirchhoff en traction pure :

$$\text{div}\{(\mathbf{1} + \nabla u)\Sigma(\mathbf{E}(u))\} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.28a)$$

$$-(\mathbf{1} + \nabla u)\Sigma(\mathbf{E}(u)) \cdot \nu + g(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.28b)$$

Le tenseur  $\Sigma$  est défini par

$$\Sigma(\mathbf{E}) = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E}$$

### 4.2.1 Schéma de résolution

En utilisant les mêmes notations de la section précédente, le problème (4.28) peut s'écrire sous la forme

$$L(u) = f(u), \quad (4.29)$$

avec

$$f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(u) \end{pmatrix} \in X.$$

La méthode incrémentale décrite dans la section 4.1.2 nous permet de prouver la convergence de l'algorithme suivant

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & 0 \leq n \leq N, \\ L'_1(u_n)(u_{n+1} - u_n) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ (L'_2(u_n) - \lambda_n g'(u_n))(u_{n+1} - u_n) &= (\lambda_{n+1} - \lambda_n) g(u_n) & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.30)$$

vers la solution du problème (4.29), voir Thm.4.1.2.1.

Le problème variationnel associé aux équations (4.30) est : Etant donné  $u_n$ , trouver  $u_{n+1} \in V_{p,m}$  solution de

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(u_n, u_{n+1}) : \nabla v \, dx - \lambda_n \langle g'(u_n) \cdot u_{n+1}, v \rangle &= \int_{\Omega} k(u_n, u_n) : \nabla v \, dx \\ - \lambda_n \langle g'(u_n) \cdot u_n, v \rangle + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \int_{\partial\Omega} g(u) v \, d\sigma, & \quad \forall v \in V_{m,p}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

où

$$\mathbf{k}(u, w) = (\mathbf{1} + \nabla u) \Sigma(\epsilon(w) + \frac{1}{2}(\nabla u^t \nabla w + \nabla w^t \nabla u)) + \nabla w \Sigma(\mathbf{E}(u)) = K'(u)w,$$

est une linéarisation de

$$K(u) = (\mathbf{1} + \nabla u) \Sigma(\mathbf{E}(u)).$$

Dans ce qui suit nous allons fournir une approximation de la solution du problème variationnel (4.31) à l'aide de la méthode de Galerkin. Le principe général consiste à remplacer l'espace de dimension infinie  $V_{p,m}$  par un sous-espace de dimension finie, que nous notons  $V_h$ . Ainsi, nous pouvons considérer le problème approché du problème (4.31).

Etant donné  $u_n$ , trouver  $u_{n+1} \in V_h$  solution de

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(u_n, u_{n+1}) : \nabla v \, dx - \lambda_n \langle g'(u_n) \cdot u_{n+1}, v \rangle &= \int_{\Omega} k(u_n, u_n) : \nabla v \, dx \\ - \lambda_n \langle g'(u_n) \cdot u_n, v \rangle + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \int_{\partial\Omega} g(u) v \, d\sigma & \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Notons  $M = \dim V_h$ , et soit  $(\psi_1, \dots, \psi_M)$  une base de  $V_h$ . Introduisons la décomposition de la suite des solutions du problème approché dans la base de  $V_h$

$$u_k = \sum_{i=1}^{i=M} U_{i,k} \psi_i, \quad 1 \leq k \leq N,$$

et le vecteur  $U_k = (U_{i,k})_{1 \leq i \leq M} \in R^M$ .

Introduisons également pour  $1 \leq i, j \leq M$ , la matrice de raideur de terme générique

$$\mathcal{K}_{ij}^n = \int_{\Omega} k(u_n, \psi_i) : \nabla \psi_j \, dx,$$

et la matrice de direction  $\mathcal{D}^n$  de terme générique

$$\mathcal{D}_{ij}^n = \langle g'(u_n) \cdot \psi_i, \psi_j \rangle.$$

Nous prenons les fonctions de la base comme fonction test. Par conséquent le problème approché se réécrit sous la forme.

Etant donné  $U_n \in R^M$ , trouver  $U_{n+1}$  solution du système

$$\mathcal{A}^n U_{n+1} = \mathcal{A}^n U_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \mathcal{F}(U_n), \quad (4.33)$$

où  $\mathcal{A}^n$  est une matrice définie par

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{K}^n - \lambda_n \mathcal{D}^n,$$

le terme  $\mathcal{F}$  a pour composantes

$$\mathcal{F}_j(U_n) = \int_{\partial\Omega} g(u_n) \psi_j \, d\sigma, \quad 1 \leq j \leq M.$$

### Algorithme de résolution

Dans ce qui suit, nous donnons l'algorithme de résolution :

– Initialisation

$$U_O = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = 0;$$

– Pour  $n = 0$  jusqu'à  $N$

(i) Calcul de la matrice de raideur à l'itération  $n$

$$\mathcal{A}_{ij}^n = \mathcal{K}_{ij}^n - \lambda_n \mathcal{D}_{ij}^n, \quad 1 \leq i, j \leq P;$$

(ii) Résolution du système suivant dont l'inconnu est le vecteur  $U^{n+1}$

$$\mathcal{A}^n U_{n+1} = \mathcal{A}^n U_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \mathcal{F}(U_n);$$

(iii) Calcul du déplacement approché à l'itération  $n + 1$

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=M} U_{i,n+1} \psi_i.$$

(iv) Si  $\|u_{n+1} - u_n\| < \epsilon$  arrêt, sinon repart de (i).

### 4.2.2 Discussion de la convergence de l'algorithme

Notons que dans l'algorithme 4.2.1 il faut calculer la matrice de raideur  $\mathcal{K}^n$  et la matrice de direction  $\mathcal{D}^n$  à chaque itération. Ces itérations sont coûteuses en temps de calcul. Pour accélérer la convergence de l'algorithme, nous introduisons une suite de pas de temps  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , suite que nous appelons *superpas* par référence aux méthodes superpas utilisées dans [Dro90]. On considère alors le schéma suivant : Pour  $U^0 = 0$ , calculer  $U^{n(N+1)+1} \in \mathbb{R}^M$  tels que :

- pour  $k = 0, 1, \dots, N$
- pour  $i = 0, 1, \dots, n$

$$\mathcal{A}^k U^{i+nk+1} = \mathcal{A}^k U^{i+nk} - \tau_{i+1} \mathcal{F}(U^{i+nk});$$

- fin  $i$
- fin  $k$

Ainsi l'algorithme utilisent deux types d'itérations : des itérations internes et externes. Les itérations externes se caractérisent par une mise à jour des matrices de raideur et de direction. C'est ce calcul qui permet d'aller vers de grands déplacements. Les itérations internes sont des itérations sans recalcul des matrices de raideur et de direction et ne sont pas coûteuses en temps de calcul. Il est donc intéressant de limiter le nombre des itérations externes en compensant avec des itérations internes. Cependant, pour chaque problème, un nombre minimal d'itérations externes est nécessaire. Notons en particulier qu'un problème en petits déplacements ne nécessite pas une mise à jour des matrices de raideur et de direction, les itérations internes dans ce cas suffisent.

### 4.2.3 Comment quantifier les déformations ?

Les petites ou grandes déformations s'évaluent en fonction de leur grandeur ( $< 1\%$  : petites déformations,  $> 10\%$  grandes déformations, entre deux c'est selon!!!) Pour les déplacements c'est un peu plus subtil car les déplacements sont dimensionnés, et ne seront donc petits que par rapport à quelque longueur, typiquement les dimensions de la structure.

### 4.2.4 Illustration numérique

L'objectif est de transformer une sphère en un ellipsoïde. Les deux objets sont centrés l'un par rapport à l'autre, comme le montre la figure 4.1-(a). A cette fin, nous aurons besoin d'un champ de forces suffisamment régulier, généré par la méthode GVF avec un paramètre de lissage  $\mu = 0.15$  et 150 itérations, (figure 4.1-(b)). Notons que la taille de l'ellipsoïde considérée suivant l'axe  $Y$  est environ la moitié de celle dans les autres directions. Donc pour déformer le maillage sphérique en un ellipsoïde avec ces dimensions nous aurons besoin d'effectuer de grands déplacements.

Le maillage sphérique qui comporte 15 019 tétraèdres et 3 003 nœuds. Les résultats de la simulation sont visuellement satisfaisant, voir figures 4.2.

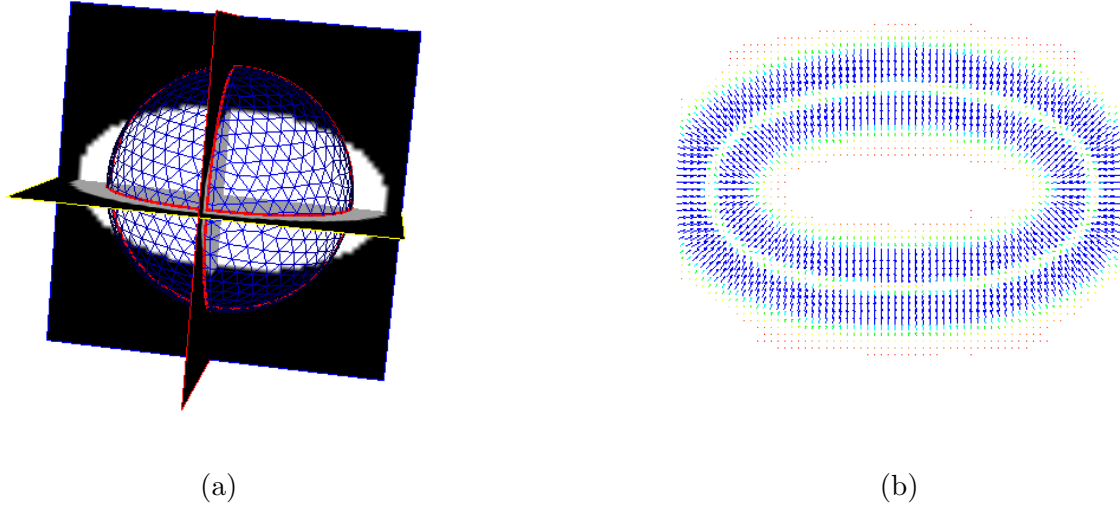


FIG. 4.1 – (a) Configuration initiale, (b) Coupe 2D du champ de forces obtenu par GVF.

### 4.3 Déplacement de maillage

Dans cette section nous proposons une extension de l'algorithme proposé dans le chapitre 3 en levant l'hypothèse des petits déplacements. L'idée générale consiste à déplacer la configuration de référence à chaque pas de résolution dans le processus itératif proposé dans le chapitre précédent. Nous reprenons les notations du chapitre 3. Soient  $\tau$  et  $\beta$  deux paramètres strictement positifs, avec  $\tau$  très petit fixé,  $\Omega_k$  un domaine libre de contrainte. Nous considérons l'algorithme : pour  $\hat{u}_k$  donnée tel que  $\text{div}(\sigma(\hat{u}_k)) = 0$ , trouver  $\hat{u}_{k+1}$  vérifiant :

$$-\text{div}(\sigma(\hat{u}_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_k; \quad (4.34a)$$

$$\sigma(\hat{u}_{k+1}) \cdot n + \beta(\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k) = \mathbf{t}^\tau(I + \hat{u}_k) + \sigma(\hat{u}_k) \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega_k, \quad (4.34b)$$

$$\Omega_{k+1} = (\mathbf{1} + \hat{u}_k)\Omega_k. \quad (4.34c)$$

Le problème réside ici dans le fait que  $\hat{u}_k$  n'est pas défini sur  $\Omega_{k+1}$  mais sur  $\Omega_k$ . Ainsi nous supposons que tous les éléments de la suite  $(\Omega_k)_k$  sont contenus dans un domaine  $D$  borné de  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $\hat{u}_{k+1}$  solution des équations (4.34), nous calculons  $\check{u}_{k+1}$  vérifiant

$$-\text{div}(\sigma(\check{u}_{k+1})) = 0 \quad \text{dans } D \setminus \Omega_k; \quad (4.35a)$$

$$\check{u}_{k+1} = \hat{u}_{k+1} \quad \text{sur } \partial\Omega_k; \quad (4.35b)$$

$$\check{u}_{k+1} = 0 \quad \text{sur } \partial D. \quad (4.35c)$$

Puis nous posons

$$u_{k+1} = \begin{cases} \hat{u}_{k+1} & \text{dans } \Omega_k; \\ \check{u}_{k+1} & \text{dans } D \setminus \Omega_k. \end{cases}$$

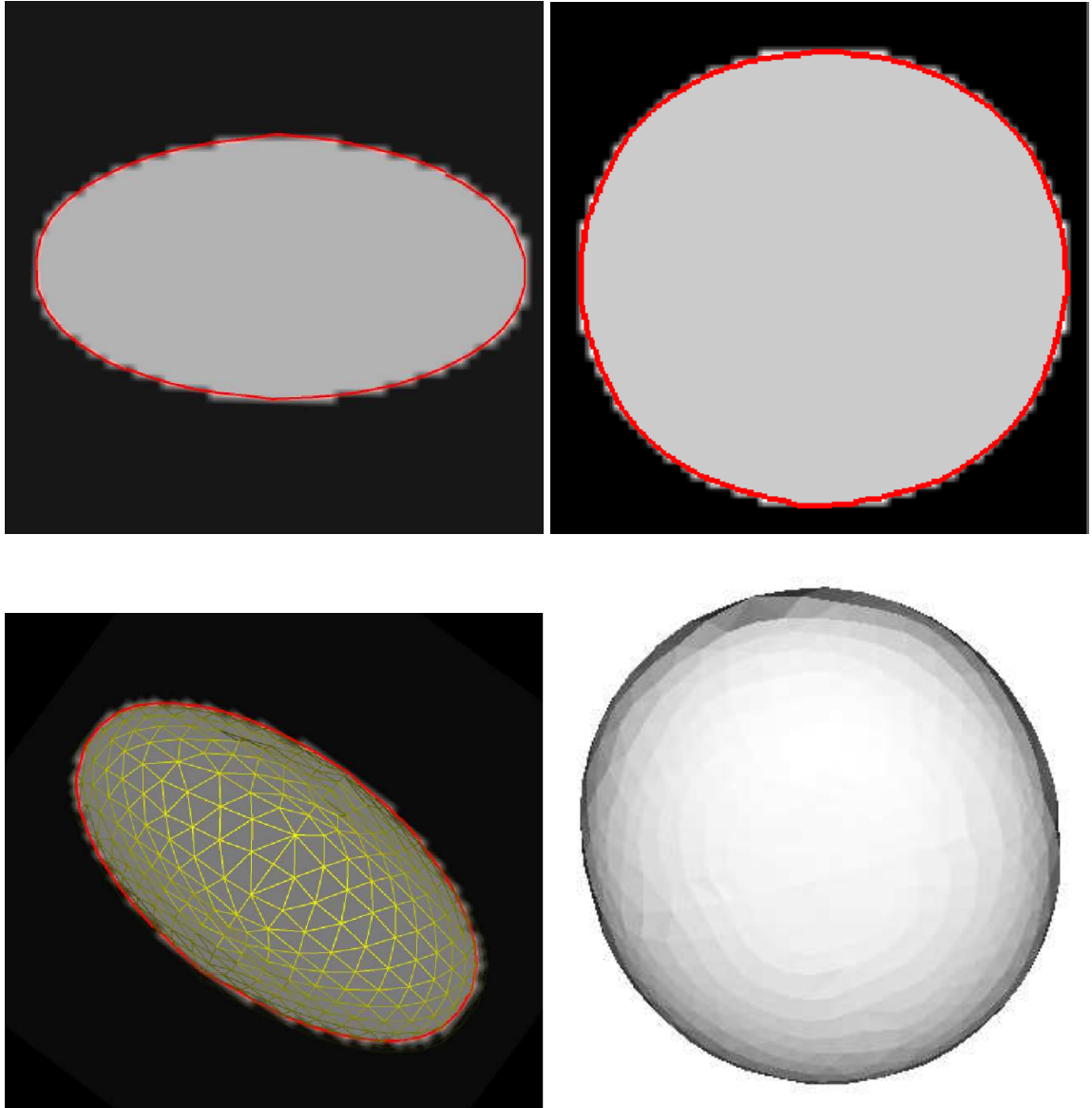


FIG. 4.2 – Résultats de la segmentation, coupes en 2D (en haut) et deux vues en 3D (en bas).

Nous considérons le déplacement du domaine au cours du processus de résolution comme une opération de *remaillage*, à nombre de nœuds constant, et avec une connectivité inchangée. On peut envisager une modification réelle du maillage au cours de la segmentation, si ce maillage devient mal conditionné pour le calcul par éléments finis. La convergence de ce schéma n'a pas pu être encore démontrée.

### 4.3.1 Illustration numérique

Pour évaluer l'algorithme 4.34-4.35 on utilise le test présenté dans la section 4.2.4. On rappelle que ce test consiste à transformer une sphère en un ellipsoïde. Les résultats de la simulation sont visuellement satisfaisant, voir figures 4.3.

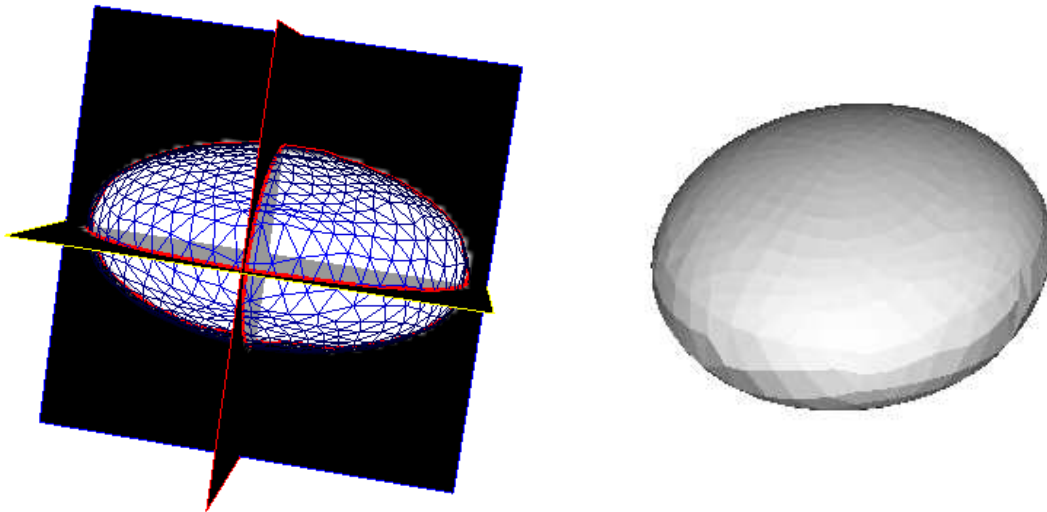


FIG. 4.3 – Résultats de la segmentation.

## 4.4 Commentaires

Le problème avec déplacement du maillage est approché par une succession de problèmes linéaires. A chaque déplacement du maillage, le déplacement est mis à zéro, ce qui permet de relâcher l'énergie de déformation. De ce fait, chaque configuration à déformer est considérée comme une situation de repos, et l'action du terme d'attache aux données est accrue. La linéarisation géométrique permet donc de retrouver des déplacements beaucoup plus importants. Notons que la méthode de segmentation hyperélastique présentée dans la section 4.2 peut être vue aussi comme une méthode de déplacement du domaine. Si  $u_k$  et  $u_{k+1}$  sont des approximations des déplacements calculées par la méthode hyperélastique,



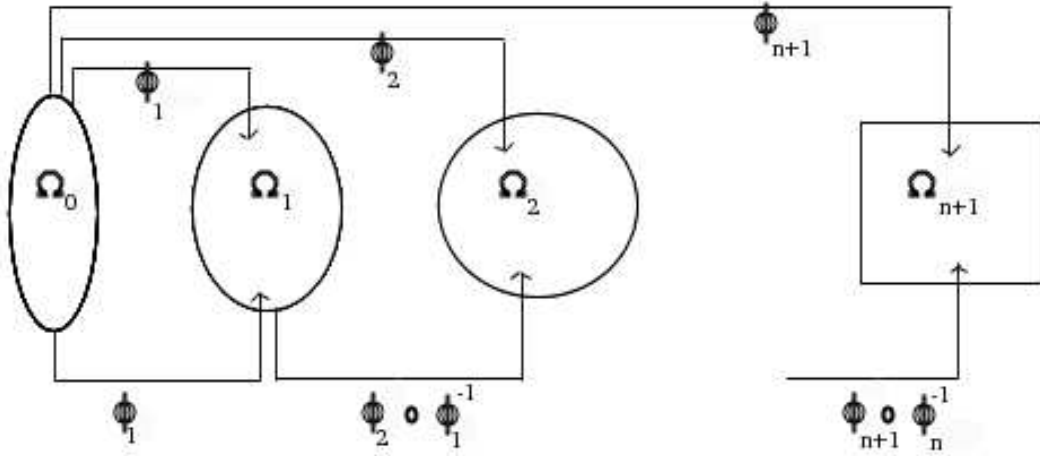


FIG. 4.4 – Transformation de passage d’une configuration de référence à une configuration déformée.

nous notons  $\phi_k = \mathbf{1} + u_k$  et  $\phi_{k+1} = \mathbf{1} + u_{k+1}$  les déformations correspondantes. Le passage d’une configuration  $\Omega_k$  à une configuration déformée est obtenue par l’application

$$\phi_{k+1} \circ \phi_k^{-1}$$

La figure 4.4 donne le schéma de passage d’une configuration déformée à la suivante. Notons que si  $T$  est le tenseur de contraintes sur une configuration de référence  $\Omega$  alors la transformation de Piola

$$T^\phi(x^\phi) = (\det \nabla \phi(x))^{-1} T(x) \nabla \phi(x)^T, \quad \forall x^\phi = \phi(x) \in \Omega^\phi$$

définit un tenseur des contraintes sur une configuration déformée  $\Omega^\phi$  [Cia88]. Notons que la méthode de déplacement de maillage consiste à prendre le même tenseur des contraintes sur toutes les configurations  $\Omega_k$ , alors que dans la méthode non-linéaire incrémentale hyperélastique le tenseur des contraintes dépend de la configuration considérée.



## Chapitre 5

# Segmentation d'images cardiaques

Avant de réaliser la segmentation des images, un certain nombre d'opérations est nécessaire pour reconstituer un volume 3D à partir des coupes fournies par l'imageur (en IRM par exemple). Compte tenu de l'écart des coupes, une interpolation suivant l'axe des coupes est nécessaire pour construire un volume isotrope. L'image 3D est utilisée pour calculer un champ de forces, qui contrôlera la déformation du Gabarit Déformable Élastique (GDE). Le positionnement du GDE dans l'image est une étape importante. Un bon positionnement évite de converger vers les mauvais contours dans l'image. Dans ce chapitre, nous précisons tout d'abord les difficultés que présente une image par RM par rapport aux images de synthèses utilisées dans les chapitres 3 et 4. Ensuite nous exposons les méthodes mises en œuvre pour construire deux données fondamentales de la segmentation par modèle élastique : le modèle géométrique et le champ de forces. Nous présentons aussi la technique de recalage affine du modèle géométrique. Enfin nous évaluons les modèles de segmentation proposés dans les chapitres 3 et 4 sur des images de synthèses. Nous retenons alors le modèle qui fournit les meilleurs résultats pour segmenter des images par RM.

### 5.1 Difficultés d'une image réelle

Les images étant généralement bruitées, de faux points de contour peuvent exister. La présence dans l'image d'objets autres que celui qui est étudié peut également générer des contours parasites. Des portions de la frontière de l'objet peuvent être invisibles en raison de l'imperfection du système d'imagerie, (voir figure 5.1 pour une illustration des images acquises). De plus, la forte anisotropie engendrée par la géométrie d'acquisition résulte en une bonne résolution dans le plan de coupe et une plus faible résolution dans la direction perpendiculaire aux plans de coupe, (voir en figure 5.2 une pile d'images acquise en petit axe). La reconstruction d'un volume isotrope nécessite ainsi une attention particulière quant au choix de la technique d'interpolation.

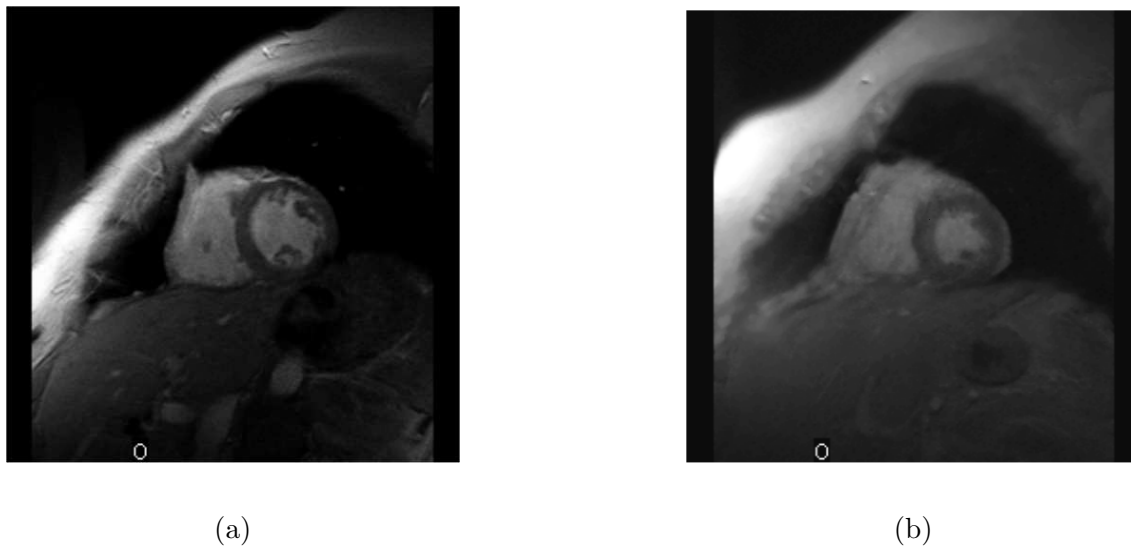


FIG. 5.1 – Exemples de coupes IRM anatomiques acquises sur 2 patients différents à mi-hauteur du VG approximativement en télé-diastole.

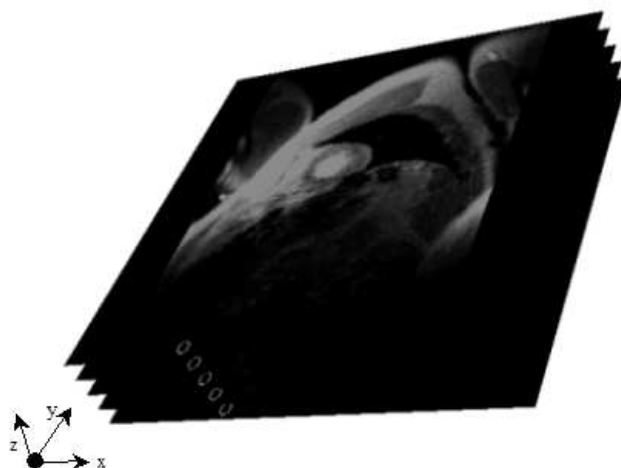


FIG. 5.2 – Pile de coupes acquises en IRM en petit-axe illustrant la forte anisotropie en terme de résolution (résolution dans le plan égale à 1.25 mm, distance inter-coupes de l'ordre de 15 mm).

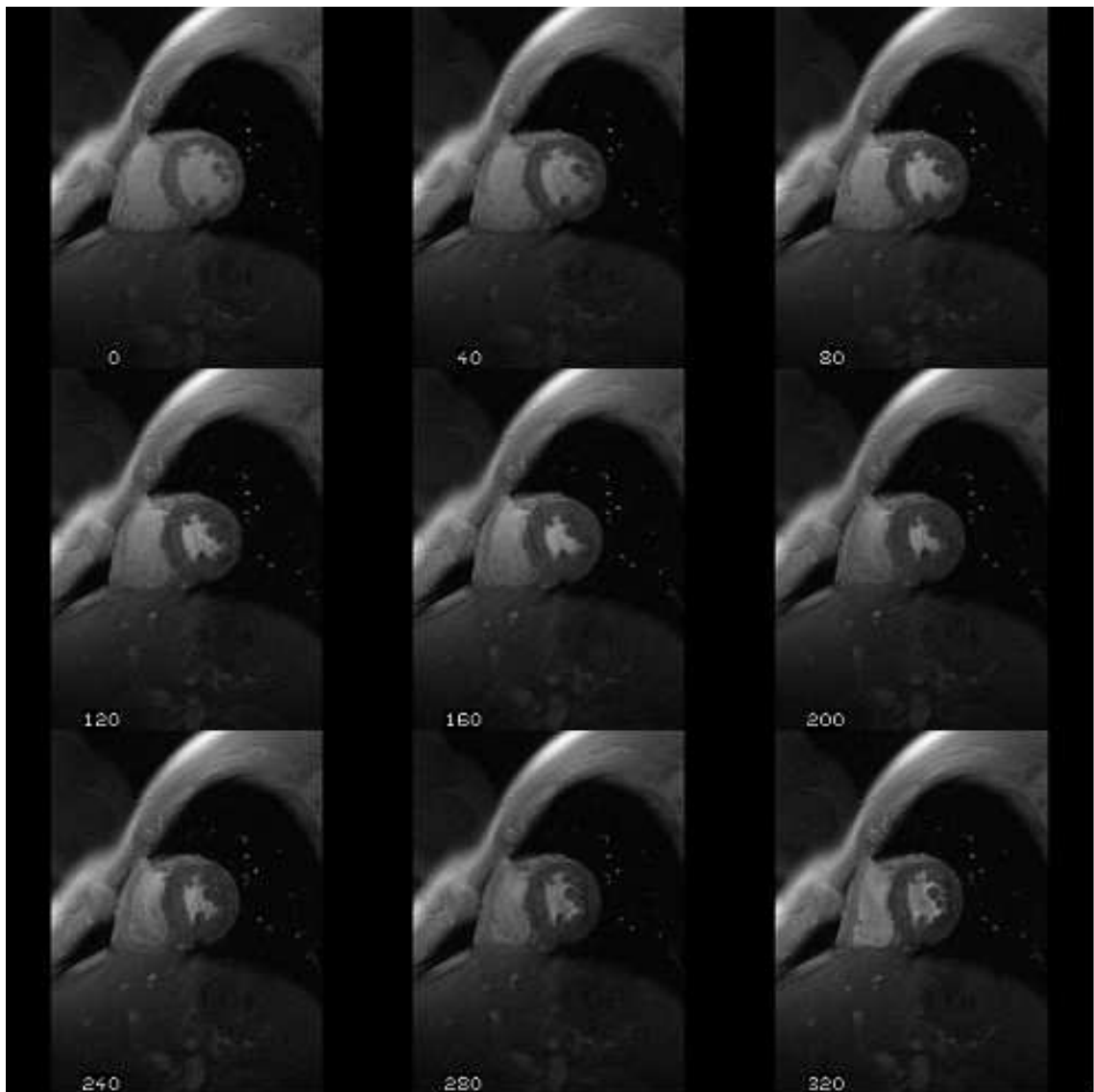


FIG. 5.3 – Série temporelle IRM d'une coupe en petit-axe du cœur. Le temps correspondant est indiqué en millisecondes et la série débute à l'instant de télédiastole.

## 5.2 Données expérimentales

Les expériences de segmentation ont été menées sur des acquisitions en IRM chez l'homme et le petit animal.

### 5.2.1 Etudes chez l'homme

Les données traitées sont un ensemble de 10 examens IRM, acquis dans le cadre d'un protocole clinique (Rhyvage) sur des patients ischémiques. Tous les patients souffrent d'hypertension, sans antécédents cardiovasculaires autres, avec ou sans hypertrophie ventriculaire gauche.

Nous disposons d'acquisitions multi-coupes, multi-phases obtenues sur un scanner 1.5 T (Siemens, Erlangen, Allemagne) en utilisant des séquences rapides TurboFLASH. Les paramètres d'acquisition sont :

TR=80ms, TE=4.8ms, FOV=350mm, NEX=1, taille de la matrice=256x256, épaisseur de coupe=8 mm.

Le patient reste en apnée pendant l'acquisition, synchronisée sur l'ECG (environ 20 s), afin de réduire les mouvements dus à la respiration. Chaque série comprend environ 9 phases, couvrant le cycle cardiaque, de la télé-diastole à la télé-systole. La couverture spatiale des ventricules est réalisée avec, en moyenne, 8 coupes en petit-axe. Notons que la zone apicale est plus ou moins imagée selon les examens.

### 5.2.2 Etudes chez le petit animal

Dans le cadre d'une collaboration avec la plate forme ANIMAGE à Lyon, des images ont été acquises sur des souris en IRM à 7T avec antenne corps pour l'excitation RF et une antenne de surface de 15 mm pour la réception du signal IRM. Des images en orientation petit axe ont été acquises avec une séquence FLASH synchronisée sur l'ECG et les paramètres suivantes : champ de vue de 25 mm<sup>2</sup>, matrice 256×256 pixels, 1 mm d'épaisseur de coupe, TR et TE respectivement de 7 et de 3.5 ms, angle de bascule à 20°. Pour chacun de 7 niveaux de coupes couvrant l'ensemble du VG, 16 phases ont été obtenues. Avec une fréquence cardiaque de 450 bpm, le temps total d'acquisition est de 20 minutes.

## 5.3 Paramètres de segmentation

### 5.3.1 Construction du gabarit géométrique de référence

Le gabarit géométrique initial est un élément important de la méthode de segmentation, car elle conditionne d'une part le type d'objet que l'on veut segmenter, et d'autre part la convergence du modèle vers les structures d'intérêt.

Notre gabarit géométrique utilisé est comparable à celui présenté dans [SCD<sup>+</sup>01, Pha02]. Le modèle géométrique est construit à partir d'un examen IRM standard (ciné-IRM) acquis chez un patient sain, plus précisément des images en petit-axe à l'instant télé-diastolique, couvrant les ventricules de la base à l'apex. On utilise une douzaine de coupes jointives d'épaisseur 8mm, ayant une résolution planaire de l'ordre de 1.3 mm. Ces images ont été segmentées par un expert médical grâce à un contourage interactif sur chacun des niveaux de coupes. On récupère ainsi une pile de contours 2D comportant les contours endocardiques du VG et du VD et le contour épicaudique de l'ensemble VG-VD. A partir de ces contours, des surfaces 3D sont reconstruites grâce au logiciel Nuages<sup>1</sup> [Gei93]. Ces surfaces servent ensuite à créer une image binaire 3D représentant le muscle cardiaque. Nous calculons ensuite le maillage surfacique de l'ensemble VG+VD. Ce maillage est introduit dans le logiciel GHS3D [Geo97] pour générer un maillage volumique de tétraèdres de bonne qualité en vue du calcul par éléments finis. Le modèle est ensuite étiqueté de telle sorte que l'on peut en extraire l'un des deux ventricules ou les surfaces triangulées endocardiques et épicaudique. Les principales étapes de la construction du modèle géométrique bi-ventriculaire sont illustrées en figure 5.4 [Pha02].

### 5.3.2 Reconstruction d'images 3D

La segmentation par Modèle déformable 3D fait évoluer le modèle géométrique dans un volume de données à niveaux de gris. Bien qu'il serait possible de travailler directement à partir des coupes natives en prenant en compte les résolutions dans les trois axes de coordonnées, notre approche fonctionne à partir d'un volume 3D isotrope reconstruit. La figure 5.2 donne un aperçu d'une pile de coupes de résolution millimétrique distantes de 15 mm.

Les méthodes d'interpolation sont habituellement écrites sous la forme d'une convolution de l'image par un noyau. Le tableau 5.5 donne une liste de noyaux couramment utilisés. Pham [Pha02] a étudié expérimentalement plusieurs de ces schémas d'interpolation. Il a ainsi constaté que les meilleurs résultats étaient obtenus avec des schémas d'interpolation basés-objets (SB) [GU96] par opposition aux schémas convolutif agissant directement sur les niveaux de gris. Ces conclusions étaient par ailleurs en accord avec l'étude réalisée dans [GU98]. Les figures 5.6 et 5.7 comparent les résultats obtenus avec quelques techniques d'interpolation. Nous avons donc considéré comme données d'entrée des volumes isotropes obtenus à partir d'une interpolation basée-objets malgré un coût algorithmique plus élevé.

### 5.3.3 Calcul d'un champ de forces

La qualité du résultat dépend directement de la qualité du champ de forces qui agit sur la déformation du modèle géométrique. Dans notre cas, ce champ de forces est calculé

---

<sup>1</sup><http://www-sop.inria.fr/prisme/logiciel/nuages.html.en>

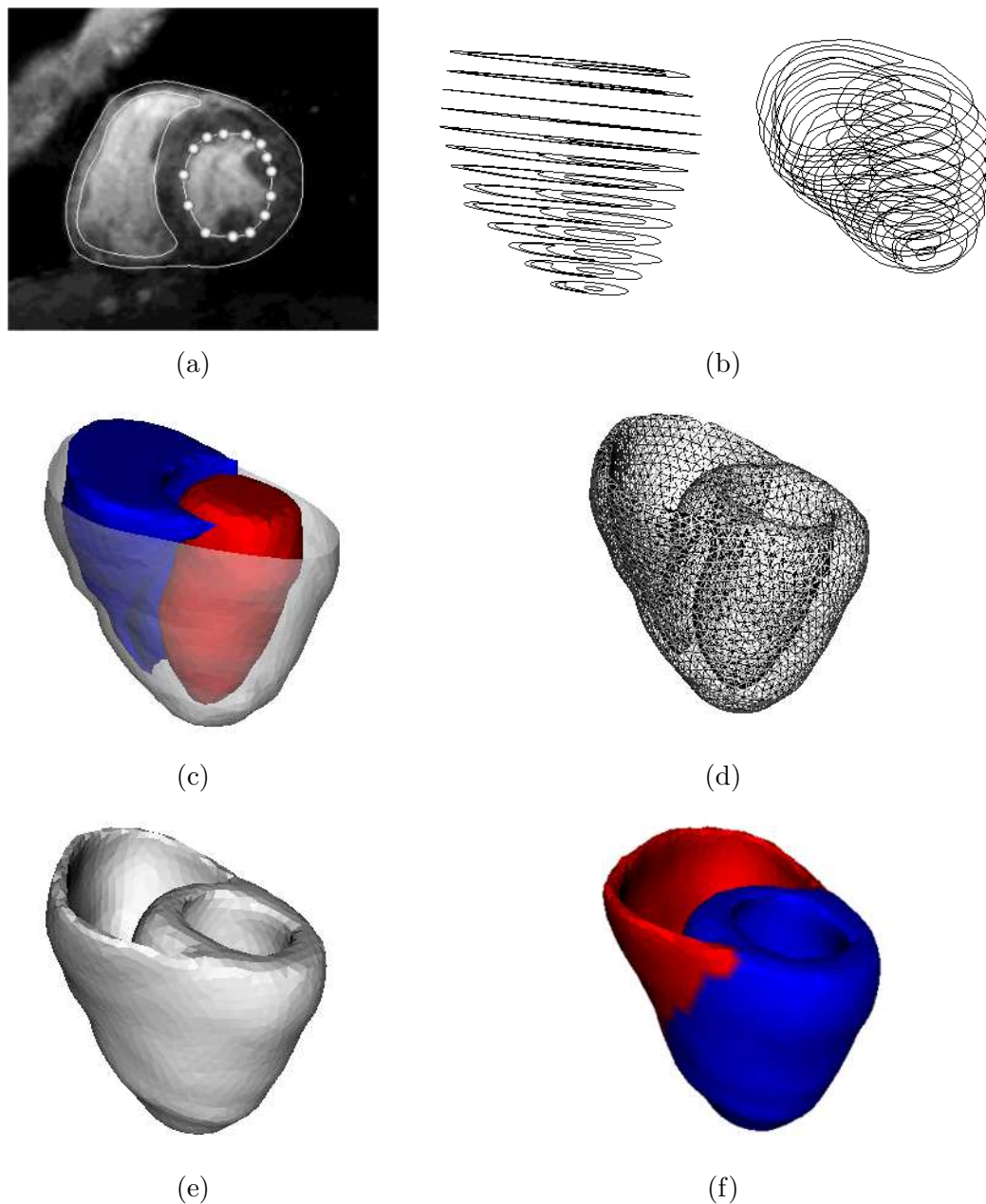


FIG. 5.4 – Construction du modèle géométrique. (a) Contours endocardiques du VG et VD, et contour péricardique, tracés interactivement sur une coupe petit-axe; les sphères blanches représentent pour le contour endocardique du VG les points de contrôle de splines, (b) pile de contours visualisés en 3D, (c) surfaces triangulées reconstruites, (d)-(e) maillage volumique de tétraèdres, (f) modèle étiqueté avec en rouge (foncé) le VD.



Plus proche voisin (PPV)	$h_{PPV}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$
Linéaire (LIN)	$h_{LIN}(x) = \begin{cases} 1 -  x , & \text{si } 0 \leq  x  < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \leq  x . \end{cases}$
Cubique (C)	$h_C(x) = \begin{cases} a_{30} x ^3 + a_{20} x ^2 + a_{10} x  + a_{00}, & \text{si } 0 \leq  x  < 1, \\ a_{31} x ^3 + a_{21} x ^2 + a_{11} x  + a_{01}, & \text{si } 1 \leq  x  < 2, \\ 0, & \text{si } 2 \leq  x . \end{cases}$
Spline cubique (CS) pour $n = 3$ et Spline quintique (QS) pour $n = 5$	<p>avec</p> $h_S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (b^n)^{-1}(k) \beta^n(x - k)$ $\beta^n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)}{(n+1-k)! k!} \left( \frac{n+1}{2} + x - k \right)_+^n, \quad n > 0$
Interpolation cubique oMOMS (C-oMOMS)	$oMoms^3(x) = \beta^3(x) + \frac{1}{42} \frac{d^2}{dx^2} \beta^3(x)$

FIG. 5.5 – Les principales techniques d'interpolation et les noyaux de convolution associés.

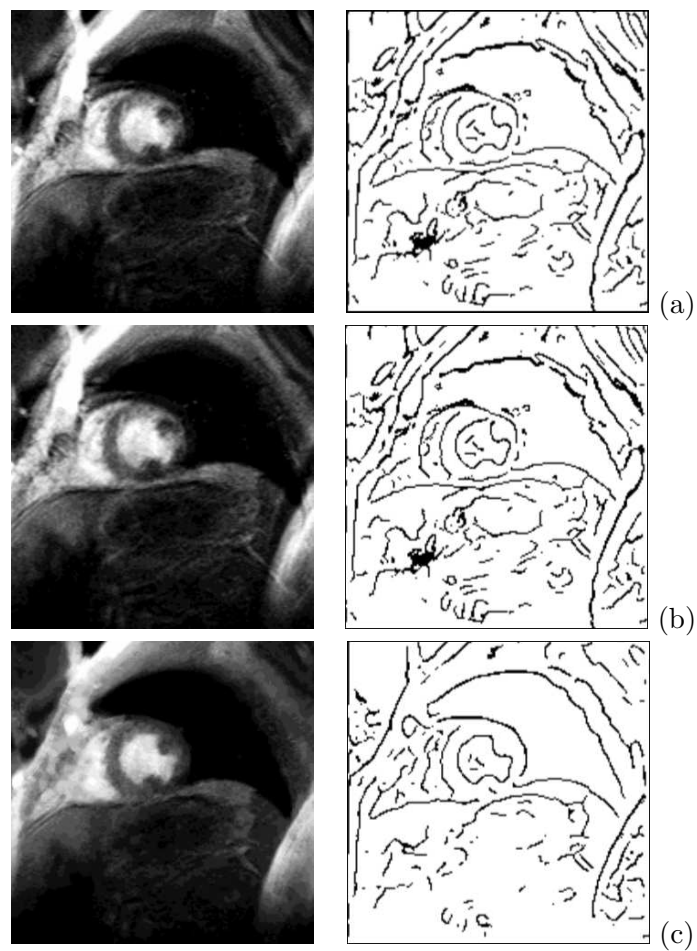


FIG. 5.6 – Résultats d'interpolation pour la reconstruction de volumes isotropes. Interpolation (a) C-oMOMS, (b) QS, (c) SB.

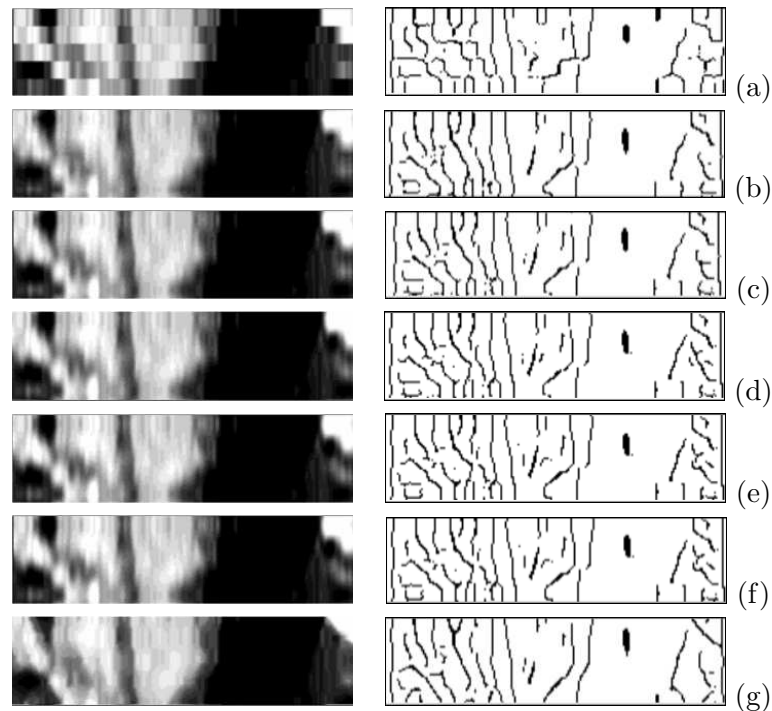


FIG. 5.7 – Résultats d’interpolation, coupe perpendiculaire à l’axe Y. Interpolation de type (a) PPV, (b) LIN, (c) C, (d) CS, (e) C-oMOMS, (f) QS, (g) SB.

en 3D à partir du volume image d’entrée. Nous avons mis en œuvre des champs de forces classiques dérivant d’un potentiel et des champs de forces issues de processus de diffusion. Nous décrivons brièvement les deux approches.

### Champs de forces dérivant d’un potentiel

On peut obtenir un champ de forces en dérivant un champ de potentiel, suivant les trois directions de l’espace. Ce champ de potentiel doit être tel que sa dérivée est nulle sur les lieux où l’on souhaite attirer les interfaces du modèle (contours extraits de l’image par exemple). Le lissage d’une carte de contours binaire ou de la norme du gradient est un procédé simple pour générer un champ de potentiel dont la portée dépend de la largeur du noyau de lissage. Il est également possible de calculer des cartes de distance aux contours. Ces cartes de distances 3D peuvent être calculées par l’algorithme de Borgfors pour la distance de Chamfrein [Bor86], et l’algorithme de Saito-Toriwaki [ST94a] pour la distance euclidienne exacte. La distance de Chamfrein est une approximation de la distance euclidienne, et se calcule en deux balayages, avec des masques de Chamfrein appropriés.

### Champs de forces obtenus par un processus de diffusion

Lorsque le champ de forces construit par dérivation d’une carte de contour extraite par un filtre de Canny-Deriche par exemple n’est pas de portée suffisante on peut augmenter

l'écart type du lissage Gaussien. On peut aussi utiliser la méthode de *Gradient Vector Flow* (GVF) [XP98] qui permet de calculer un champ de forces de portée suffisante par diffusion. Soit  $I$  une fonction de niveau de gris d'une image. La méthode de GVF peut être résumée en trois étapes :

1. Régulariser  $I$  par convolution, on note encore  $I$  la fonction régularisée ;
2. Calculer la carte de contour  $f(x) = \|\nabla I(x)\|^2$ . Notons que
  - $\nabla f$  pointe sur les contours de l'image c'est à dire les maxima locaux de  $f$  ;
  - $\nabla f$  est non nul juste dans un voisinage très étroit des zones d'intérêts (le gradient étant nul dans les régions homogènes).
3. Prolonger  $\nabla f$  par diffusion

$$\Delta \mathbf{t} - \mu_{GVF} (\mathbf{t} - \nabla f) \|\nabla f\|^2 = 0 \text{ dans } W, \quad (5.1a)$$

$$t = 0 \text{ sur } \partial W. \quad (5.1b)$$

$\mathbf{t}$  est le champ de forces défini en tout  $(x, y, z)$  d'un domaine borné  $W$  contenant l'image et  $\mu_{GVF}$  un paramètre de lissage contrôlant la diffusion du GVF.

Notons que, puisque nous recherchons un minimum d'énergie, tous les champs de forces sont tels que  $\mathbf{t}$  est à peu près nul sur les structures d'intérêt.

En pratique, ces deux types de champ de forces ont été calculés. Les résultats obtenus sur des images par RM chez l'homme issues d'un imageur de la précédente génération sont de bonne qualité. Les images plus récentes de la souris considérés dans cette étude font apparaître plusieurs structures parasites. Une combinaison de prétraitements a ainsi du être mis en œuvre comme un filtrage morphologique afin de réduire le nombres des structures parasites de l'image [SRC<sup>+</sup>05].

## 5.4 Initialisation du modèle de segmentation

Le positionnement initial du gabarit est particulièrement déterminant dans ce type d'approche pour converger convenablement vers les contours cibles. Pham a proposé une approche basée sur le recalage affine entre le modèle de référence et l'image [Pha02].

Le recalage consiste à estimer la transformation affine de mise en correspondance du modèle de référence et de l'image qui maximise un critère de similarité sur les niveaux de gris et minimise une distance des interfaces du modèle aux contours significatifs présents dans l'image. Nous commençons par décrire le modèle étendu nécessaire au recalage.

### 5.4.1 Description du modèle

Le modèle que nous recalons sur une image cible  $\mathcal{I}_c$  est basé sur le modèle géométrique décrit en section 5.3.1 qui est un maillage tétraédrique des ventricules du cœur. On note le domaine intérieur  $\Omega$ , l'enveloppe de surface  $\partial\Omega$ , et les maillages volumique et surfacique correspondants  $\mathcal{T}_\Omega$  et  $\mathcal{T}_{\partial\Omega}$ . On définit également un domaine  $W$  englobant  $\Omega$  dont

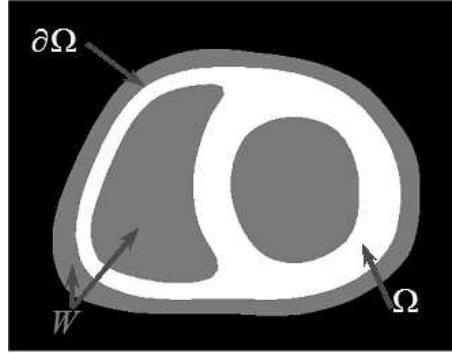


FIG. 5.8 – Surfaces et région intervenant dans le critère de distance modèle-données.

une représentation discrète maillée est  $\mathcal{T}_W$ . La figure 5.8 illustre les différents domaines considérés. La connaissance de l'ensemble  $\mathcal{T}_W + \mathcal{T}_{\partial\Omega}$  permet d'accéder à une information de région dans la zone d'intérêt délimitée par  $W$  et à une information de contour grâce à  $\mathcal{T}_{\partial\Omega}$ . Le recalage consiste à déplacer un objet flottant maillé par rapport à l'image fixe  $\mathcal{I}_c$ . Les nœuds du maillage  $\mathcal{T}_W$  étant les points de l'espace où l'on mesure une intensité dans l'image, les niveaux de gris de l'image de référence  $\mathcal{I}_r$ , qui a servi à la construction du modèle, leur sont associés. On peut donc définir un critère de similarité en terme de niveaux de gris, défini sur l'ensemble de ces points.

#### 5.4.2 Distance modèle-données

Pour apprécier la distance entre le modèle et les données, deux critères sont combinés :

1. un critère de distance spatiale estimée entre le bord du modèle et les contours 3D détectés dans l'image,
2. un critère de similarité des distributions de niveaux de gris de l'image de référence  $\mathcal{I}_r$  portée par le modèle, et de l'image cible  $\mathcal{I}_c$ .

Nous pouvons alors introduire une énergie de mise en correspondance  $E_{MEC}$  dépendant de la transformation spatiale  $T$  comme étant le produit de deux énergies

$$E_{MEC}(T) = E_C(T) \cdot E_R(T) \quad (5.2)$$

$E_C$  étant une énergie basée contour, et  $E_R$  une énergie basée région. Comme [PMV00], nous choisissons la formulation de l'énergie comme le produit de deux termes, plutôt que leur somme, pour nous affranchir du problème de la pondération. Pour calculer l'énergie de contour, nous pouvons utiliser l'algorithme de [ST94a] pour calculer une carte de distance euclidienne. On note  $N_{\partial\Omega}$  le nombre de nœuds du maillage  $\mathcal{T}_{\partial\Omega}$ ;  $n_i(x, y, z)$  désigne les nœuds de ce maillage, et  $p_i(x, y, z)$  les points de contours les plus proches,  $i = 1, 2, \dots, N_n$ .

L'énergie de distance aux contours est égale à

$$E_C(T) = \frac{1}{N_{\partial\Omega}} \sum_i |T(n_i)p_i|^2 \quad (5.3)$$

En ce qui concerne l'énergie basée région, de nombreux critères de similarité peuvent être utilisés. On note  $\{i\}$  une partition des intensités,  $n_{\mathcal{I}_r}(i)$  le nombre de points de  $\mathcal{I}_r$  d'intensité  $i$ ,  $\mu_{\mathcal{I}_c(\mathcal{T})}(i)$  et  $\sigma_{\mathcal{I}_c(\mathcal{T})}(i)$  la moyenne et l'écart-type des points de  $\mathcal{I}_c$  qui correspondent aux points de  $\mathcal{I}_r$  ayant l'intensité  $i$ . Le tableau 5.9 présente les critères les plus connus dans le domaine du recalage d'images.

### 5.4.3 Transformation affine

La transformation affine  $\mathcal{A}$  est décomposée en transformations élémentaires : une translation  $T$ , des rotations  $R = R_z R_y R_x$  une mise à l'échelle  $S$ , une transformation de cisaillement  $H = H_{xy}H_{yz}H_{zx}$ . Ainsi, la matrice homogène de la transformation affine est décrite par 12 paramètres. Elle est définie par :

$$A = H \circ S \circ R \circ T \quad (5.4)$$

avec

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & S &= \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 R_z &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & H_{xy} &= \begin{pmatrix} 1 & -\tan \theta_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 R_y &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_y & 0 & -\sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & H_{yz} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tan \theta_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 R_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & H_{zx} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tan \theta_{zx} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Avec cette formulation, les paramètres de cisaillement apparaissent sous la forme d'angles, ce qui rend leur interprétation géométrique plus aisée. Dans le cas d'une transformation rigide, il suffit de ne tenir compte que des matrices de translation  $T$  et rotation  $R$ , ce qui réduit le nombre de paramètres indépendants à 6. Notons également que l'ordre dans lequel intervient chacune de ces transformations peut avoir une influence sur le résultat, comme le souligne par exemple [Sar00]. Dans notre application, elles sont appliquées dans l'ordre indiqué par l'équation (5.4).

Nom	Abréviation	Expression
Sommes des différences absolues	SDA	$\frac{1}{N_W} \sum_i  \mathcal{I}_r(n_i) - \mathcal{I}_c(\mathbb{T}(n_i)) $
Sommes des différences carrées	SDC	$\frac{1}{N_W} \sum_i  \mathcal{I}_r(n_i) - \mathcal{I}_c(\mathbb{T}(n_i)) ^2$
Coefficient de corrélation	CC	$\frac{\sum_i (\mathcal{I}_r(n_i) - \bar{\mathcal{I}}_r)(\mathcal{I}_c(\mathbb{T}(n_i)) - \bar{\mathcal{I}}_c(\mathbb{T}))}{\left(\sum_i (\mathcal{I}_r(n_i) - \bar{\mathcal{I}}_r)^2 \cdot \sum_i (\mathcal{I}_c(\mathbb{T}(n_i)) - \bar{\mathcal{I}}_c(\mathbb{T}))^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
Critères de Woods	VRI	$\sum_{i \in \{i\}} \frac{n_{\mathcal{I}_r}(i) \cdot \sigma_{\mathcal{I}_c(\mathbb{T})}(i)}{N_W \cdot \mu_{\mathcal{I}_c(\mathbb{T})}(i)}$
Information mutuelle	IM	$\text{IM}(A, B) = H(A) + H(B) - H(A, B),$ <p style="text-align: center;"><math>H(A)</math> : entropie de Shannon  <math>H(A, B)</math> : entropie conjointe</p>
Information mutuelle normalisée	IMN	$\text{IMN}(A, B) = \frac{H(A)+H(B)}{H(A,B)},$ <p style="text-align: center;"><math>H(A)</math> : entropie de Shannon  <math>H(A, B)</math> : entropie conjointe</p>

FIG. 5.9 – Les principales mesures de similarité utilisées en recalage d’images.

#### 5.4.4 Interpolation et optimisation

Les techniques d'optimisation les plus courantes, ne nécessitant pas le calcul du gradient, sont la méthode de Powell et la méthode de Nelder et Mead, dite du Simplexe [PTVF92]. Elles ont été fréquemment utilisées dans le contexte du recalage affine d'images [MV98]. Nous décrivons brièvement le fonctionnement de la méthode de Powell. Supposons que l'on souhaite minimiser une fonction  $f$  sur un domaine  $D$  borné de dimension fini dont la base est  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . Partant d'un point  $P_k$  de  $D$ , nous calculons  $\lambda_k$  minimum de la fonction réelle  $g_k$  définie par

$$\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto g_k(\lambda) = f(P_k + \lambda u_k),$$

on repart ensuite du point  $P_{k+1} = P_k + \lambda_k u_k$ , on prend  $u_{k+1}$  comme nouvelle direction et on itère le processus autant de fois que nécessaire. La minimisation par rapport à  $\lambda$  s'effectue avec la méthode de Brent. La méthode de Brent est une combinaison de la dichotomie, de la méthode de la sécante et de l'interpolation quadratique. La méthode de Powell est connue pour être particulièrement robuste [MCV<sup>+</sup>97]. Dans ce recalage nous avons choisi d'utiliser la méthode de Powell pour minimiser l'énergie de mise en correspondance.

#### Remarques

Avant l'étape de minimisation de l'énergie de mise en correspondance, nous faisons subir au modèle une mise à l'échelle en tenant compte des résolutions respectives de  $\mathcal{I}_r$  et  $\mathcal{I}_c$ . Il est ensuite automatiquement déplacé vers le centre de l'image, position initiale du recalage. Pour éviter que le modèle sorte de l'image un critère est ajouté pour pénaliser les transformations non-souhaités.

L'interpolation est un problème souvent évoqué dans les méthodes de recalage, car elle conditionne la qualité du résultat final, en affectant par exemple le profil de la fonction de similarité au cours des différentes transformations. [MCV<sup>+</sup>97] montrent par exemple que l'interpolation par volume partiel rend la fonction d'information mutuelle continue par rapport à la transformation géométrique. L'algorithme de recalage affine adopté dans cette étude utilise l'interpolation trilineaire, et a donné des résultats satisfaisants.

#### 5.4.5 Résultats

Notons que la plupart du temps, les critères de similarité les plus simples (SDA, SDC, et CC) se montrent efficaces. Le critère CC est particulièrement adapté lorsque les images sont bruitées où que leurs gammes d'intensités diffèrent légèrement. Par ailleurs, l'énergie de distance aux contours accroît la robustesse de la méthode. Un exemple de recalage affine est présenté en figure 5.10 sur des images par RM.



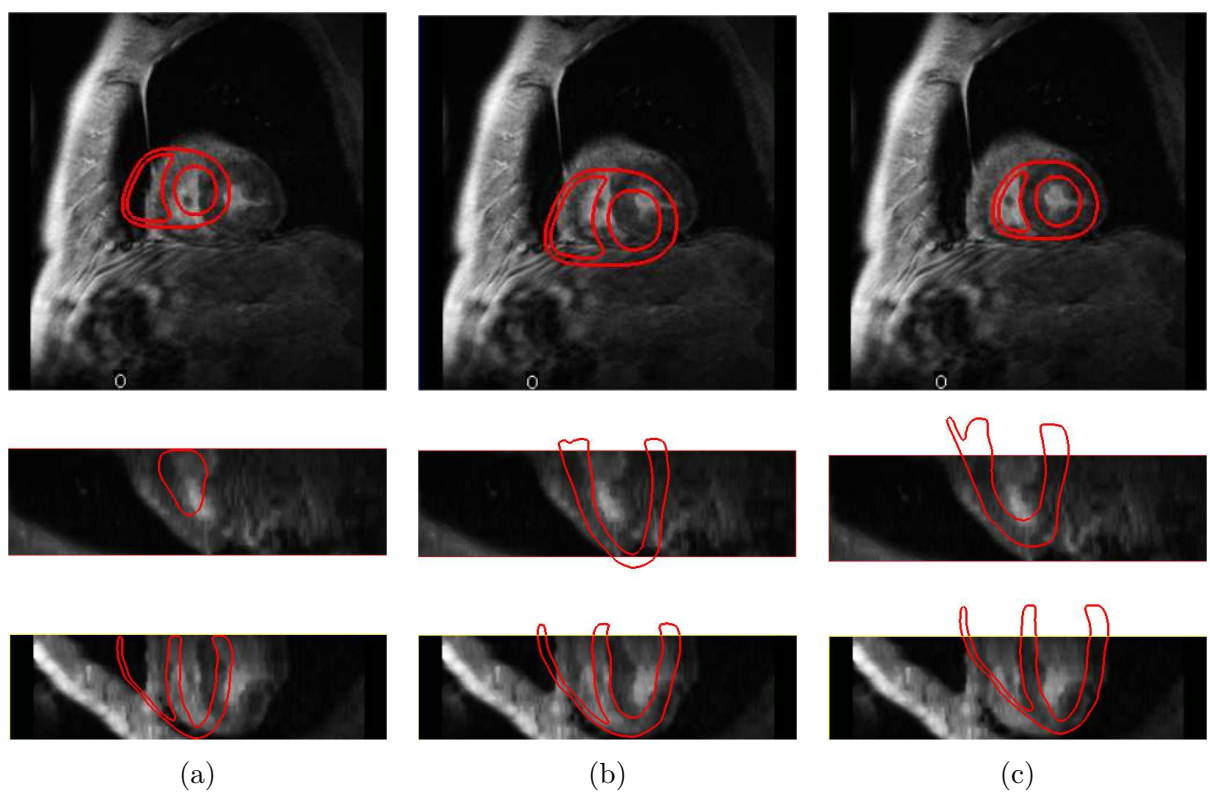


FIG. 5.10 – Recalage affine (a) Modèle initial, (b) Mise à la résolution de l'image, (c) Modèle recalé.

## 5.5 Choix du modèle pour la segmentation

Nous avons vu dans le chapitre 3 que le modèle semi-linéaire donne des résultats satisfaisants pour un problème de segmentation nécessitant que des petits déplacements (chapitre 3 figure 3.3-(b)). Dans ce qui suit nous allons tester les modèles exposés dans les chapitres 3 et 4 sur un test nécessitant des grands déplacements.

Le test consiste à déformer un maillage sphérique pour s'ajuster aux surfaces d'une image binaire d'un ellipsoïde dont les dimensions ont été choisies de sorte que la transformation nécessite de grands déplacements. Notons que pour la segmentation nous avons utilisé le même champ de forces (voir figure 5.11-(c)) et les mêmes constantes mécaniques.

Le modèle non-linéaire avec déplacement du maillage ou avec régularisation hyperélastique donne des résultats satisfaisants (5.12), alors que le modèle semi-linéaire donne des résultats peu satisfaisants (5.12-(a)) malgré des conditions aux bords de types grandes déformations ! La modélisation linéaire à l'intérieur du modèle est insuffisante pour un recalage non rigide du modèle sur l'image dans le cadre des grands déplacements. De plus Les résultats obtenus avec la régularisation hyperélastique est meilleure que ceux obtenus par déplacement du maillage (figure 5.12).

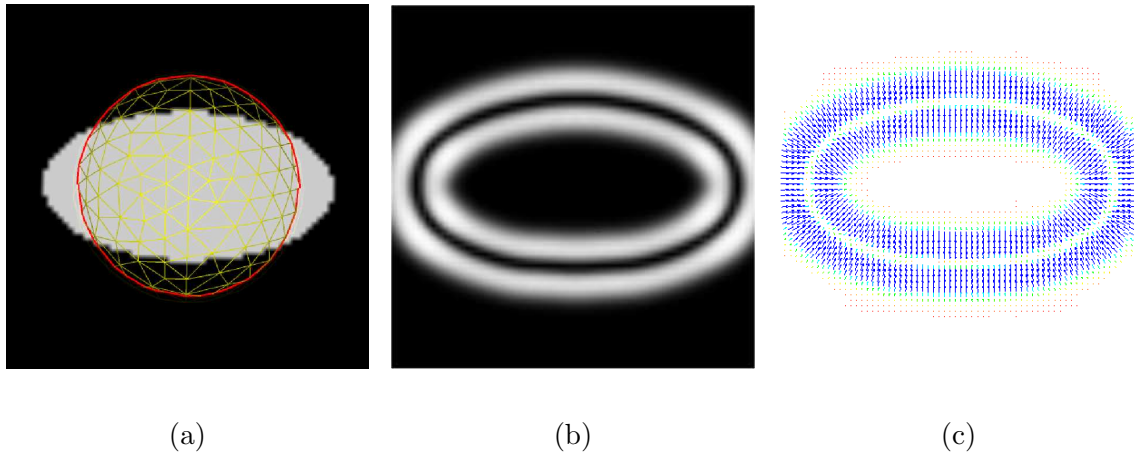


FIG. 5.11 – Segmentation d'un ellipsoïde à partir d'un maillage sphérique. (a) Maillage sphérique, (b) image de la norme du champ sur une coupe 2D, (c) image du champ de forces sur une coupe 2D.

Ces résultats nous conduisent à sélectionner la modèle non-linéaire avec régularisation hyperélastique qui donne les meilleurs résultats en grand déplacement et pour lequel nous disposons d'un résultat de convergence.

## 5.6 Résultats de la segmentation cardiaques

Nous donnons ci-dessous les résultats de segmentation obtenus sur les examens chez le petit animal et chez l'homme. L'initialisation du modèle est effectuée par des transforma-

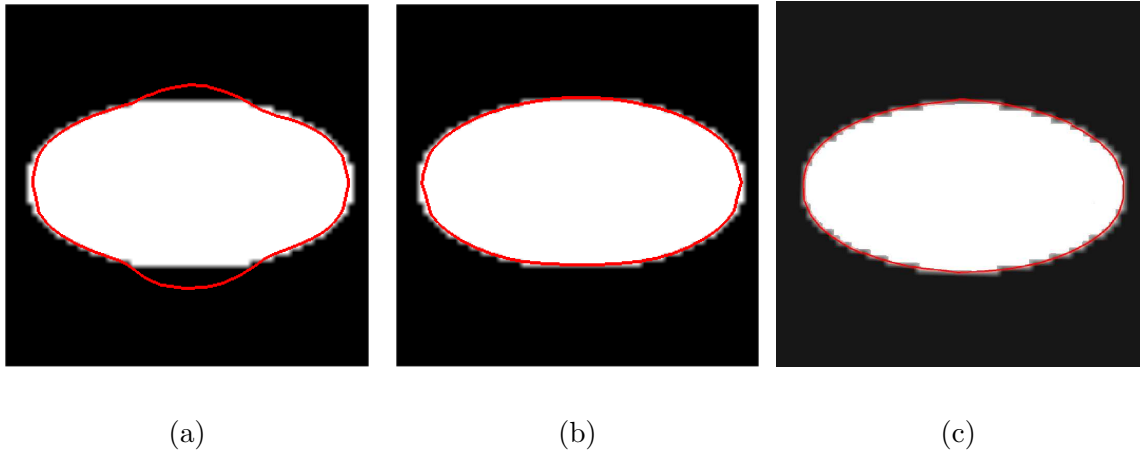


FIG. 5.12 – Résultats de la segmentation sphère vers ellipsoïde. (a) Algorithme de régularisation élastique linéaire, (b) algorithme de déplacement de maillage, (c) algorithme non-linéaire (régularisation hyperélastique).

tions affines avec la méthode exposée dans la section 5.4. L'épaisseur de la paroi dans le ventricule droit est beaucoup plus fine que celle du ventricule gauche. Il est donc judicieux de considérer des paramètres mécaniques différents pour les deux régions.

### 5.6.1 Segmentation chez le petit animal

#### Paramètres utilisés

Le modèle maillé comporte 1862 nœuds et 7134 tétraèdres. Pour les deux parties du maillage, (VD et VG), nous avons fixé le coefficient de Poisson à 0.485, par contre nous avons fait varier le coefficient de Young de sorte à ce que le maillage qui correspond au VD soit rigide et celui du VG soit assez souple. Le champ de forces est calculé par la méthode GVF. Les paramètres utilisés pour le GVF sont  $\mu_{GVF} = 0.15$  et le nombre d'itérations est 150.

#### Résultats

Les figures 5.13 et 5.14 illustrent les étapes du processus de segmentation et le résultat de la segmentation, en 2D et en 3D à l'instant télé-diastolique pour une souris donnée. La figure 5.15 donne un exemple de maillage avant et après la déformation.

#### Suivi de la segmentation d'un cycle cardiaque

Comme dans [Vin01, Pha02], nous utilisons la segmentation obtenue pour la phase  $k$  comme initialisation de la segmentation à la phase  $k+1$ . Il est donc possible de réaliser une segmentation spatio-temporelle du muscle cardiaque de l'instant télé-diastolique à l'instant télé-systolique. La segmentation 3D du myocarde au cours du temps est particulièrement intéressante car elle permet de fournir des informations utiles concernant la variation

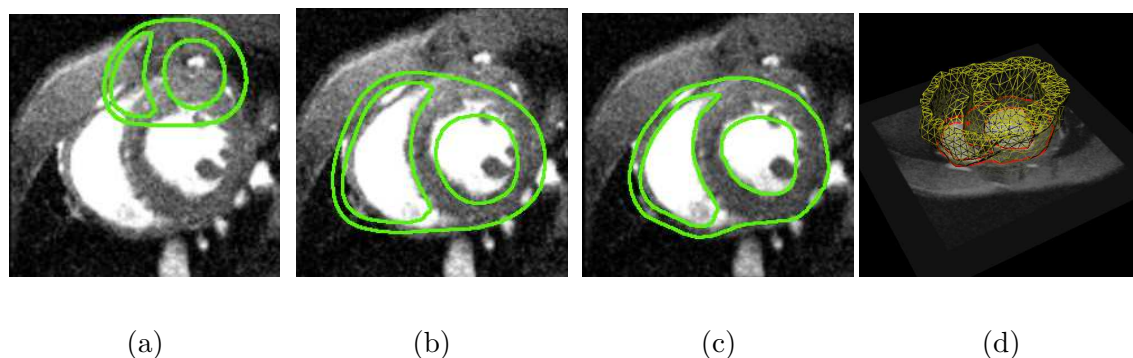


FIG. 5.13 – Processus de segmentation de données de souris sur une coupe 2D : (a) Positionnement initial du modèle, (b) résultat du recalage affine, (c) résultat de la segmentation, (d) maillage 3D obtenu après segmentation.

des volumes ventriculaires et la fonction contractile du muscle cardiaque. La figure 5.16 illustre le suivi des ventricules au cours du cycle cardiaque, par segmentation des phases successives. La figure 5.17 donne la variation du volume des deux ventricules au cours de 12 instants successif du cycle cardiaque.

### 5.6.2 Segmentation des données patients

#### Paramètres utilisés

Le modèle utilisé comporte 5197 nœuds et 22 368 tétraèdres. Pour les deux parties du maillage, une partie qui correspond au VD et l'autre au VG, nous avons fixé le coefficient de poisson à 0.485 et fait varier le coefficient de Young. Le champ de forces est calculé par la méthode de GVF, avec  $\mu_{GVF} = 0.15$  et 150 itérations. Voir sur la figure 5.18 une coupe 2D du champ de forces en petit axe.

#### Résultats de la segmentation

La figure 5.19 montre un résultat de segmentation, en 2D et en 3D d'une image à l'instant télé-diastolique pour un patient donné.

#### Suivi de la segmentation au cours du cycle cardiaque

Comme précédemment nous utilisons la segmentation obtenue pour la phase  $k$  comme initialisation de la segmentation de la phase  $k + 1$ . La figure 5.20 illustre le suivi des ventricules au cours de quatre instants du cycle cardiaque, par segmentation des phases successives.

En conclusion, les résultats de segmentation obtenus avec les patients sont généralement plus satisfaisants que ceux obtenus sur les souris. Ceci s'explique par le fait que les images par RM de souris sont plus bruitées et présentent d'avantage de structures parasites. Malgré cela, les résultats obtenus sur les IRM de souris sont satisfaisants. Alliée à une

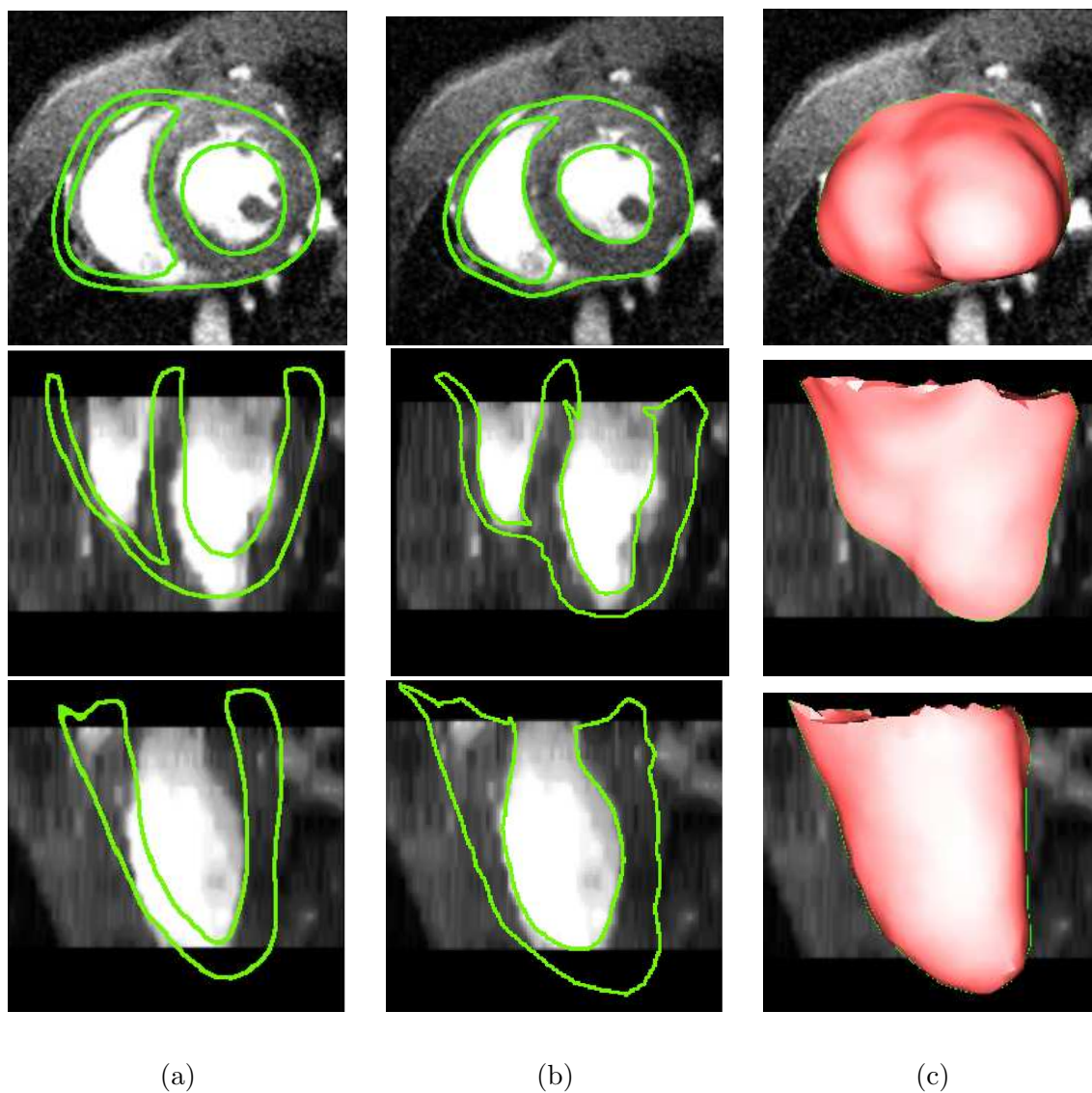


FIG. 5.14 – Déformation du modèle géométrique élastique 3D pour un examen chez une souris. Colonne (a) : trace du modèle initial, coupes orthogonales à Z, X et Y, colonne (b) : trace du modèle déformé résultant, colonne (c) modèle déformé vue en 3D suivant les trois directions.

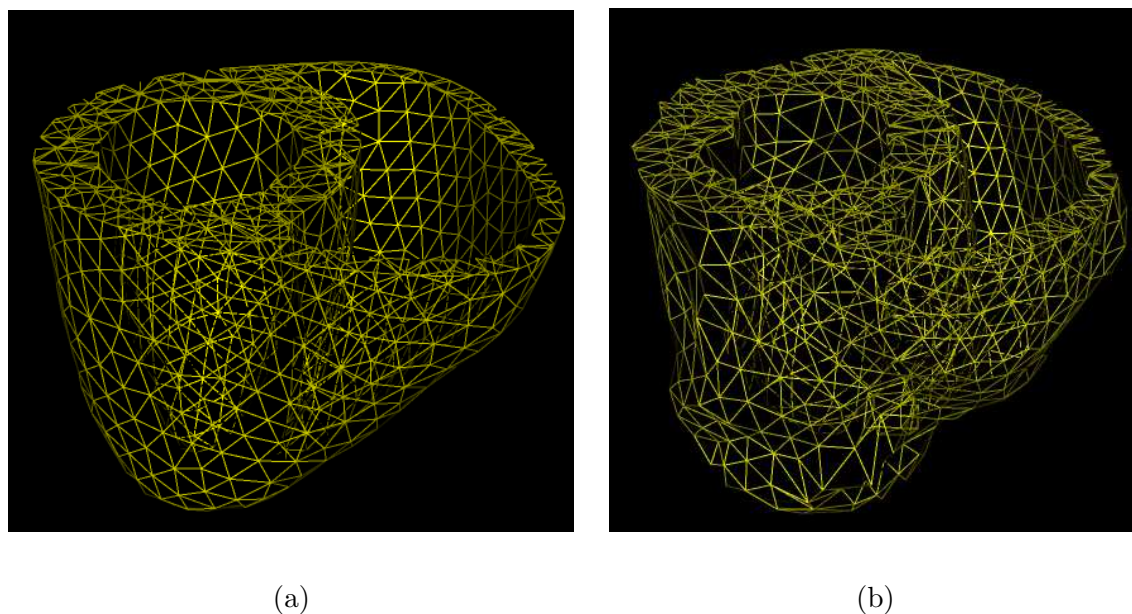


FIG. 5.15 – Déformation du modèle géométrique élastique : (a) maillage initial, (b) maillage déformé.

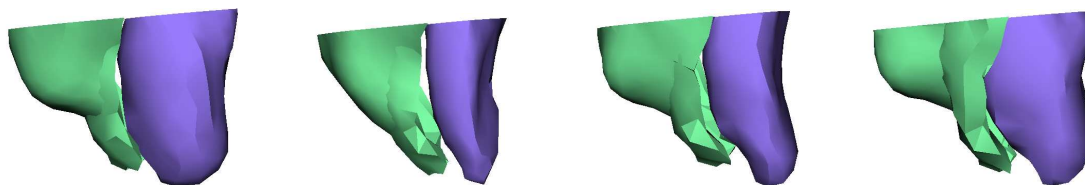


FIG. 5.16 – Suivi des cavités ventriculaires d'une souris au cours d'un cycle cardiaque (4 phases séparées par un intervalle de 64 ms).

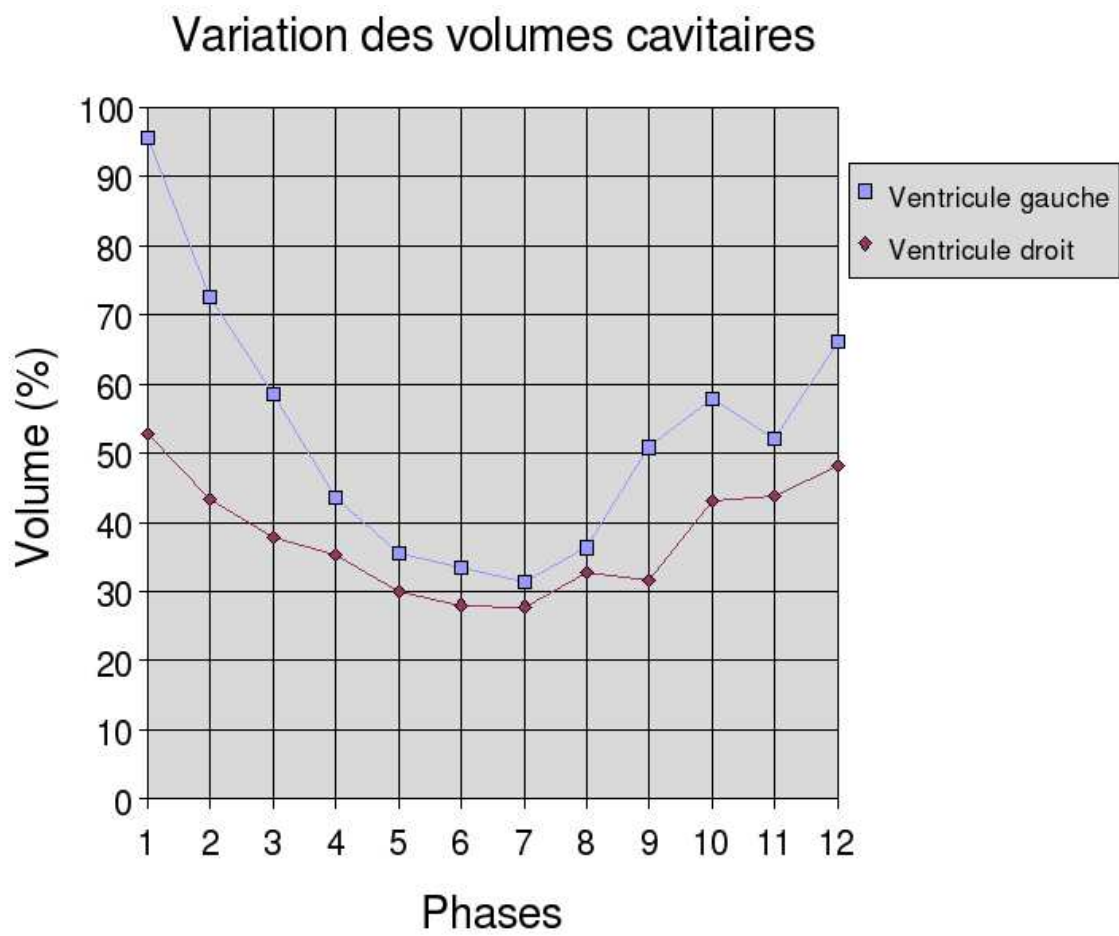


FIG. 5.17 – Variation des volumes des ventricules durant un cycle cardiaque chez la même souris qu'en 5.16.

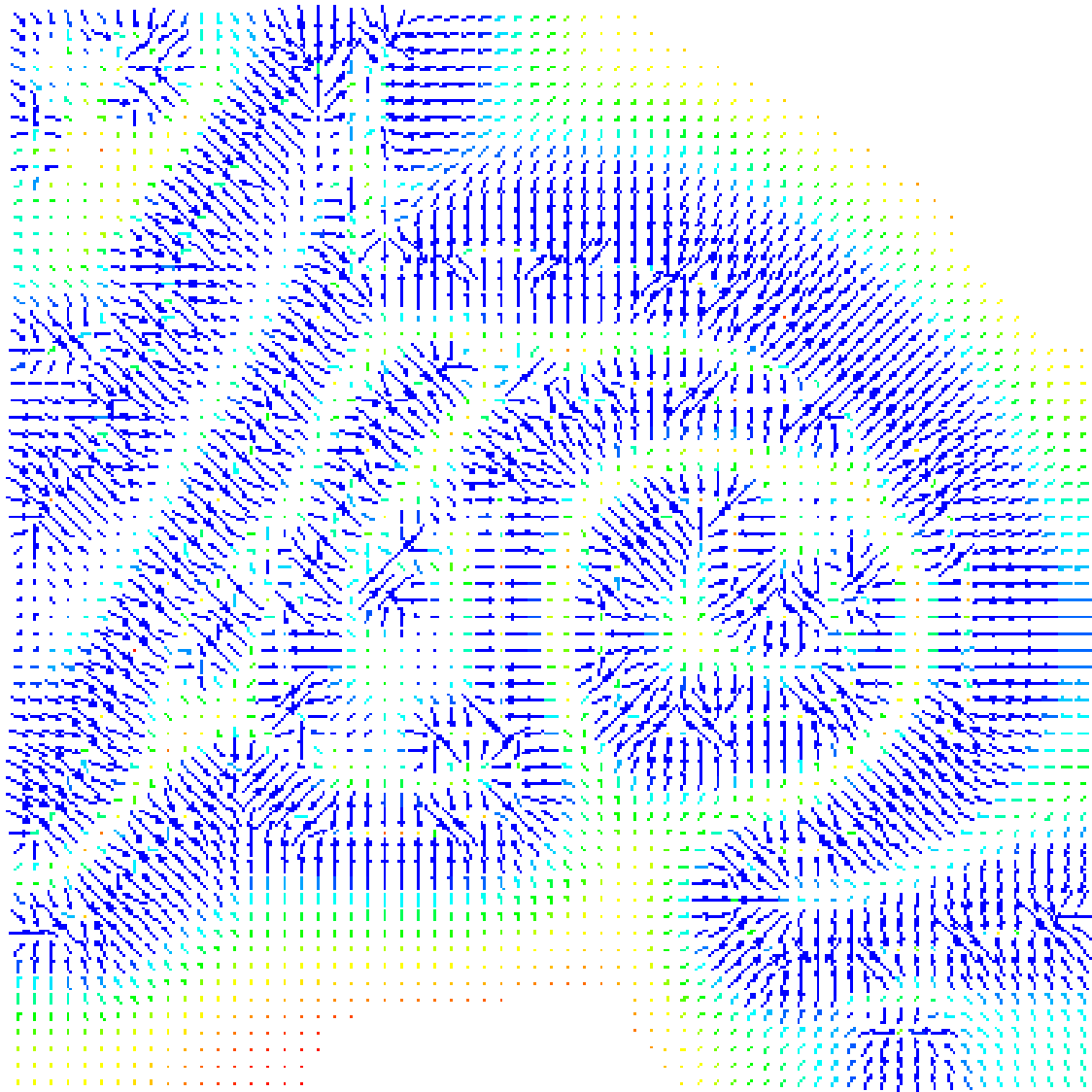


FIG. 5.18 – Vue 2D du champ de forces en petit axe pour un examen chez le patient.



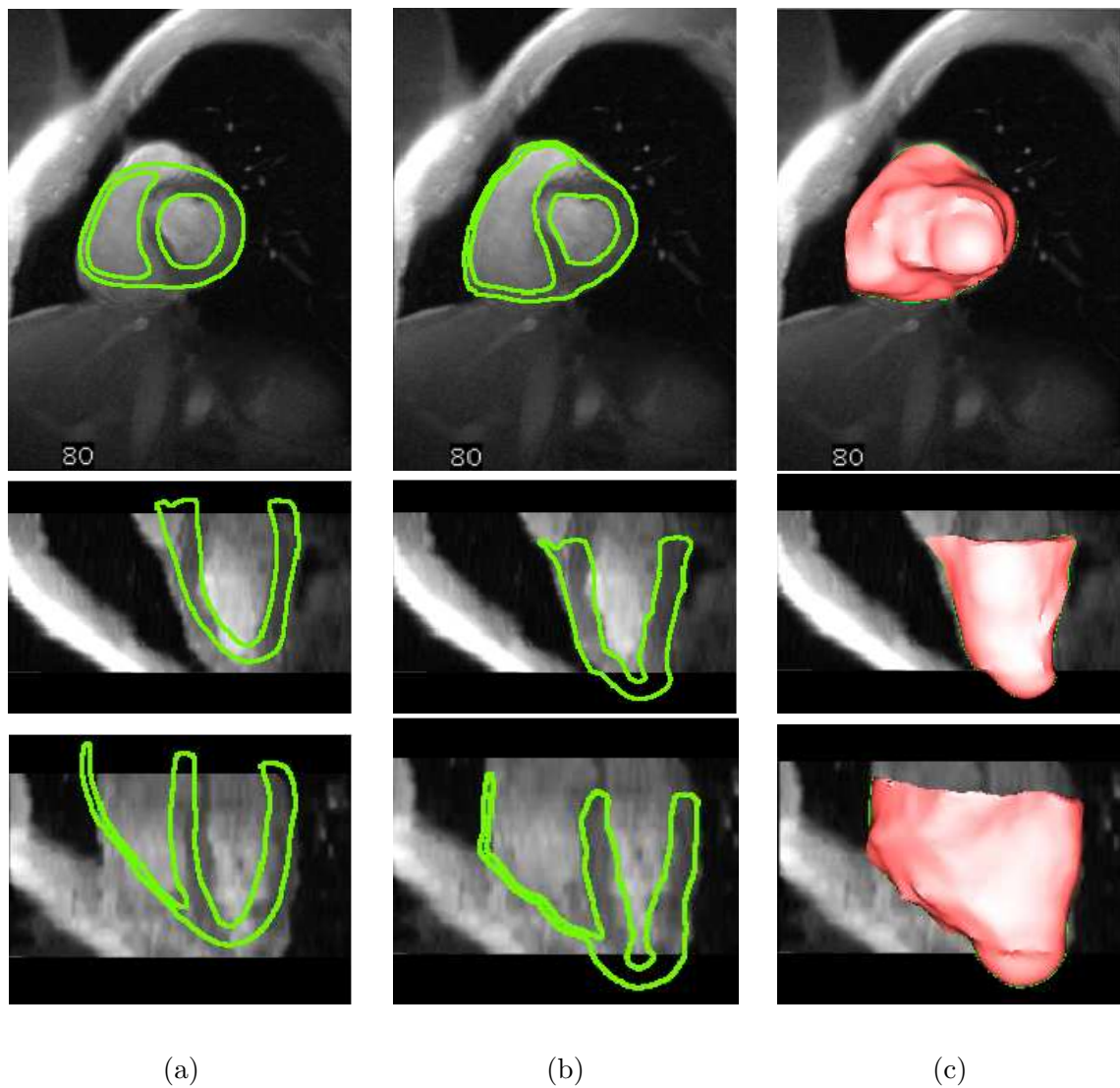


FIG. 5.19 – Déformation du trace modèle géométrique élastique 3D sur une image d'un patient. Colonne (a) : trace du modèle initial, coupes orthogonales à Z, X et Y, colonne (b) : trace du modèle déformé résultant, colonne (c) modèle déformé vue en 3D.

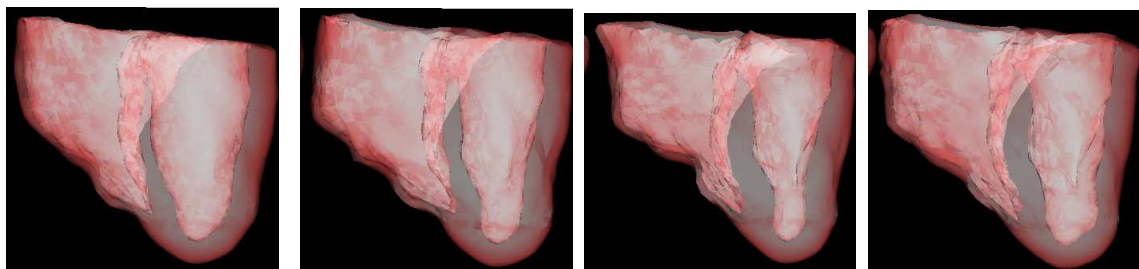
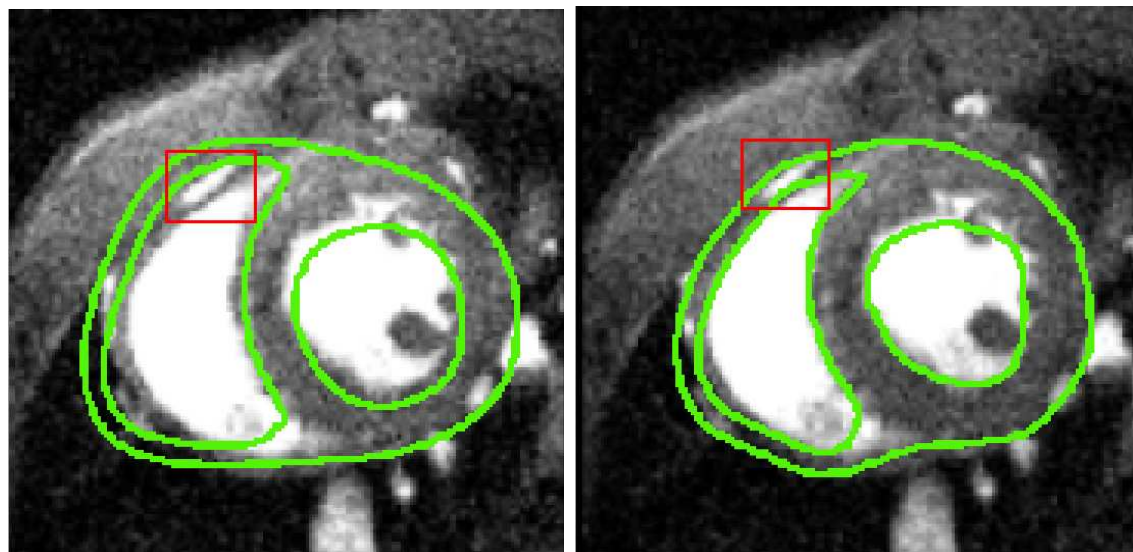


FIG. 5.20 – Suivi des cavités ventriculaires d'un patient (4 phases séparées par un intervalle de 80 ms).



(a)

(b)

FIG. 5.21 – Résistance du modèle hyperélastique aux structures parasites d'IRM de souris. (a) après recalage, (b) résultat de la segmentation par régularisation hyperélastique. La zone encadrée représente une structure parasite

combinaison de prétraitements pour réduire les structures parasites dans l'image de souris comme un filtre morphologique des images [SRC<sup>+</sup>05], le modèle hyperélastique a montré une robustesse aux structures parasites qui persistent dans l'image (figure 5.21). La segmentation chez les patients n'a pas nécessité de traitements préalables des images. De plus le maillage obtenu après déformation est de bonne qualité (figure 5.15). La validation du modèle est en cours dans le cadre d'une étude clinique.

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons présenté trois modèles déformables élastiques volumiques pour la segmentation automatique des images cardiaques. Le principe de ces modèles est générique et permet d'envisager son application à la segmentation de formes variées. Ces modèles permettent de modéliser l'épaisseur des objets (dans notre application il s'agit de la paroi myocardique) et de régulariser les déformations. De plus l'introduction de l'élasticité permet de s'approcher de la réalité biomécanique du cœur, ce qui constitue un pas important vers une modélisation réaliste du cœur. Nous avons obtenu des résultats très encourageants qui soulignent l'importance d'un tel modèle pour l'imagerie médicale et en particulier cardiaque.

Dans un futur proche les améliorations que nous pensons pouvoir apporter au modèle concernent :

- le calcul de la matrice de raideur et leur mise à jour sont coûteux en temps de calcul. Une parallélisation des calculs de l'assemblage de la matrice de raideur doit nous permettre de réduire considérablement le temps de calcul ;
- une amélioration du champ de forces pourrait éviter la convergence vers les mauvaises surfaces lors d'une initialisation non favorable.

Pour le suivi du mouvement du cœur, il serait intéressant d'introduire une contrainte temporelle dans le modèle de segmentation, au lieu de faire une segmentation progressive, en utilisant des équations non-stationnaires pour la modélisation.

Une étude est actuellement en cours, dans le cadre d'une collaboration avec CREATIS<sup>2</sup>, pour répondre à ces questions.

---

<sup>2</sup>UMR CNRS 5515, INSERM U630, bât Blaise Pascal, 69 621 Villeurbanne Cedex - France



# Annexe A

## Notations

### A.1 Liste des abréviations

ECG	Electrocardiogramme
FDG	Fluorodésoxyglucose
GVF	Gradient Vector Flow
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
MCG	Magnéto-cardiographie
MEF	Méthode des Eléments Finis
MGDE	Modèle Géométrique Déformable Elastique
TEMP	Tomographie d'Emission Monophotonique
TEP	Tomographie par Emission de Positons
US	Ultrasons
VD	Ventricule Droit
VG	Ventricule Gauche

### A.2 Principales notations utilisées

#### A.2.1 Notations générales

La lettre  $\Omega$  désigne toujours un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial\Omega$  le bord de  $\Omega$  et  $\nu$  le vecteur normal en tout point régulier de  $\Omega$ . On désigne par  $x = (x_1, x_2, x_3)$  un point générique de  $\mathbb{R}^3$ . La mesure de  $\Omega$  est notée  $\text{mes}(\Omega)$ . Pour les caractéristiques de régularité des domaines, on consultera [Neč67]. Pour une fonction  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , nous notons  $\partial_i u$  ou  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  la dérivée partielle dans la  $i$ -ième coordonnée ( $1 \leq i \leq 3$ ) et le gradient par

$$\nabla u = (\partial_j u_i)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Par ailleurs

$$\nabla u^t = (\partial_i u_j)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

La divergence d'une fonction de  $\mathbb{R}^3$  est le scalaire donnée par

$$\operatorname{div} u = \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i \right),$$

la divergence d'une fonction de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  de composantes

$$\operatorname{div} u = \left( \sum_{j=1}^3 \partial_j u_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}.$$

Pour un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  où les  $\alpha_i$  sont des entiers positifs, nous posons

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i.$$

## A.2.2 Principaux espaces de fonctions utilisés

Soient  $m, n$  deux entiers positifs et  $p$  un nombre tel que  $1 \leq p$ . Les notions suivantes sont standard.  $L^p(\Omega)$  est l'espace de (classe de) fonctions mesurables  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dont  $|v|^p$  est intégrable au sens de Lebesgue,  $W^{m,p}(\Omega)$  est l'espace (Banach) des éléments  $v$  de  $L^p(\Omega)$  équipé de la norme

$$\|v\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,p},$$

où  $\|\cdot\|_{0,p}$  est la norme  $L^p(\Omega)$ . Si  $\Omega$  est un cône [Ada75] et  $mp > 3$ , alors  $W^{m,p}(\Omega)$  est une algèbre c.à.d.

$$u, v \in W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow uv \in W^{m,p}(\Omega), \quad \|uv\|_{m,p} \leq c_{m,p} \|u\|_{m,p} \|v\|_{m,p},$$

où  $c_{m,p}$  est un réel positif indépendant de  $u$  et  $v$  (voir [Ada75], Thm. 5.23). Si  $v = (v_i)_{i=1,2,3}$  appartient  $(W^{m,p}(\Omega))^3$  nous considérons

$$\|v\|_{m,p} = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{m,p}.$$

On note  $H^m(\Omega)$  l'espace  $W^{m,2}(\Omega)$ . Pour un espace normé  $X$ , on note  $X'$  l'espace des formes linéaires continues sur  $X$ , c.à.d. l'espace dual de  $X$ . Le produit scalaire dans la dualité  $X', X$  est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si aucune confusion n'est possible.

**A.2.3 Notations relatives aux grandeurs mécaniques**

$\Omega$	: région à déformer, ouvert borné de $\mathbb{R}^3$
$\bar{\Omega}$	: adhérence de $\Omega$
$\partial\Omega$	: bord de $\Omega$
$\tilde{\Omega}$	: domaine déformé inconnu
$\partial\tilde{\Omega}$	: bord du domaine déformé inconnu
$dx$	: élément de volume dans $\Omega$
$d\sigma$	: élément de surface sur $\partial\Omega$
$u, v$	: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ : déplacement
$\phi, \psi$	: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ : déformation ( $\phi = \mathbf{1} + u, \psi = \mathbf{1} + u$ )
$\nu$	: vecteur normal en tout point régulier de $\Omega$
$\epsilon(u)$	: $\epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^t + \nabla u)$ : tenseur linéarisé de déformations
$\text{Tr}(\epsilon)$	: $\text{Tr}(\epsilon) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ : trace de la matrice $\epsilon$
$\sigma(u)$	: $\sigma(u) = \lambda \text{Tr}(\epsilon(u))\mathbf{1} + 2\mu\epsilon(u)$ : tenseur des contraintes
$g$	: champ de forces surfacique
$h$	: champ de forces volumique
$E(u)$	: $E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u^t + \nabla u + \nabla u^t \nabla u)$ : tenseur des déformations de Green-St Venant
$W(E)$	: $W(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{Tr}(E))^2 + \mu \text{Tr}(E^2)$ : densité d'énergie de St-Venant Kirchhoff
$a$	: $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ : réponse associée au premier tenseur de Piola-Kirchhoff
$A(u)$	: $A(u)(x) = a(x, \mathbf{1} + \nabla u(x))$ premier tenseur de Piola-Kirchhoff
$W$	: densité d'énergie ( $\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(x, F) = a_{ij}(x, F)$ pour tout $x \in \Omega, F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ )
$\tilde{W}$	: fonction utilisée pour définir la polyconvexité

**A.2.4 Notations relatives à la discrétisation et à l'image**

$\mathcal{U}$	: vecteur global des déplacements aux nœuds du maillage
$\mathcal{K}$	: matrice de raideur
$\mathcal{D}$	: matrice de direction
$\mathcal{F}$	: vecteur global des forces aux nœuds du maillage
$\mathcal{T}$	: maillage tétraédrique du domaine $\Omega$
$\mathcal{I}_r$	: image de référence
$\mathcal{I}_c$	: image cible
$\mathbf{T}$	: transformation spatiale





## Annexe B

# Éléments finis et maillage

### B.1 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a été introduite dans les années cinquante. La terminologie "éléments finis" est apparue en 1960 avec l'article de Clough [Clo60] portant sur l'élasticité linéaire en deux dimensions d'espace. Le livre [EG02] présente la méthode des éléments finis dans son ensemble : théorie, applications et mise en œuvre. Nous donnons ici les principes de base de la résolution numérique d'un problème variationnel par la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis consiste à chercher une approximation d'une solution d'un problème variationnelle. La résolution numérique d'un tel problème passe principalement par les étapes suivantes :

- analyse mathématique du problème
  - étude d'existence et d'unicité;
  - étude de convergence d'un algorithme de résolution.
- mise en œuvre
  - création d'un maillage;
  - choix d'un espace d'approximation (de dimension fini) de la solution;
  - assemblage et stockage des matrices composant le système approché;
  - résolution du système approché.

Notons que le domaine à mailler est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\Omega$  désigne le domaine à mailler et  $\mathcal{T}$  désigne le maillage de  $\Omega$ , alors  $\mathcal{T}$  vérifie les hypothèses suivantes :

- la réunion de tous les éléments du maillage  $\mathcal{T}$  coïncide avec  $\Omega$ ;
- l'intersection de deux éléments est soit
  - l'ensemble vide,
  - un sommet,
  - une arête,
  - une face (en 3D).

La création d'un maillage est œuvre de spécialiste. Un grand nombre de maillages est disponible sur le réseau. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé GHS3D : maillageur

tétraédrique dont le nom commercial est TetMesch. Quant au choix de l'espace d'approximation de la solution il est déterminé par la donnée d'une base d'un espace en général polynomial défini à partir du maillage et vérifiant la propriété d'unisolvance (voir [EG02], page 32). Les fonctions de base considérées dans cette thèse sont construites à partir des fonctions de base de l'espace des fonctions continues affines par morceaux (chaque élément de cette base prend la valeur 1 sur un seul nœud est 0 sur le reste du maillage) voir [Vin01] page 46. Le choix de l'espace d'approximation étant fait, on remplace les fonctions testes par les éléments de la base d'approximation de la solution. On obtient ainsi par quadrature numérique un système fini d'équations. On appelle assemblage la phase du calcul qui consiste à construire la matrice de rigidité et le second membre du système. Un bon stockage des matrices permet d'optimiser l'espace mémoire réservé au stockage. Une fois l'assemblage terminé, nous obtenons un système linéaire de la forme  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$  dont l'inconnu est  $U$ . Nous avons utilisé la bibliothèque d'algèbre linéaire PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific computation) développée au Argonne National Laboratory. Pour les techniques d'assemblage, stockage et résolution voir [EG02].

## B.2 Qualité d'un maillage

Nous partons d'un maillage de tétraèdres de bonne qualité généré par GHS3D comme entrée de la segmentation. Pendant le processus de déformation le maillage peut être abîmé ce qui peut être corrigé par le changement de certains paramètres physiques du problème ou de réduction du le pas de temps (un remaillage du domaine peut être aussi envisagé). La qualité d'un maillage est jugée satisfaisante s'il respecte des critères de qualité. Notre intérêt pour cette notion de qualité provient du fait que la précision de la solution d'un calcul par la méthode des éléments finis est directement liée à la qualité des éléments composant le maillage, support de calcul [BG96].

Un tétraèdre est un polyèdre ayant quatre faces triangulaires. Il est défini par un quadruplet, la liste orientée de ses quatre sommets notés  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , et coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$$S = (S_1, S_2, S_3, S_4).$$

Cette convention d'écriture permet d'une part de donner un sens aux faces de l'élément assurant ainsi l'orientation de leur normale et d'autre part de donner un signe à son volume,  $V_S$ . Le tétraèdre est orienté de telle sorte que  $V_S > 0$  dans le cas normal, et  $V_S < 0$  lorsque le tétraèdre s'inverse. Le volume d'un tétraèdre  $S$  est donné par

$$V_S = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La topologie du maillage n'est plus respectée lorsque des éléments s'inversent.

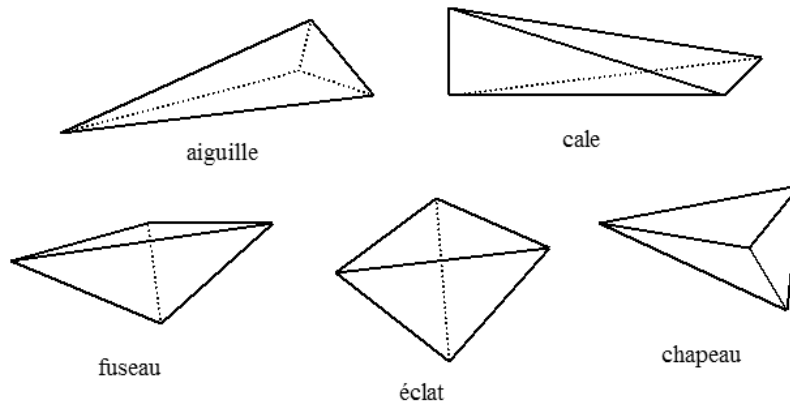


FIG. B.1 – Qualité géométrique d'un maillage : mauvais tétraèdres.

Il existe de nombreuses mesures de qualité géométrique d'un élément [BG96]. Pour un élément donné  $S$  donné nous avons choisi le critère suivant

$$Q_S = \gamma \frac{\rho}{h_{max}}, \text{ avec } \gamma = \sqrt{24} \text{ et } \rho = \frac{3 V_S}{A_S} \quad (\text{B.2})$$

où  $\rho$  est le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre  $S$ ,  $h_{max}$  la longueur de sa plus grande arête,  $A_S$  est l'aire totale des 4 faces du tétraèdre. Ce critère est bornée entre 0 et 1 ; plus l'élément est dégénéré, plus la valeur de  $Q_S$  s'approche de 0, alors qu'il vaut exactement 1 pour un tétraèdre régulier (un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les faces sont des triangles équilatéraux). La figure B.1 [Péq02] représente des tétraèdres de mauvaise qualité.

La qualité d'un maillage est liée à la qualité de ses éléments. Dans notre cas un maillage est de bonne qualité lorsque aucun élément n'est inversé et lorsque la mesure de la qualité géométrique du plus mauvais élément du maillage

$$Q_M = \max_{S \in \mathcal{T}} Q_S$$

est supérieure à un seuil de tolérance fixé.



# Bibliographie

- [AD89a] L. Axel and L. Dougherty. Heart wall motion : Improved method of spatial modulation of magnetization for MR imaging. *Radiology*, 172 :349–350, 1989.
- [AD89b] L. Axel and L. Dougherty. MR imaging of motion with spatial modulation of magnetization. *Radiology*, 171 :841–845, 1989.
- [Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. New York : Academic Press, 1975.
- [Ami94] Yali Amit. A nonlinear variational problem for image matching. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(1) :207–224, 1994.
- [Bal77] John M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 63(4) :337–403, 1976/77.
- [Ber77] Melvin S. Berger. *Nonlinearity and functional analysis*. New York : Academic Press, 1977. (Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis, Pure and Applied Mathematics).
- [BG96] Houman Borouchaki and Paul Louis George. Triangulation de Delaunay et métrique riemannienne. Applications aux maillages éléments finis. *Rev. Européenne Élé. Finis*, 5(3) :323–340, 1996.
- [BK89] R. Bajcsy and S. Kovacic. Multiresolution elastic matching. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46 :1–21, 1989.
- [Bor86] G. Borgefors. Distance transformation in digital images. *CVGIP : Image Understanding*, 48 :344–371, 1986.
- [BPP02] T.J. Baker, P. Pebay, and J. Pousin. Dynamic meshing for finite element based segmentation of cardiac imagery. In *WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, 2002.
- [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Paris : Masson, 1983.
- [Bro81] C. Broit. *Optimal registration of deformed images*. PhD thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1981.
- [Can86] Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8 :679–698, 1986.

- [CBK<sup>+</sup>00] P. Clarysse, C. Basset, L. Khouas, P. Croisille, D. Friboulet, C. Odet, and I. E. Magnin. 2D spatial and temporal displacement and deformation field fitting from cardiac MR tagging. *Medical Image Analysis*, 4(3) :253–268, 2000.
- [CCCD93] Vincent Caselles, Francine Catté, Tomeu Coll, and Françoise Dibos. A geometric model for active contours in image processing. *Numer. Math.*, 66(1) :1–31, 1993.
- [Cia82] Philippe G. Ciarlet. Two-dimensional approximations of three-dimensional models in nonlinear plate theory. In *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity (Bethlehem, Pa., 1980)*, pages 123–141, The Hague, 1982.
- [Cia88] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [CKS97] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.
- [Cla05] P. Clarysse. Analyse d’images cardiaques assistée par les modèles. *H.D.R. INSA Lyon-UCB Lyo1*, 2005.
- [Clo60] R.W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In *Proc. 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, volume 2573, Pittsburg, 1960. PA.
- [CM84] Michel Crouzeix and Alain L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Paris : Masson, 1984.
- [Coh97] L.D. Cohen. Modèles déformables. In *Actes de l’Ecole Thématique ISIS*, pages 1–20, Marly le Roy, 1997.
- [DBIP94] A. Desgrez, J. Bittoun, and I. Idy-Peretti. *Bases Physiques de l’IRM : Cahiers d’Imagerie par Résonance Magnétique*. Paris : Masson, 1994.
- [DCV82] M. Lanza De Cristoforis and T. Valent. On Neumann’s problem for a quasilinear differential system of the finite elastostatics type. local theorems of existence and uniqueness. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 68 :183–206 (1983), 1982.
- [DL72] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Paris : Dunod, 1972.
- [DL00] E. Délechelle and J. Lemoine. Trajectoire déformable : un modèle de variété active fondé sur le principe de Fermat. *Traitement du signal*, 1(17) :47–58, 2000.
- [DMZ96] X. Descombes, R. Morris, and J. Zerubia. Quelques améliorations à la segmentation d’images bayésienne. Rapport interne 2916, INRIA, Sophia-Antipolis, Juin 1996.

- [Dro90] J. Droux. *Simulation numérique bidimensionnelle de processus de solidification*. PhD thesis, EPFL, 1990.
- [Dyd03] I. Dydenko. *Segmentation dynamique en échocardiographie ultrasonore radiofréquence*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2003.
- [EG02] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*. Berlin : Springer, Berlin, 2002.
- [ET79] I. Ekeland and R. Temam. *Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy*. Moscow : Mir, 1979.
- [FMSH94] A. D. Fleming, W. N. McDicken, G. R. Sutherland, and P. R. Hoskins. Assessment of colour doppler tissue imaging using test-phantoms. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 20(9) :937–951, 1994.
- [Gee99] J. C. Gee. On matching brain volumes. *Pattern Recognition*, 31(1) :99–111, 1999.
- [Gei93] Bernhard Geiger. *Three-dimensional modeling of human organs and its application to diagnosis and surgical planning*. Thèse de doctorat en sciences, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1993.
- [Geo97] P. L. George. Improvements on Delaunay-based three-dimensional automatic mesh generator. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25 :297–317, 1997.
- [GHLBB97] J. G. Gee, D. R. Haynor, L. Le Briquer, and R. K. Bajcsy. Advances in elastic matching theory and its implementation. In Trocaz, editor, *Lecture Notes In computer Sciences : CVRMed.*, pages 63–72, 1997.
- [GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Berlin : Springer-Verlag, 1983.
- [GU96] G. J. Grevera and J. K. Udupa. Shape-based interpolation of multidimensional grey-level images. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 15(6) :881–892, December 1996.
- [GU98] G. Grevera and J. Udupa. An objective comparison of 3-D image interpolation methods. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 17(4) :642–652, 1998.
- [Hou90] Y. Houdas. *Physiologie Cardio-Vasculaire*. Paris : Vigot, 1990.
- [Jan98] M. Janier. *Etude de la perfusion et du métabolisme myocardiques par la TEP et l'IRM. Fondements méthodologiques et application à l'ischémie*. PhD thesis, Université Claude Bernard, 1998.
- [KWT87] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *Int. J. Comput. Vision*, 1(4) :321–331, 1987.
- [MCV<sup>+</sup>97] F. Maes, A. Collingnon, D. Vandermeulen, G. Marchal, and P. Suetens. Multimodality image registration by maximization of mutual information. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 16(2) :187–198, 1997.

- [MIT96] T. Mc Inerney and D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis : a survey. *Medical Image Analysis*, 1(2) :91–108, 1996.
- [Mon99] J. Montagnat. *Modèles déformables pour la segmentation et la modélisation d'images médicales 3D et 4D*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1999.
- [MSMG92] W. N. McDiken, G. R. Sutherland, C. M. Moran, and L. N. Gordon. Colour doppler imaging of the myocardium. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 18 :651–654, 1992.
- [MV98] J. B. A. Maintz and M. A. Viergever. A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis*, 2(1) :1–36, 1998.
- [Neč67] Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Paris : Masson et Cie, 1967.
- [OMH<sup>+</sup>95] W. G. O'Dell, C. C. Moore, W. C. Hunter, E. A. Zerhouni, and E. R. McVeigh. Three-dimensional myocardial deformations : calculation with displacement field fitting to tagged MR images. *Radiology*, 195(3) :829–835, 1995.
- [OS88] Stanley Osher and James A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1) :12–49, 1988.
- [Pha02] Q.C. Pham. *Segmentation et mise en correspondance en imagerie cardiaque multimodale conduites par un modèle anatomique bi-cavités du coeur*. PhD thesis, INPG, 2002.
- [PMA96] J. Park, D. Metaxas, and L. Axel. Analysis of left ventricular wall motion based on volumetric deformable models and MRI-SPAMM. *Medical Image Analysis*, 1(1) :53–71, 1996.
- [PMV00] J. Pluim, J.B. Maintz, and M.A. Viergever. Image registration by maximization of combined mutual information and gradient information. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(8) :809–814, 2000.
- [Péq02] J. Péquignot. Optimisation géométrique locale de maillages tétraédriques, rapport de DEA,. Technical report, INRIA Sophia-Antipolis, projets Epidaure-Sinus, 2002.
- [PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C : The art of scientific computing 2nd Edition*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [PVC<sup>+</sup>01] Q.-C. Pham, F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin. A FEM-based deformable model for the 3D segmentation and tracking of the heart in cardiac MRI. In *2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2001)*, Pula, Croatia, volume 1, pages 250–254, 2001.



- [Rüe97] D. Rüeckert. *Segmentation and tracking in cardiovascular MR images using geometrically deformable models and templates*. Phd thesis, University of London, 1997.
- [Ric00] F. Richard. *Modèles élastiques d'ajustement d'images et applications aux paires bilatérales et temporelles de mammographies*. PhD thesis, Université René descartes Paris V, 2000.
- [RWC95] R. Rabbitt, J. Weiss, and G. Christensen. Mapping of hyper-elastic deformable templates using the finite element method. In *Proceedings of SPIE*, volume 2573 of *International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation*, pages 252–265, San Diego, CA, USA, 1995.
- [Sar00] D. Sarrut. *Recalage multimodal et plate-forme d'imagerie médicale à accès distant*. PhD thesis, Université L. Lumière Lyon 2, 2000.
- [SCD<sup>+</sup>01] M. Sermesant, Y. Coudière, H. Delingette, N. Ayache, and J.A. Désidéri. An electro-mechanical model of the heart for cardiac image analysis. In W.J. Niessen and M.A. Viergever, editors, *4th Int. Conf. on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'01)*, volume 2208 of *LNCS*, pages 224–231, Utrecht, The Netherlands, October 2001.
- [Set99] J. A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [SFP<sup>+</sup>03] M. Sermesant, C. Forest, X. Pennec, H. Delingette, and N. Ayache. Deformable biomechanical models : Application to 4D cardiac image analysis. *Medical Image Analysis*, 7(4) :475–488, December 2003.
- [SRC<sup>+</sup>05] J Schaerer, Y Rouchdy, P Clarysse, B Hiba, P Croisille, J Pousin, and IE Magnin. Simultaneous segmentation of the left and right heart ventricles in 3D cine MR images of small animals. In *Proceedings of the conference on Computers in Cardiology*, pages 231–234, Lyon, 2005.
- [ST94a] T. Saito and J.-I. Toriwaki. New algorithms for euclidean distance transformation of an n-dimensional digitized picture with applications. *Pattern Recognition*, 27(11) :1551–1565, 1994.
- [ST94b] T. Saito and T.I. Toriwaki. New algorithm for euclidean distance transformation of an n-dimensional digitized picture with applications. *Pattern recognition*, 27 :1551–1565, 1994.
- [Sto94] G. Storvik. A bayesian approach to dynamic contours through stochastic sampling and simulated annealing. In *IEEE Transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence*, volume 16 of 10, pages 976–986. PA, 1994.
- [TD85] L. Tabár and P. Dean. *Teaching atlas of mammography*. Thieme Inc., Stuttgart New York, 1985.

- [TIG95] A. Travade, A. Isnard, and H. Guimbergues. *Imagerie de la pathologie mammaire*. Paris : Masson (Coll. Abrégés), 1995.
- [TW35] R. Tennant and C. J. Wiggers. The effect of coronary occlusion on myocardial contraction. *American Journal Physiology*, 112 :351–361, 1935.
- [Val77] G. Valent, T. Zampieri. Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi lineari. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 57 :311–322, 1977.
- [Val79] T. Valent. Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 60 :165–181, 1979.
- [Val82] T. Valent. Local existence and uniqueness theorems in finite elastostatics. In *Proceedings of the IUTAM/ISIMM Symposium on finite elasticity*, Adv. Ser. Nonlinear Dynam., pages 392–398, the Hague, 1982.
- [Vin01] F. Vincent. *Gabarits déformables élastiques pour la segmentation et le suivi de mouvement du cœur en Imagerie par Résonance Magnétique*. PhD thesis, INSA, 2001.
- [XP98] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. Image Proc.*, 7(3) :359–369, March 1998.
- [ZPRY88] E. Zerhouni, D. Parish, W. Roger, and A. Yang. Human heart tagging with MR imaging - a method for non invasive assessment of myocardial motion. *Radiology*, 169 :59–63, 1988.