Techniques d'intervalles pour la résolution de systèmes d'équations

Thèse du projet COPRIN, INRIA

Gilles Chabert

19 Janvier 2007

Plan de la soutenance

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1, 2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{ll} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f, [1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1, 2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{aligned} x &\in [1, 2] \\ x^2 &\in [1, 4] \\ x^2 - x &\in [-1, 3] \end{aligned}$$

$$image(f, [1, 2]) = [0, 2] \subseteq [-1, 3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1,2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{ll} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f,[1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1,2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{ll} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f,[1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1, 2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{rl} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f, [1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1,2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{ll} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f,[1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1,2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{rl} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f,[1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1,2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{rl} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f,[1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1,2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

$$\begin{array}{cl} x & \in [1,2] \\ x^2 & \in [1,4] \\ x^2 - x & \in [-1,3] \end{array}$$

$$image(f,[1,2]) = [0,2] \subseteq [-1,3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

Les techniques d'intervalles

Qu'est ce que l'arithmétique d'intervalles?

Question: si $x \in [1, 2]$ comment varie $f(x) = x^2 - x$?

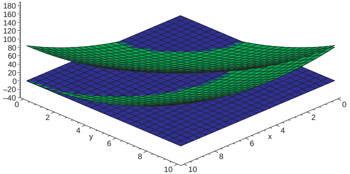
$$\begin{array}{cl} x & \in [1, 2] \\ x^2 & \in [1, 4] \\ x^2 - x & \in [-1, 3] \end{array}$$

$$image(f, [1, 2]) = [0, 2] \subseteq [-1, 3]$$

Qu'est ce que les intervalles peuvent représenter?

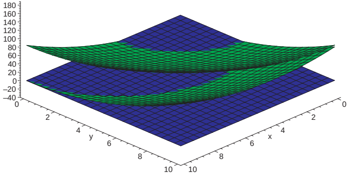
- domaines des variables
- erreurs numériques
- incertitudes liées au modèle

boîte initiale $[x] = [0, 10] \times [0, 10]$



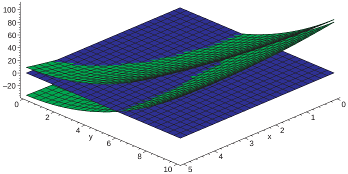
$\mathbf{f}([x]) = [-16, 184], [-36, 100]$

boîte initiale $[x] = [0, 10] \times [0, 10]$



$\mathbf{f}([x]) = [-16, 184], [-36, 100]$

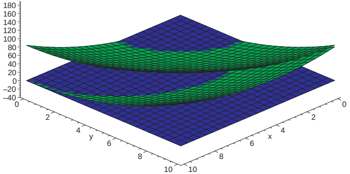
$[x] = [0, 5] \times [0, 10]$



$\mathbf{f}([x]) = [-16, 109], [-36, 100]$

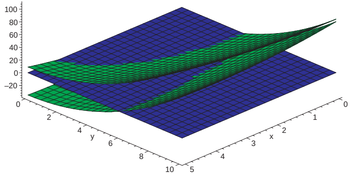
Méthode d'évaluation/bissection

boîte initiale $[x] = [0, 10] \times [0, 10]$



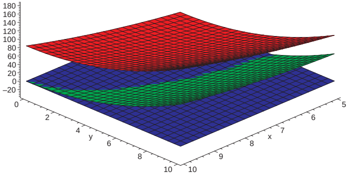
$\mathbf{f}([x]) = [-16, 184], [-36, 100]$

$[x] = [0, 5] \times [0, 10]$



$\mathbf{f}([x]) = [-16, 109], [-36, 100]$

$[x] = [5, 10] \times [0, 10]$



$\mathbf{f}([x]) = [9, 184], [-35, 100]$

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 0$

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

$$(\exists a \in [a]) \quad ax = b \; \textbf{?}$$

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

$$(\exists a \in [a]) \quad ax = b \; \mathbf{?}$$

$$x \in b/[a]$$

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 0$
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

$$(\exists a \in [a]) \quad ax = b \ \textbf{?}$$

$$x \in b/[a]$$

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 0$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

$$(\exists A \in [A]) \quad Ax = b \text{ ?}$$

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 0$
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

$$(\exists A \in [A]) \quad Ax = b \; \textbf{?}$$

Problème: inversion d'une matrice intervalle...

Filtrage (analyse par intervalles)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 0$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad f(x) = 0$

Système linéaire avec paramètre intervalle

$$(\exists A \in [A]) \quad Ax = b \,\textbf{?}$$

Problème: inversion d'une matrice intervalle...

$\rightsquigarrow$ Méthodes numériques particulières

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\leadsto$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\leadsto$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Système linéaire intervalle

$$\exists A \in [A] \quad Ax = b$$

- Une approximation extérieure des solutions suffit
  $\rightsquigarrow$ pas de bissection/évaluation
- Nécessité de préconditionner $[A]$

Méthodes intervalles

- Gauss-Seidel
- Élimination de Gauss
- Krawczyk
- Hansen-Bliek

Outline

Filtrage

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

Filtrage

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

Système linéaire à paramètres intervalles

$$(\exists A \in [A])\,(\exists b \in [b]) \quad Ax = b$$

Filtrage

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

Système linéaire à paramètres intervalles

$$\big(\exists A \in [A]\big)\big(\exists b \in [b]\big) \quad Ax = b$$

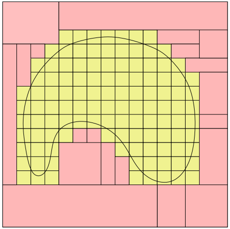
$\rightsquigarrow$ mêmes méthodes numériques

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x, u) = 0$$

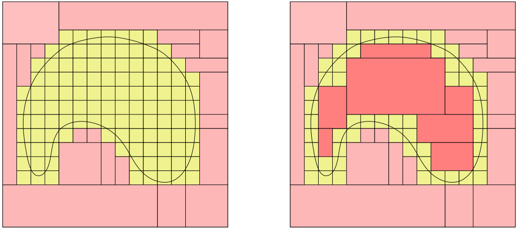
Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x, u) = 0$$



Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$



Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x, u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  - $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$

  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$

  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x, u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x, u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)
- $Dim(u) = dim(f)$

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)
- $Dim(u) = dim(f)$
  $\rightsquigarrow$ Permutation variable-paramètre

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)
- $Dim(u) = dim(f)$
  $\rightsquigarrow$ Permutation variable-paramètre
- f polynomial de faible dimension

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)
- $Dim(u) = dim(f)$
  $\rightsquigarrow$ Permutation variable-paramètre
- f polynomial de faible dimension
  $\rightsquigarrow$ Élimination de quantificateurs

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)
- $Dim(u) = dim(f)$
  $\rightsquigarrow$ Permutation variable-paramètre
- f polynomial de faible dimension
  $\rightsquigarrow$ Élimination de quantificateurs
- Cas général

Détection de boîtes intérieures

$$\exists u \in [u] \quad f(x,u) = 0$$

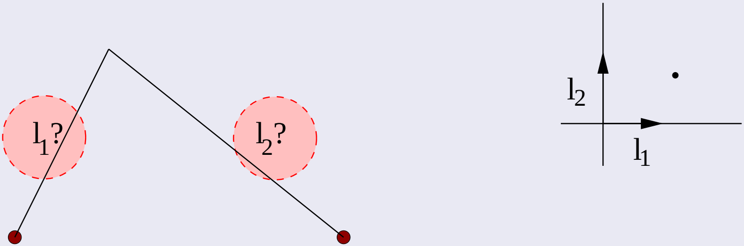
- $Dim(f) = 1$
  $\rightsquigarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires
- $f(x,u) = 0 \iff u = \phi(x)$
  $\rightsquigarrow$ Test d'inclusion, négation du problème
- Une seule occurrence de u_i
  $\rightsquigarrow$ Intervalles modaux (et généralisés)
- $Dim(u) = dim(f)$
  $\rightsquigarrow$ Permutation variable-paramètre
- f polynomial de faible dimension
  $\rightsquigarrow$ Élimination de quantificateurs
- Cas général
  $\rightsquigarrow$Détection de frontière

Outline

Exemple de AE-système

$$f(l) = 0$$

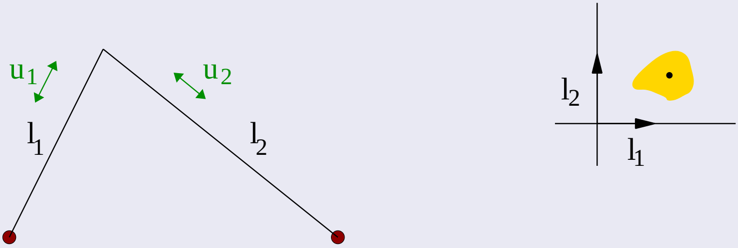
Exemple du robot parallèle 2D



Exemple de AE-système

$$\exists u \in [u] \quad f(l, u) = 0$$

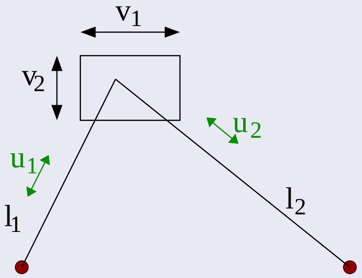
Exemple du robot parallèle 2D

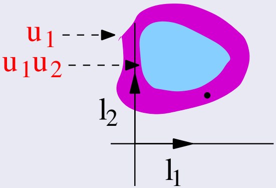


Exemple de AE-système

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(l, u, v) = 0$$

Exemple du robot parallèle 2D

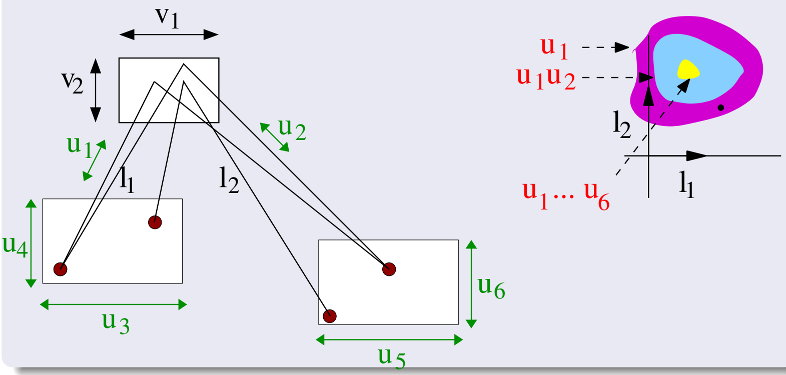




Exemple de AE-système

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(l, u, v) = 0$$

Exemple du robot parallèle 2D



$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

Filtrage

Cas linéaire

Bissection

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

Filtrage

Cas linéaire

Bissection

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

Cas linéaire

Bissection

Méthodes

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

Cas linéaire

Bissection

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

- Newton Généralisé

Cas linéaire

Bissection

Méthodes

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

- Newton Généralisé

Systèmes linéaires quantifié

$$\big(\exists A \in [A]\big)\big(Qb \in [b]\big) \quad Ax = b \; \textbf{?}$$

Cas linéaire

Bissection

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

- Newton Généralisé

Systèmes linéaires quantifié

$$(\exists A \in [A])(Qb \in [b]) \quad Ax = b \; \mathbf{?}$$

Cas linéaire

Bissection

Méthodes

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

- Newton Généralisé

Systèmes linéaires quantifié

$$(\exists A \in [A])\,(Qb \in [b]) \quad Ax = b \,\textbf{?}$$

Cas linéaire

- Méthodes de Shary

Bissection

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

- Newton Généralisé

Systèmes linéaires quantifié

$$(\exists A \in [A])\,(Qb \in [b]) \quad Ax = b\ \textbf{?}$$

Cas linéaire

- Méthodes de Shary

Bissection

Méthodes

$$\forall u \in [u] \quad \exists v \in [v] \quad f(x, u, v) = 0$$

Détection de boîtes intérieures

- Même chose que pour les systèmes paramétrés

Filtrage

- Newton Généralisé

Systèmes linéaires quantifié

$$(\exists A \in [A])\,(Qb \in [b]) \quad Ax = b \; \textbf{?}$$

Cas linéaire

- Méthodes de Shary

Bissection

- Problème de *double boucle*

Plan de la soutenance

Outline

$$x \in \Sigma(I \pm \Delta, b \pm \delta)$$

Oettli-Prager

$$(I - \Delta Q)x \leq b + \delta$$
$$(I + \Delta Q)x \geq b - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

Hansen-Bliek

$$(I - \Delta)Qx \leq Qb + \delta$$
$$(I + \Delta)Qx \geq Qb - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

Introduction

$$x \in \Sigma(I \pm \Delta, b \pm \delta)$$

Oettli-Prager

$$(I - \Delta Q)x \leq b + \delta$$
$$(I + \Delta Q)x \geq b - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

Hansen-Bliek

$$(I - \Delta)Qx \leq Qb + \delta$$
$$(I + \Delta)Qx \geq Qb - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

Introduction

$$x \in \Sigma(I \pm \Delta, b \pm \delta)$$

Oettli-Prager

$$(I - \Delta Q)x \leq b + \delta$$
$$(I + \Delta Q)x \geq b - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

Hansen-Bliek

$$(I - \Delta)Qx \leq Qb + \delta$$
$$(I + \Delta)Qx \geq Qb - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

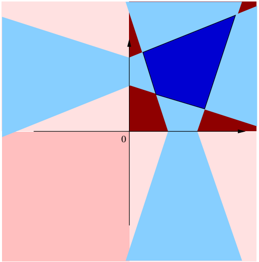
$$x \in \Sigma(I \pm \Delta, b \pm \delta)$$

Oettli-Prager

$$(I - \Delta Q)x \leq b + \delta$$
$$(I + \Delta Q)x \geq b - \delta$$
$$Qx \geq 0$$

Hansen-Bliek

$$(I - \Delta)Qx \leq Qb + \delta$$
$$(I + \Delta)Qx \geq Qb - \delta$$
$$Qx \geq 0$$



$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Identifier formellement un optimum local

$$(I-\Delta)|x| \leq Qb+\delta \Longrightarrow |x| \leq (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

$$|x_Q| := (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

En déduire un optimum global

Identifier formellement un optimum local

$$(I-\Delta)|x| \leq Qb+\delta \Longrightarrow |x| \leq (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

$$|x_Q| := (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

En déduire un optimum global

Maximisation de $|x_k|$ (cas classique)

Identifier formellement un optimum local

$$(I - \Delta)|x| \leq Qb + \delta \Longrightarrow |x| \leq (I - \Delta)^{-1}(Qb + \delta)$$

$$|x_Q| := (I - \Delta)^{-1}(Qb + \delta)$$

En déduire un optimum global

Maximisation de $|x_k|$ (cas classique)

Identifier formellement un optimum local

$$(I-\Delta)|x| \leq Qb+\delta \Longrightarrow |x| \leq (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

$$|x_Q| := (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

En déduire un optimum global

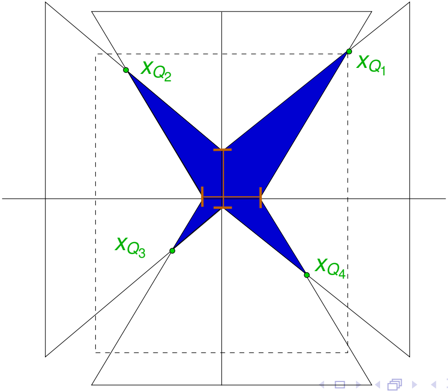
Maximisation de $|x_k|$ (cas classique)

Identifier formellement un optimum local

$$(I-\Delta)|x| \leq Qb+\delta \Longrightarrow |x| \leq (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

$$|x_Q| := (I-\Delta)^{-1}(Qb+\delta)$$

En déduire un optimum global



Minimisation de $|x_k|$ (cas classique)

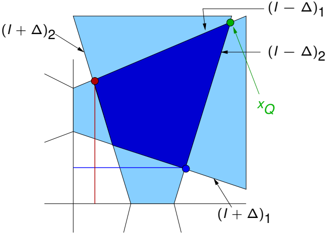
Plus complexe...

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I-\Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow y \in \Sigma \cap Q$

Minimisation de $|x_k|$ (cas classique)

Plus complexe...

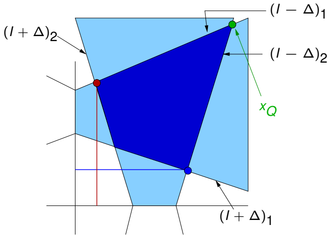


Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow y \in \Sigma \cap Q$

Minimisation de $|x_k|$ (cas classique)

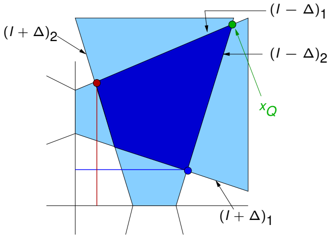
Plus complexe...



Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I-\Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow y \in \Sigma \cap Q$

Plus complexe...

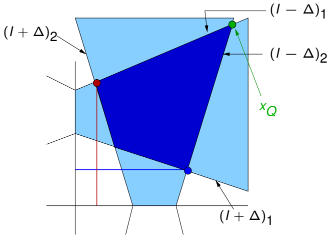


Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I-\Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow y \in \Sigma \cap Q$

Minimisation de $|x_k|$ (cas classique)

Plus complexe...

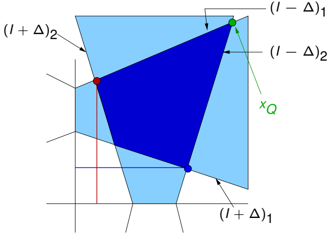


Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \implies y \in \Sigma \cap Q$

Minimisation de $|x_k|$ (cas classique)

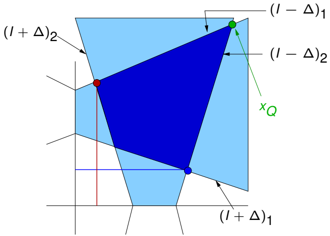
Plus complexe...



Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I-\Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow y \in \Sigma \cap Q$

Plus complexe...



Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier n hyperplans $\longrightarrow$ soit y leur intersection.
- Calculer formellement $|y_k|$ en fonction de $(I-\Delta)^{-1}$
- Borne? $\forall x \in \Sigma \cap Q, |x_k| \geq |y_k|$
- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow y \in \Sigma \cap Q$

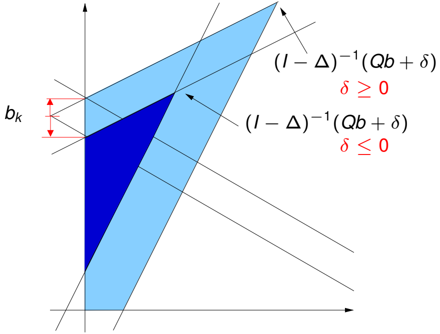
$[b]$ quantifié $\longrightarrow \delta$ peut avoir des composantes négatives

Étude locale

- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow x_Q \in \Sigma \cap Q$

Maximisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

$[b]$ quantifié $\longrightarrow$ δ peut avoir des composantes négatives

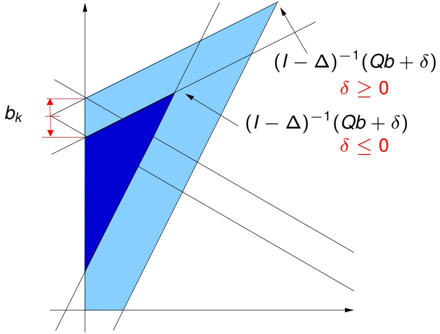


Étude locale

- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow x_Q \in \Sigma \cap Q$

Maximisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

$[b]$ quantifié $\longrightarrow$ δ peut avoir des composantes négatives



Étude locale

- Optimalité, localité? $\Sigma \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow x_Q \in \Sigma \cap Q$

Introduction
Analyse par intervalles
Méthode de Hansen-Bliek généralisé
Décomposition LU généralisée
Intervalles modaux
Programmation par contraintes
Conclusion

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier les candidats (n hyperplans = 1 candidat)
- Éliminer les singularités
- Résultats formellement en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier les candidats (n hyperplans = 1 candidat)
- Éliminer les singularités
- Résultats formellement en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier les candidats (n hyperplans = 1 candidat)
- Éliminer les singularités
- Résultats formellement en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier les candidats (n hyperplans = 1 candidat)
- Éliminer les singularités
- Résultats formellement en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier les candidats (n hyperplans = 1 candidat)
- Éliminer les singularités
- Résultats formellement en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (pour un quadrant Q)

- Identifier les candidats (n hyperplans = 1 candidat)
- Éliminer les singularités
- Résultats formellement en fonction de $(I - \Delta)^{-1}$

droite support		
	$(I-\Delta)_k$	x_Q
$(I-\Delta)_1$	$(I+\Delta)_1$	$y^{(k,1)}$
$\vdots$	$\vdots$	
??	$(I+\Delta)_n$	$y^{(k,n)}$
$\vdots$	I_1	$z^{(k,1)}$
	$\vdots$	
$(I-\Delta)_n$	I_n	$z^{(k,n)}$

$2n+1$ possibilités...

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (suite)

- Vérifier que chaque candidat est bien une borne
- Sélectionner l'optimum parmi les candidats
- Optimalité, localité?

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (suite)

- Vérifier que chaque candidat est bien une borne
- Sélectionner l'optimum parmi les candidats
- Optimalité, localité?

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (suite)

- Vérifier que chaque candidat est bien une borne
- Sélectionner l'optimum parmi les candidats
- Optimalité, localité?

Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (suite)

- Vérifier que chaque candidat est bien une borne
- Sélectionner l'optimum parmi les candidats
- Optimalité, localité?

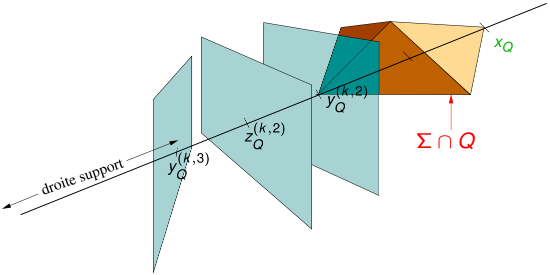
Minimisation de $|x_k|$ (cas généralisé)

Étude locale (suite)

- Vérifier que chaque candidat est bien une borne
- Sélectionner l'optimum parmi les candidats
- Optimalité, localité?

Étude locale (suite)

- Vérifier que chaque candidat est bien une borne
- Sélectionner l'optimum parmi les candidats
- Optimalité, localité?



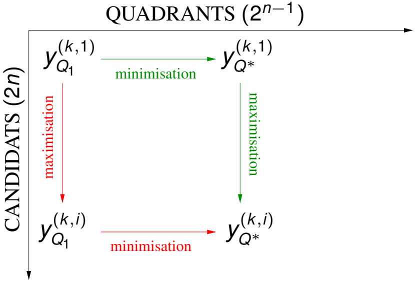
Étude globale (cas généralisé)

- **Propriété Min-max**

Étude globale (cas généralisé)

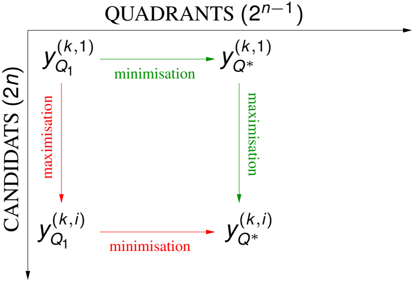
Introduction
Analyse par intervalles
Méthode de Hansen-Bliek généralisé
Décomposition LU généralisée
Intervalles modaux
Programmation par contraintes
Conclusion

- **Propriété Min-max**



Étude globale (cas généralisé)

- **Propriété Min-max**



Sur un demi-espace (e.g., $x_k \geq 0$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{x_k} \longrightarrow x_Q \\ \underline{x_k} \longrightarrow \text{candidat maximisant } x_k \text{ sur } Q^* \end{array}}$$

Étude globale (cas généralisé)

- **Propriété Min-max**

QUADRANTS (2^{n-1})

CANDIDATS ($2n$)

$$\begin{tikzcd}
y_{Q_1}^{(k,1)} \arrow[r, "\text{minimisation}"'] \arrow[d, "\text{maximisation}"'] & y_{Q^*}^{(k,1)} \arrow[d, "\text{maximisation}"] \\
y_{Q_1}^{(k,i)} \arrow[r, "\text{minimisation}"'] & y_{Q^*}^{(k,i)}
\end{tikzcd}$$

Sur un demi-espace (e.g., $x_k \geq 0$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{x_k} \longrightarrow x_Q \\ \underline{x_k} \longrightarrow \text{candidat maximisant } x_k \text{ sur } Q^* \end{array}}$$

- **Existence de solutions**

$$\overline{x_k} \geq \underline{x_k} \Longrightarrow \text{existe solution } x \text{ telle que } x_k \geq 0 \text{ ?}$$

Première expérimentation

Surface initiale $[l_1] \times [l_2]$	$36cm^2$
Surface de tolérance	$16cm^2$
Amplitude des perturbations	$1cm$
Précision du pavage	$0.01cm$

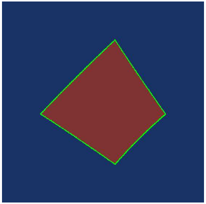


Image avec perturbations u_1 et u_2.

Résultats numériques

Perturbations	Newton	Test intérieur	+ Newton généralisé
$\emptyset$	132.67s	1.30s	1.30s
$[u_1]$	-	3.34s	2.57s
$[u_1]\dots[u_3]$	-	13.4s	8.32s
$[u_1]\dots[u_6]$	-	867.37s	55.42s

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Intervalles généralisés

- Les bornes peuvent être inversées $[0, 1]$ $[1, 0]$
- Nouvelle inclusion $[1, 5] \subseteq [4, 2] \subseteq [3, 3] \subseteq [2, 4]$
- Propriétés de groupe pour les opérateurs

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Intervalles généralisés

- Les bornes peuvent être inversées $[0, 1]$ $[1, 0]$
- Nouvelle inclusion $[1, 5] \subseteq [4, 2] \subseteq [3, 3] \subseteq [2, 4]$
- Propriétés de groupe pour les opérateurs

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Intervalles généralisés

- Les bornes peuvent être inversées $[0, 1]$ $[1, 0]$
- Nouvelle inclusion $[1, 5] \subseteq [4, 2] \subseteq [3, 3] \subseteq [2, 4]$
- Propriétés de groupe pour les opérateurs

Décomposition LU généralisée

- Décomposition LU classique

$$A = LU$$

- Décomposition LU intervalle

$$[A] \subseteq [L][U]$$

- Décomposition LU généralisée

$$[A] = [L][U]$$

Intervalles généralisés

- Les bornes peuvent être inversées $[0, 1]$ $[1, 0]$
- Nouvelle inclusion $[1, 5] \subseteq [4, 2] \subseteq [3, 3] \subseteq [2, 4]$
- Propriétés de groupe pour les opérateurs

Outline

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\leadsto$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall)$ $\subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Intervalles modaux

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Intervalles modaux

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Lien entre intervalles modaux et généralisés

L'arithmétique des intervalles
permet de calculer
une extension aux intervalles

Intervalles modaux

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Lien entre intervalles modaux et généralisés

L'arithmétique des intervalles **généralisés**
permet de calculer
une extension aux intervalles

Intervalles modaux

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\rightsquigarrow$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Lien entre intervalles modaux et généralisés

L'arithmétique des intervalles	**généralisés**
permet de calculer	**dans certains cas**
une extension aux intervalles	

Intervalles modaux

Théories existantes

- Nouvelle structure algébrique $(x, \exists), (x, \forall) \subseteq$
- Notion d'extension d'une fonction aux intervalles modaux
- Opérations *meet* $\bigvee$ et *join* $\bigwedge$
  $\leadsto$ extension optimale, ou fonction sémantique f^*
- Les théorèmes établissent surtout les propriétés de cette extension par rapport à l'inclusion

Lien entre intervalles modaux et généralisés

L'arithmétique des intervalles	**généralisés**
permet de calculer	**dans certains cas**
une extension aux intervalles	**modaux**

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)

- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

Intervalles modaux

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

Intervalles modaux

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\leadsto$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

Intervalles modaux

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\rightsquigarrow$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

Intervalles modaux

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\rightsquigarrow$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

image quantifiée $\{z \mid \forall x \in [x] \quad \exists y \in [y] \quad z = x + y\}$

Intervalles modaux

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\rightsquigarrow$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

image quantifiée $\qquad \{z \mid \forall x \in [x] \quad \exists y \in [y] \quad z = x + y\}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

Intervalles modaux

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\rightsquigarrow$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

image quantifiée	$\{z \mid \forall x \in [x] \quad \exists y \in [y] \quad z = x + y\}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
min-max	$[\max_{x\in\mathbf{x}} \min_{y\in\mathbf{y}} f(x,y), \min_{x\in\mathbf{x}} \max_{y\in\mathbf{y}} f(x,y)]$

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\rightsquigarrow$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

image quantifiée $\quad \{z \mid \forall x \in [x] \quad \exists y \in [y] \quad z = x + y\}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

min-max $\quad [\max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y)]$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

Notre reformulation

- Identifier les objets que l'on **doit et peut calculer** (pour la résolution de AE-systèmes)
  $\rightsquigarrow$ notion d'*image quantifiée*:
- Montrer **comment calculer** de tels objets:

Schéma

image quantifiée	$\{z \mid \forall x \in [x] \quad \exists y \in [y] \quad z = x + y\}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
min-max	$[\max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x,y), \min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x,y)]$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
intervalles généralisé	$[x] + (\text{dual } [y])$

Plan de la soutenance

Outline

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Un exemple en domaine discret

9	?	5	1	2	6	3	?	?
?	6	?	?	?	4	?	5	2
2	?	7	8	?	?	?	?	?
4	1	?	?	5	?	?	?	?
?	?	?	9	?	8	?	?	?
?	?	?	?	4	?	?	8	3
?	?	?	?	?	?	6	?	4
7	2	?	4	?	?	?	1	?
?	?	4	5	3	1	7	?	9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Introduction
Analyse par intervalles
Programmation par contraintes
Introduction
Unions d'intervalles
Conclusion

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5		1 2 3 4 5 6 7 8 9		
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Les CSP

Un exemple en domaine discret

9		5	1	2	6	3		
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5				
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

- Variables
- Domaines
- Contraintes
- Filtrage

En domaine continu:

- Avantage : pas de limite aux conditions d'application des algorithmes
- Inconvénient : peu de propriétés mathématiques exploitées

Cohérences partielles

Un exemple en domaine discret

9	4 7 8	5	1	2	6	3	4 7	7 8
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5			2 6 7 8	
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

A partir d'un état "bloque"

- Instanciation de valeurs
- Projection de contrainte
- Propagation

Cohérences partielles

Un exemple en domaine discret

9	4?	5	1	2	6	3	4 7	7 8
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5			2 6 7 8	
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

A partir d'un état “bloque”

- Instanciation de valeurs
- Projection de contrainte
- Propagation

Un exemple en domaine discret

9	**4?**	5	1	2	6	3	~~4~~ 7	7 8
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5			2 6 7 8	
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

A partir d'un état “bloque”

- Instanciation de valeurs
- Projection de contrainte
- Propagation

Cohérences partielles

Un exemple en domaine discret

9	4?	5	1	2	6	3	~~4~~ 7	~~7~~ 8
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5			2 6 ~~7~~ 8	
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

A partir d'un état "bloque"

- Instanciation de valeurs
- Projection de contrainte
- Propagation

Cohérences partielles

Un exemple en domaine discret

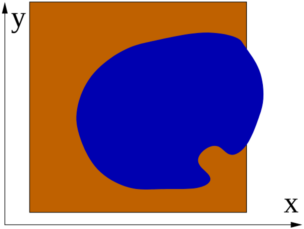
9	4?	5	1	2	6	3	~~4~~ 7	~~7~~ 8
	6				4		5	2
2		7	8					
4	1			5			2 6 ~~7~~ 8	
			9		8			
				4			8	3
						6		4
7	2		4				1	
		4	5	3	1	7		9

A partir d'un état "bloque"

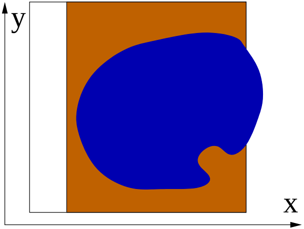
- Instanciation de valeurs
- Projection de contrainte
- Propagation

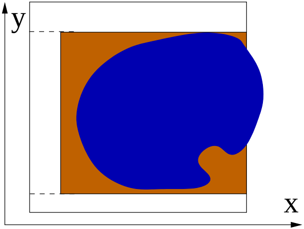
Recherche arborescente:
Point de choix + filtrage jusqu'à l'obtention d'une solution ou d'une incohérence

Projection en domaine continu

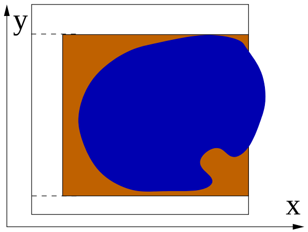


Projection en domaine continu

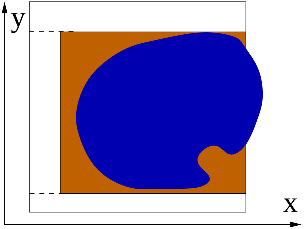



y
x

Projection en domaine continu



Utilisation de la forme symbolique

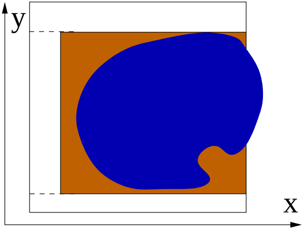


Utilisation de la forme symbolique

Exemple

$$(x+y)^2 = \sin(x+y)$$

Projection en domaine continu



Utilisation de la forme symbolique

Exemple

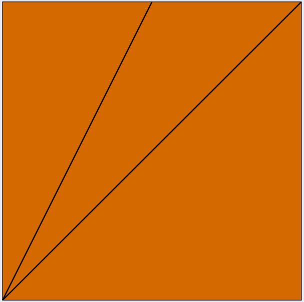
$$(x+y)^2 = \sin(x+y)$$

$\rightsquigarrow$ Calcul:

$$[x] \leftarrow \pm\sqrt{\sin([x]+[y])} - [y] \cap [x]$$

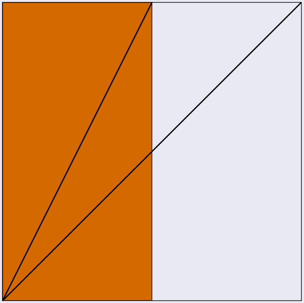
Propriétés de l'arc-cohérence

Problème de convergence

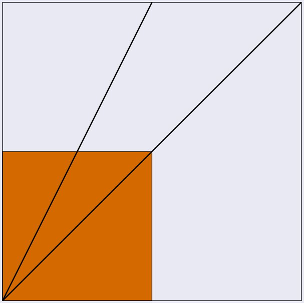


Introduction
Analyse par intervalles
Programmation par contraintes
Introduction
Unions d'intervalles
Conclusion

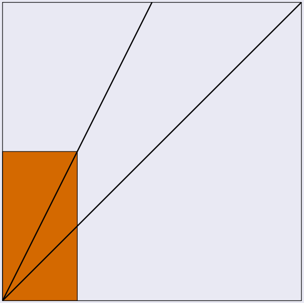
Problème de convergence



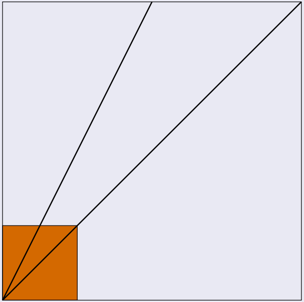
Problème de convergence



Problème de convergence

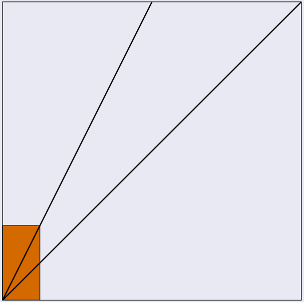


Problème de convergence

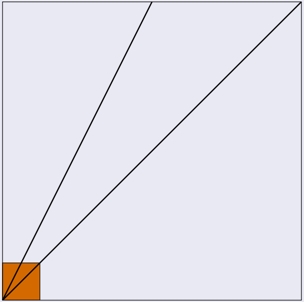


Propriétés de l'arc-cohérence

Problème de convergence

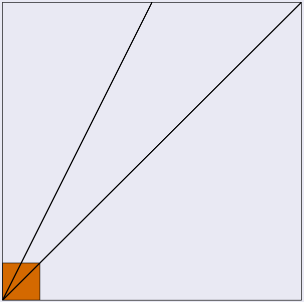


Problème de convergence



Propriétés de l'arc-cohérence

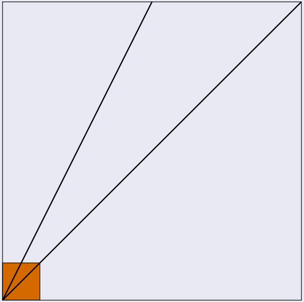
Problème de convergence



- Se traduit en pratique par un problème de complexité en temps
- Se résout par l'introduction d'un critère d'arrêt prématuré (*gain* $< w$)
- Nouvelle proposition dans le cadre la thèse ("flottants virtuels")

Propriétés de l'arc-cohérence

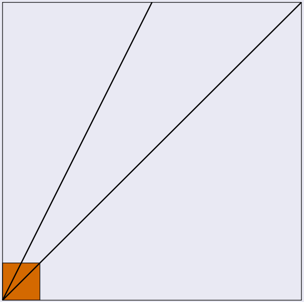
Problème de convergence



- Se traduit en pratique par un problème de complexité en temps
- Se résout par l'introduction d'un critère d'arrêt prématuré (*gain* $< w$)
- Nouvelle proposition dans le cadre la thèse ("flottants virtuels")

Propriétés de l'arc-cohérence

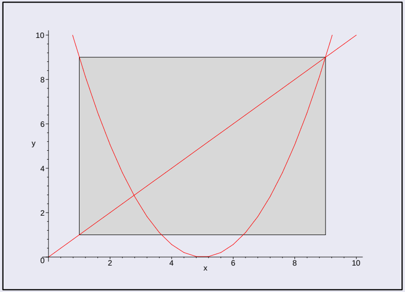
Problème de convergence



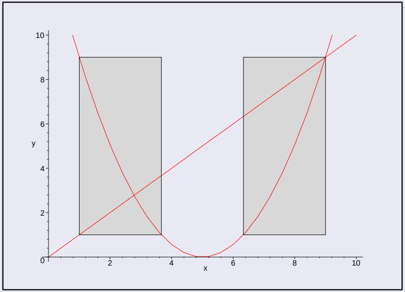
- Se traduit en pratique par un problème de complexité en temps
- Se résout par l'introduction d'un critère d'arrêt prématuré ($gain < w$)
- Nouvelle proposition dans le cadre la thèse ("flottants virtuels")

Propriétés de l'arc-cohérence

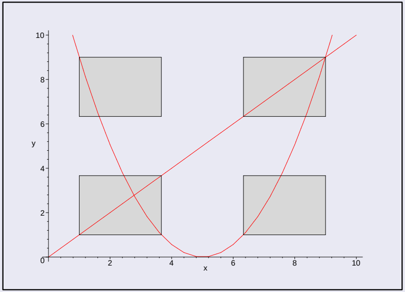
Problème de calculabilité



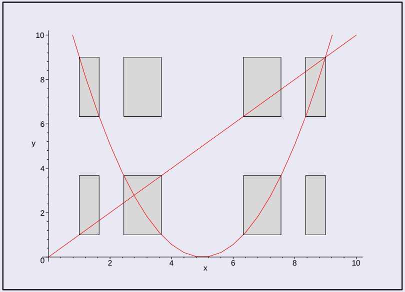
Problème de calculabilité



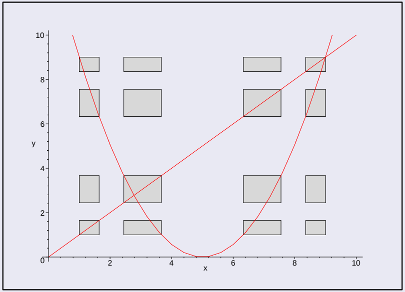
Problème de calculabilité



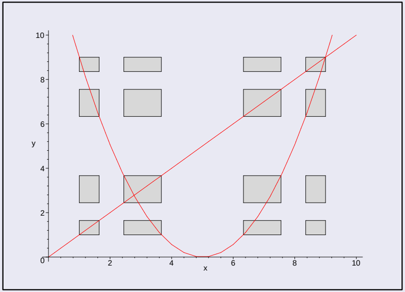
Problème de calculabilité



Problème de calculabilité



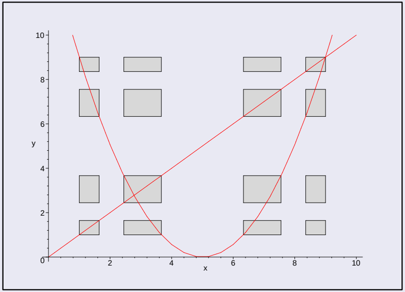
Problème de calculabilité



- Se traduit en pratique par un problème de complexité en espace
- Se résout en ne conservant que l’enveloppe des projections (**2B-cohérence**)
- Deux nouvelles propositions dans le cadre la thèse: **BoxSet, AC-IGC**

Propriétés de l'arc-cohérence

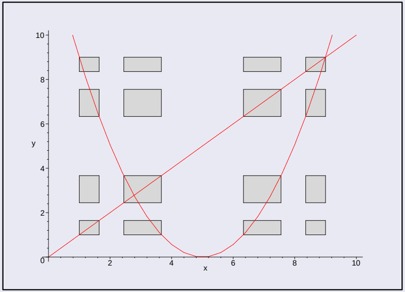
Problème de calculabilité



- Se traduit en pratique par un problème de complexité en espace
- Se résout en ne conservant que l'enveloppe des projections (**2B-cohérence**)
- Deux nouvelles propositions dans le cadre la thèse: **BoxSet, AC-IGC**

Propriétés de l'arc-cohérence

Problème de calculabilité



- Se traduit en pratique par un problème de complexité en espace
- Se résout en ne conservant que l'enveloppe des projections (**2B-cohérence**)
- Deux nouvelles propositions dans le cadre la thèse: **BoxSet, AC-IGC**

Outline

Introduction
Analyse par intervalles
Programmation par contraintes
Introduction
Unions d'intervalles
Conclusion

Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

BoxSet cohérence

Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

BoxSet cohérence

Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

BoxSet cohérence

Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

BoxSet cohérence

Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

BoxSet cohérence

Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

BoxSet cohérence

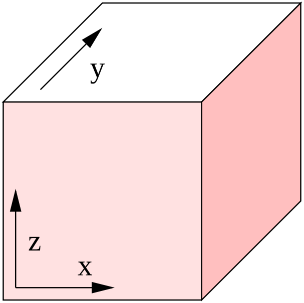
Idée : introduire un point de choix des qu'une union apparaît dans la propagation.
Point fixe = union des boîtes arc-cohérentes

- La complexité en espace ne dépend plus du nombre de flottants
- La version naïve conduit à une explosion combinatoire
- La version paresseuse
  - exploite le point fixe de 2B-cohérence
  - intègre un calcul de projection sans union
  - détecte les points de bissection
- Étude approfondie des propriétés obtenues:
  - boxset cohérence sans occurrence multiple de variable
  - pas de comparaison possible entre un CSP et sa décomposition

Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

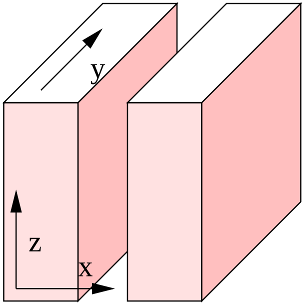
- Niveau valeur



Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur

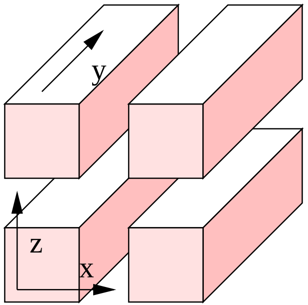


Introduction
Analyse par intervalles
Programmation par contraintes
Introduction
Unions d'intervalles
Conclusion

Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

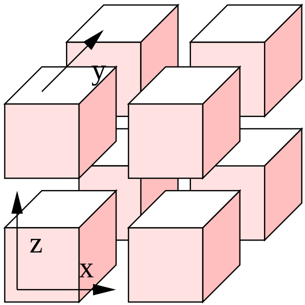
- Niveau valeur



Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

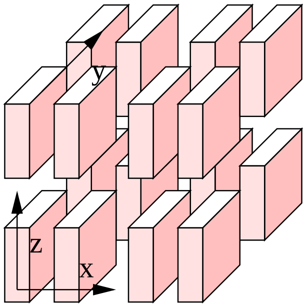
- Niveau valeur



Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

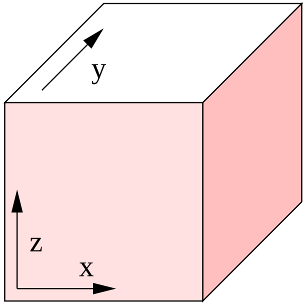
- Niveau valeur



Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

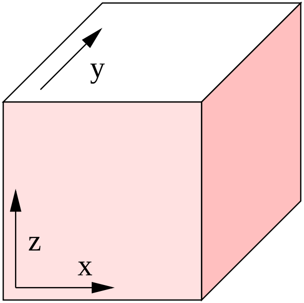
- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

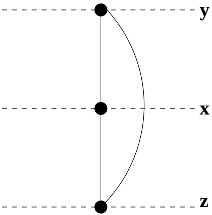


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

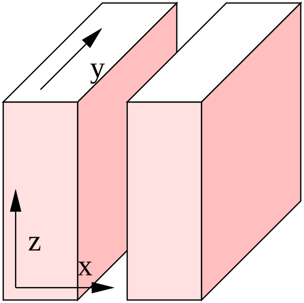


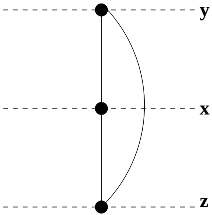


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

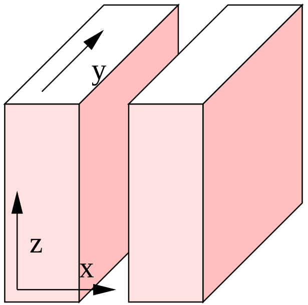


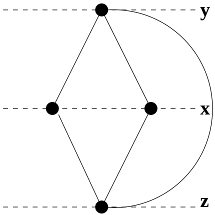


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

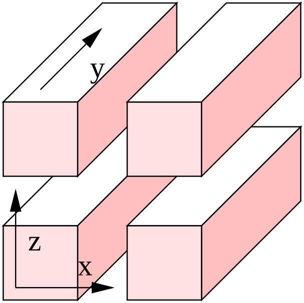


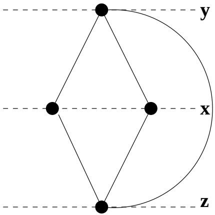


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

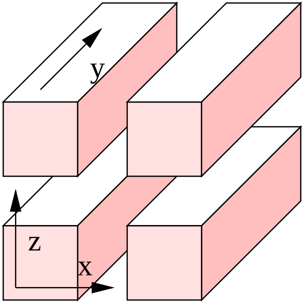


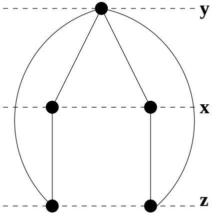


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

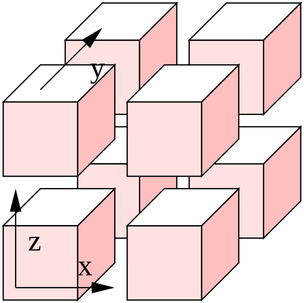


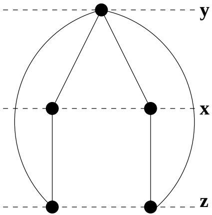


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

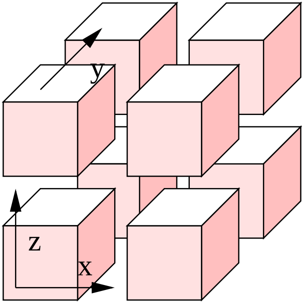


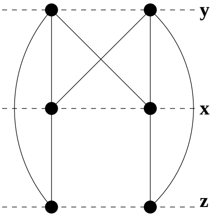


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

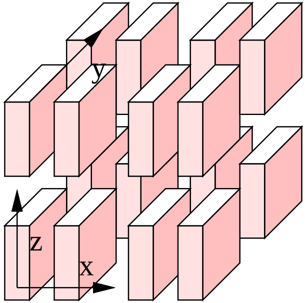


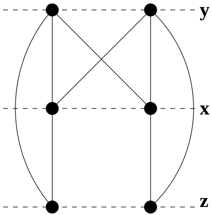


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

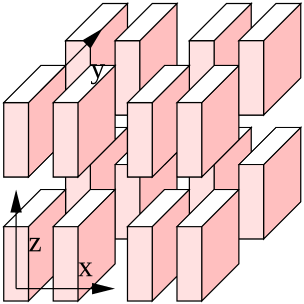


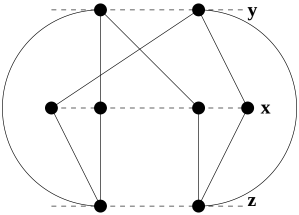


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)

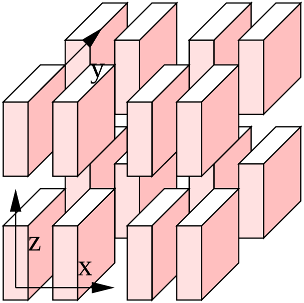


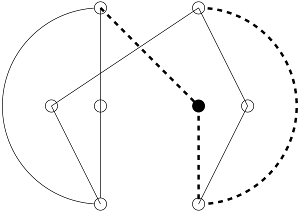


Idée fondamentale

La cohérence des unions se fait à deux niveaux

- Niveau valeur
- Niveau intervalles (notion de I-support)





AC-IGC

- AC–IGC = combinaison arc-cohérence (valeurs) et cohérence globale (intervalles)
- **arc-cohérence $\prec$ AC–IGC $\prec$ BoxSet**
- Possibilité de greffer un algorithme de graphe (I-cliques)

L'approche `EtiqAC`

- Objectif: maintien incrémental des I-cliques
- Outil : Propager des informations sur l'*origine des trous*

AC-IGC

- AC–IGC = combinaison arc-cohérence (valeurs) et cohérence globale (intervalles)
- **arc-cohérence $\prec$ AC–IGC $\prec$ BoxSet**
- Possibilité de greffer un algorithme de graphe (I-cliques)

L'approche `EtiqAC`

- Objectif: maintien incrémental des I-cliques
- Outil : Propager des informations sur l'*origine des trous*

AC-IGC

- AC–IGC = combinaison arc-cohérence (valeurs) et cohérence globale (intervalles)
- **arc-cohérence $\prec$ AC–IGC $\prec$ BoxSet**
- Possibilité de greffer un algorithme de graphe (I-cliques)

L'approche `EtiqAC`

- Objectif: maintien incrémental des I-cliques
- Outil : Propager des informations sur l'*origine des trous*

AC-IGC

- AC–IGC = combinaison arc-cohérence (valeurs) et cohérence globale (intervalles)
- **arc-cohérence $\prec$ AC–IGC $\prec$ BoxSet**
- Possibilité de greffer un algorithme de graphe (I-cliques)

L'approche `EtiqAC`

- Objectif: maintien incrémental des I-cliques
- Outil : Propager des informations sur l'*origine des trous*

AC-IGC

- AC–IGC = combinaison arc-cohérence (valeurs) et cohérence globale (intervalles)
- **arc-cohérence** $\prec$ **AC–IGC** $\prec$ **BoxSet**
- Possibilité de greffer un algorithme de graphe (I-cliques)

L'approche `EtiqAC`

- Objectif: maintien incrémental des I-cliques
- Outil : Propager des informations sur l'*origine des trous*

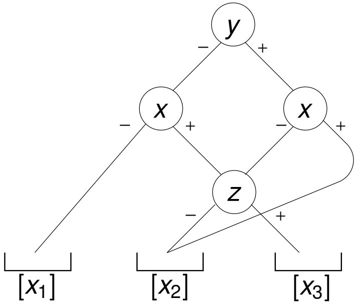
Recours à une nouvelle structure de donnée hybride:

Recours à une nouvelle structure de donnée hybride:

union d'intervalles + BDD

Recours à une nouvelle structure de donnée hybride:

union d'intervalles + BDD



Plan de la soutenance

Conclusion (1)

Introduction
Analyse par intervalles
Programmation par contraintes
Conclusion

Analyse par intervalles

Contributions

1. Hansen-Bliek généralisé
2. LU généralisé

Perspectives

1. Tests d'existence de solutions (cas non carré)
2. Analyse convexe?
3. Représentation alternative de continuums

Conclusion (1)

Analyse par intervalles

Contributions

1. Hansen-Bliek généralisé
2. LU généralisé

Perspectives

1. Tests d'existence de solutions (cas non carré)
2. Analyse convexe?
3. Représentation alternative de continuums

Analyse par intervalles

Contributions

1. Hansen-Bliek généralisé
2. LU généralisé

Perspectives

1. Tests d'existence de solutions (cas non carré)
2. Analyse convexe?
3. Représentation alternative de continuums

Analyse par intervalles

Contributions

1. Hansen-Bliek généralisé
2. LU généralisé

Perspectives

1. Tests d'existence de solutions (cas non carré)
2. Analyse convexe?
3. Représentation alternative de continuums

Conclusion (1)

Analyse par intervalles

Contributions

1. Hansen-Bliek généralisé
2. LU généralisé

Perspectives

1. Tests d'existence de solutions (cas non carré)
2. Analyse convexe?
3. Représentation alternative de continuums

Conclusion (1)

Analyse par intervalles

Contributions

1. Hansen-Bliek généralisé
2. LU généralisé

Perspectives

1. Tests d'existence de solutions (cas non carré)
2. Analyse convexe?
3. Représentation alternative de continuums

Intervalles modaux

Contributions

1. Nouvelle formulation

Synthèse

- mal adapté pour la détection de boîtes intérieures dans le cas général
- rend le filtrage de AE-système possible
- parfaitement adapté au cas linéaire
- ... mais les intervalles généralisés aussi

Conclusion (2)

Intervalles modaux

Contributions

1. Nouvelle formulation

Synthèse

- mal adapté pour la détection de boîtes intérieures dans le cas général
- rend le filtrage de AE-système possible
- parfaitement adapté au cas linéaire
- ... mais les intervalles généralisés aussi

Conclusion (2)

Intervalles modaux

Contributions

1. Nouvelle formulation

Synthèse

- mal adapté pour la détection de boîtes intérieures dans le cas général
- rend le filtrage de AE-système possible
- parfaitement adapté au cas linéaire
- ... mais les intervalles généralisés aussi

Intervalles modaux

Contributions

1. Nouvelle formulation

Synthèse

- mal adapté pour la détection de boîtes intérieures dans le cas général
- rend le filtrage de AE-système possible
- parfaitement adapté au cas linéaire
- ... mais les intervalles généralisés aussi

Intervalles modaux

Contributions

1. Nouvelle formulation

Synthèse

- mal adapté pour la détection de boîtes intérieures dans le cas général
- rend le filtrage de AE-système possible
- parfaitement adapté au cas linéaire
- ... mais les intervalles généralisés aussi

Conclusion (2)

Intervalles modaux

Contributions

1. Nouvelle formulation

Synthèse

- mal adapté pour la détection de boîtes intérieures dans le cas général
- rend le filtrage de AE-système possible
- parfaitement adapté au cas linéaire
- ... mais les intervalles généralisés aussi

Programmation par contraintes

Contributions

1. Cohérence calculable sur les flottants
2. Cohérences d'unions d'intervalles
   $\rightsquigarrow$ intérêt académique
   $\rightsquigarrow$ vouées à l'échec sur les CSP continus

Perspectives

1. Nouvelles contraintes avec contracteurs spécifiques
2. Bissection de paramètres
3. AE-systèmes

Conclusion (3)

Programmation par contraintes

Contributions

1. Cohérence calculable sur les flottants
2. Cohérences d'unions d'intervalles
   $\rightsquigarrow$ intérêt académique
   $\rightsquigarrow$ vouées à l'échec sur les CSP continus

Perspectives

1. Nouvelles contraintes avec contracteurs spécifiques
2. Bissection de paramètres
3. AE-systèmes

Conclusion (3)

Programmation par contraintes

Contributions

1. Cohérence calculable sur les flottants
2. Cohérences d'unions d'intervalles
   $\leadsto$ intérêt académique
   $\leadsto$ vouées à l'échec sur les CSP continus

Perspectives

1. Nouvelles contraintes avec contracteurs spécifiques
2. Bissection de paramètres
3. AE-systèmes

Programmation par contraintes

Contributions

1. Cohérence calculable sur les flottants
2. Cohérences d'unions d'intervalles
   $\rightsquigarrow$ intérêt académique
   $\rightsquigarrow$ vouées à l'échec sur les CSP continus

Perspectives

1. Nouvelles contraintes avec contracteurs spécifiques
2. Bissection de paramètres
3. AE-systèmes

Conclusion (3)

Programmation par contraintes

Contributions

1. Cohérence calculable sur les flottants
2. Cohérences d'unions d'intervalles
   $\rightsquigarrow$ intérêt académique
   $\rightsquigarrow$ vouées à l'échec sur les CSP continus

Perspectives

1. Nouvelles contraintes avec contracteurs spécifiques
2. Bissection de paramètres
3. AE-systèmes

Conclusion (3)

Programmation par contraintes

Contributions

1. Cohérence calculable sur les flottants
2. Cohérences d'unions d'intervalles
   $\rightsquigarrow$ intérêt académique
   $\rightsquigarrow$ vouées à l'échec sur les CSP continus

Perspectives

1. Nouvelles contraintes avec contracteurs spécifiques
2. Bissection de paramètres
3. AE-systèmes

Conclusion (4)

Autres activités de thèse

1. Développement d'une librairie en C++
2. Collaborations

Conclusion (4)

Autres activités de thèse

1. Développement d'une librairie en C++
2. Collaborations

Conclusion (4)

Autres activités de thèse

1. Développement d'une librairie en C++
2. Collaborations

Merci !