Université de Nice Sophia-Antipolis

THÈSE

Présentée en Novembre 2005

par

Heikel Batnini

Sujet de la thèse :

Contraintes Globales et Techniques de Résolution pour les CSPs Continus

Directeur : **Michel Rueher**

Projet COPRIN -CERMICS/INRIA/I3S

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Glossaire des notations

$\lvert E\rvert$	Le cardinal de l'ensemble E.
$(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$	un CSP fini.
$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$	L'ensemble des variables.
$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$	L'ensemble des domaines finis.
$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$	L'ensemble des contraintes.
n	le nombre de variables de $\mathcal{X}$ ($n = \lvert\mathcal{X}\rvert$).
$\boldsymbol{d}_i$	le domaine fini associé à la variable x_i.
d	le nombre d'éléments du plus grand domaine de $\mathcal{D}$.
v_i	un élément du domaine fini $\boldsymbol{d}_i$.
m	le nombre de contraintes de $\mathcal{C}$ ($m = \lvert\mathcal{C}\rvert$).
$\mathcal{V}(c)$	l'ensemble des variables de la contrainte c.
$(v_1, \ldots, v_n) \in c$	c est satisfaite lorsque $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$.
$(v_1, \ldots, v_n) \notin c$	c n'est est pas satisfaite lorsque $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombre réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}$ étendu à $\{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{F}$	L'ensemble des nombre flottants dans un format donné ($\overline{\mathbb{F}} \subset \overline{\mathbb{R}}$).
$\overline{\mathbb{F}}$	$\mathbb{F}$ étendu à $\{-\infty, +\infty\}$.
$[\underline{x}, \overline{x}]$	un intervalle fermé (l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$).
$]\underline{x}, \overline{x}[$	un intervalle ouvert (l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\underline{x} < x < \overline{x}$).
$m(\boldsymbol{x})$	le milieu de l'intervalle $\boldsymbol{x}$ ($m(\boldsymbol{x}) = (\overline{x} + \underline{x})/2$).
$w(\boldsymbol{x})$	la taille de l'intervalle $\boldsymbol{x}$ ($w(\boldsymbol{x}) = \overline{x} - \underline{x}$).
$\mathbb{IR}$	l'ensemble des intervalles à bornes dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{IF}, \mathbb{I}$	l'ensemble des intervalles à bornes dans $\mathbb{F}$.
$\cap_{\mathbb{I}}$	l'opérateur d'intersection sur $\mathbb{I}$
x, y, z	des variables réelles.
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$	des intervalles.
X, Y, Z	des vecteurs de variables réelles.
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$	des vecteurs d'intervalles - ou *boîtes*.
$\boldsymbol{X} = \emptyset$	si une des composantes $\boldsymbol{x}_i$ de $\boldsymbol{X}$ est vide
$w(\boldsymbol{X})$	La taille du plus grand intervalle qui compose $\boldsymbol{X}$
$\mathcal{P}_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$	Un point de $\mathbb{R}^p$
$\mathcal{P}_i(x_i, y_i, z_i)$	Un point de $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{P}_i(x_i, y_i)$	Un point de $\mathbb{R}^2$
$\overrightarrow{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j}$	le vecteur entre le point $\mathcal{P}_i$ et le point $\mathcal{P}_j$
δ_{ij}	la distance entre le point $\mathcal{P}_i$ et le point $\mathcal{P}_j$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}_i$	le domaine du point $\mathcal{P}_i$, c'est-à-dire, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i = \boldsymbol{x}_{i_1} \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{i_p}$
$\boldsymbol{u} = \bigcup \boldsymbol{u}_{(j)}$	une union d'intervalles
$\lvert\boldsymbol{u}\rvert$	le nombre de sous-intervalles qui composent $\boldsymbol{u}$
$\underline{\boldsymbol{u}}$	la borne inférieure de $\boldsymbol{u}$
$\overline{\boldsymbol{u}}$	la borne supérieure de $\boldsymbol{u}$
$\mathbb{U}$	l'ensemble des unions d'intervalles sur à bornes dans $\mathbb{F}$
$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$	des vecteurs d'unions d'intervalles
$\cap_{\mathbb{U}}$	l'opérateur d'intersection sur $\mathbb{U}$

Chapitre 1

Introduction

Beaucoup d'applications allant de la robotique à la chimie et la géométrie peuvent être exprimées comme des problèmes de satisfaction de contraintes numériques. Un NCSP (Numerical Constraint Satisfaction Problem) est défini par un ensemble de variables et un ensemble de contraintes non-linéaires sur ces variables. Le domaine de variation de ces variables sont des intervalles fermés sur $\mathbb{R}$, autrement dit des domaines continus. Les CSPs numériques, ou CSPs continus, peuvent exprimer une large classe de problème, en particulier des problèmes avec des données imprécise ou des paramètres définis de manière approximative. Le but est de trouver des boîtes qui approximent les solutions de ces contraintes.

En général, les méthodes algèbriques sont incapable de traiter ces problèmes et les méthodes numériques ne garantissent pas la correction des résultats. Cependant, des approximations correctes des solutions peuvent être obtenue par des solveurs de contraintes basés sur l'arithmétique des intervalles. La plupart de ces solveurs implémentent un algorithme de recherche qui combine une technique d'énumération de l'espace de recherche et des techniques de consistances locales.

Les consistances locales pour des CSPs aux domaines finis ont été adaptées aux CSPs numériques. Les algorithmes de filtrage associés éliminent des domaines certaines valeurs inconsistantes, c'est-à-dire pour lesquelles il existe au moins une contrainte qui ne peut être vérifiée. En pratique, le filtrage est en général limité à la contraction des bornes des intervalles.

Les techniques classiques pour résoudre des CSPs numériques sont basées sur un algorithme de type *Branch&Prune*. Cet algorithme alterne filtrages et décompositions de domaines jusqu'à ce qu'une précision donnée sur les domaines soit atteinte. L'étape de décomposition (ou *splitting*) séléctionne une variable et découpe son domaine en plusieurs parties. Les sous-problèmes générés sont alors résolus de manière indépendante.

Contraintes globales sur le continu L'inconvénient des consistances locales est que ce sont des méthodes générales, qui se révèlent parfois inadaptées à résoudre certains types de problèmes. Il a donc fallu introduire des techniques de filtrage adaptées à certains types de contraintes : les *contraintes globales*. La notion de contrainte globale est très largement répendue dans la communauté des CSPs aux domaines finis principalement depuis les travaux de J-C. Régin notemment sur la contrainte *AllDiff*. En revanche, très peu de travaux ont été entrepris sur des contraintes globales en domaines continus.

Il existe principalement 2 approches différentes pour définir une contrainte globale :

- Ajouter des contraintes supplémentaires au système initial de manière à accélérer ou à renforcer le filtrage par consistance. Cette technique ne nécessite pas la définition d'un algorithme dédié.
- Utiliser une autre modélisation du problème et définir un algorithme de filtrage des domaines plus fort et plus efficace.

Nous avons exploré dans cette thèse chacune de ses deux approches pour tenter de concevoir une contrainte globale pour les systèmes d'équations de distance euclidienne : étants donnés un ensemble de points et de distances entre certains couples de ces points, le problème est de localiser ces points dans l'espace de manière à ce que les contraintes de distance soient respectées. Ces systèmes sont présents dans un large champ d'applications (conception optimale de robots, contraintes géométriques, CAO, conformation moléculaire, ...).

Techniques de résolution pour les CSPs continus

Plan du manuscrit Ce manuscrit est organisé en 3 parties :

I La première partie fait un état de l'art restreint du domaine de la programmation par contraintes. Dans le chapitre 2, les principales techniques de résolution et de filtrage par consistance en domaines finis seront présentées. Le chapitre 3 présente l'arithmétique des intervalles et l'adaptation des techniques de consistances des domaines finis aux intervalles.

II La deuxième partie présente nos travaux sur les contraintes globales. Le chapitre 4 définit le problème de satisfaction de contraintes de distance, ses applications et les principales approches pour le résoudre. Le chapitre 5 présente la première approche que nous avons explorée, c'est-à-dire l'ajout de contraintes supplémentaires générées à partir des contraintes du système initial. Le chapitre 6 présente une technique de filtrage spécifique aux contraintes de distance.

III La troisième partie de ce manuscrit présente nos travaux sur les techniques de résolution de CSPs continus. Le chapitre 7 présente une heuristique de recherche dédiée aux contraintes de distance. Enfin, le chapitre 8 présente une généralisation de cette heuristique de recherche à des contraintes numériques quelconques.

Première partie

État de l'art

Chapitre 2

CSPs à domaines finis

Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP : Constraint Satisfaction Problem) forment un modèle simple et formel pour représenter et résoudre des problèmes en intelligence artificielle. De nombreux problèmes en IA, mais également dans d'autres disciplines de l'informatique, peuvent être modélisés par un CSP. La programmation par contraintes (PPC) est un paradigme permettant de formuler une large variété de problèmes, allant du problème d'allocation de ressources et d'ordonnancement à la conception assistée par ordinateur. De nombreuses techniques spécifiques à la PPC on été introduites durant ces cinquante dernières années ; la PPC est aujourd'hui réputée pour sa simplicité et sa capacité à traiter des problèmes très généraux.

Toutefois, savoir si un CSP a une solution ou trouver une ou toutes les solutions d'un CSP reste un problème NP-complet. Un grand nombre de méthodes ont donc été développées pour tenter de réduire le coût de la résolution d'un CSP. Parmi ces méthodes, les plus populaires sont les techniques de consistance qui tentent de réduire l'espace de recherche avant ou pendant la résolution proprement dite.

Ce chapitre présente de manière succincte les principales approches pour modéliser et résoudre des CSPs finis. Le but n'est pas de faire un état de l'art complet (pour cela le lecteur pourra se reporter à [**?**, **?**, **?**, **?**]), mais de donner les idées nécessaire à la compréhension du reste de cette thèse. Les CSPs continus, qui sont au coeur de notre étude, seront décrits dans le chapitre 3.

La section 2.1 définit les CSPs de manière générale, puis la section 2.2 décrit la méthode classique pour résoudre des CSPs à domaines finis : la recherche systématique. La section 2.3 présente les techniques de filtrage par consistance pour réduire l'espace de recherche. La section 2.4 décrit des algorithmes de résolution qui utilisent un filtrage par consistance pendant la recherche de solutions. Enfin, des heuristiques de parcours de l'espace de recherche seront présentées dans la section 2.4.

2.1 Définition et exemples

Un problème de satisfaction de contraintes est défini par un ensemble de variables, un ensemble de domaines associés et un ensemble de contraintes sur ces variables. Le domaine d'une variable est un ensemble des valeurs autorisées pour cette variable. Une contrainte spécifie un ensemble d'affectations de variables compatibles. Une solution d'un CSP est une affectation de toutes les variables dans leurs domaines respectifs qui soit compatible avec toutes les contraintes. Formellement,

Définition 2.1.1 (Constraint Satisfaction Problem [?, ?]) *Un CSP (Constraint Satisfaction Problem) est défini par :*
- $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$*, un ensemble de* n ***variables****.*
- $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$*, un ensemble de* ***domaines*** *associés aux variables. Le domaine* $\boldsymbol{d}_i$ *est un ensemble de valeurs autorisées pour la variable* x_i*.*
- $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$*, un ensemble de* ***contraintes*** *reliant l'ensemble des variables.*

Remarque Ce chapitre présente les outils pour modéliser et résoudre les CSPs finis, dont les domaines sont des ensembles finis de valeurs. Les CSPs continus, dont les domaines sont des intervalles réels, seront présentés dans le chapitre 3. Dans le cas des CSPs finis, les contraintes peuvent être modélisées *en extension*, c'est-à-dire qu'une contrainte $c(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ d'arité k est un sous-ensemble du produit cartésien de $\boldsymbol{d}_{i_1} \times \ldots \times \boldsymbol{d}_{i_k}$ contenant les tuples qui satisfont c. Ces contraintes peuvent être également modélisées *enintention* , c'est-à-dire sous la forme d'une équation numérique. On verra dans le chapitre 3 que les contraintes en domaines continus ne sont représentables qu'en intention.

L'exemple suivant montre un CSP à domaines finis avec une représentation des contraintes en intention et en extension :

Exemple 2.1.1 (Exemple de CSP à domaines finis) *Soit le CSP* $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ *définit par :*
- $\mathcal{X} = \{x, y, z, t\}$,
- $\mathcal{D} = \{D_x : \{-5, 0, 3, 4, 5\},\ D_y : \{-4, -3, -2, 0, 5\},\ D_z : \{2, 3, 4\},\ D_t : \{-5, -4, -3\}\}$,
- $\mathcal{C} = \begin{cases} c_1 : x^2 + y^2 = 25 \\ c_2 : z^2 + t^2 = 25 \\ c_3 : x + z = 7 \\ c_4 : y + t = -7 \end{cases}$ *ou* $\mathcal{C} = \begin{cases} c_1 : (x, y) \in \{(-5, 0), (3, -4), (4, -3), (5, 0)\} \\ c_2 : (z, t) \in \{(3, -4), (4, -3)\} \\ c_3 : (x, z) \in \{(5, 2), (3, 4), (4, 3)\} \\ c_4 : (y, t) \in \{(-3, -4), (-4, -3)\} \end{cases}$

Les solutions de ce CSP sont $(x, y, z, t) = (3, -4, 4, -3)$ *et* $(x, y, z, t) = (4, -3, 3, -4)$.

Notations Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

$(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$	un CSP fini
$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$	L'ensemble des variables
$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$	L'ensemble des domaines finis associés
$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$	L'ensemble des contraintes
n	le nombre de variables de $\mathcal{X}$ ($n = \lvert\mathcal{X}\rvert$).
$\boldsymbol{d}_i$	le domaine fini associé à la variable x_i.
d	le nombre d'éléments du plus grand domaine de $\mathcal{D}$.
v_i	un élément du domaine fini $\boldsymbol{d}_i$.
m	le nombre de contraintes de $\mathcal{C}$ ($m = \lvert\mathcal{C}\rvert$).
$\mathcal{V}(c)$	l'ensemble des variables de la contrainte c.
$(v_1, \ldots, v_n) \in c$	c est satisfaite lorsque $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$.
$(v_1, \ldots, v_n) \notin c$	c n'est est pas satisfaite lorsque $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$.

On utilise souvent une définition plus restreinte des CSPs, celle des CSPs binaires par opposition aux CSPs généraux. Un CSP est dit **binaire** si toutes ses contraintes portent sur au plus 2 variables. Les CSPs **généraux** sont des CSPs contenant au moins une contrainte non binaire. Plus formellement,

Définition 2.1.2 (CSP binaires/généraux) *Un CSP $P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ est dit **binaire** si et seulement si* $\max_{c \in \mathcal{C}} |\mathcal{V}(c)| <= 2$. *$P$ est dit **général** si et seulement si* $\max_{c \in \mathcal{C}} |\mathcal{V}(c)| > 2$.

Les CSPs binaires sont représentés par un graphe de contraintes et de manière plus fine par une micro-structure :

- Le graphe de contraintes associé à un CSP binaire est le graphe dont les sommets correspondent aux variables du CSP et les arêtes relient deux variables liées par une contraintes (Fig. 2.1).
- La micro-structure associée à un CSP binaire est le graphe dont les sommets sont des couples (variable,valeur de son domaine) avec et dont les arêtes relient les couples compatibles. (Fig. 2.2).

Plus formellement,

Définition 2.1.3 (Graphe associé à un CSP binaire) *Soit $P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$, un CSP binaire. Le **graphe de contraintes** associé à P est le graphe $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ tel que :*

- *L'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets de G est défini par $\mathcal{S} = \mathcal{X}$*
- *L'ensemble $\mathcal{A}$ des arêtes de G est défini par :*

$$\mathcal{A} = \{(x_i, x_j) \in \mathcal{S}^2 : \exists c \in \mathcal{C} \ t.q. \ \mathcal{V}(c) = \{x_i, x_j\}\}$$

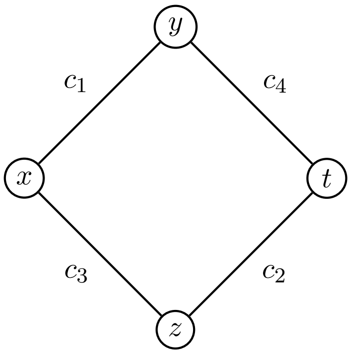


FIG. 2.1 – Graphe de contraintes associé au CSP de l'exemple 2.1.1 page 6

Définition 2.1.4 (Micro-structure d'un CSP binaire) *Soit $P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$, un CSP binaire. La **micro-structure** associée à P est le graphe $M = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ tel que :*

- *L'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets de M est défini par $\mathcal{S} = \{\langle x_i, v_i \rangle : x_i \in \mathcal{X}, v_i \in \boldsymbol{d}_i\}$*
- *L'ensemble $\mathcal{A}$ des arêtes de M est défini par :*

$$\mathcal{A} = \{(\langle x_i, v_i \rangle, \langle x_j, v_j \rangle) \in \mathcal{S}^2 : \exists c \in \mathcal{C} \ t.q. \ \mathcal{V}(c) = \{x_i, x_j\} \wedge (v_i, v_j) \in c\}$$

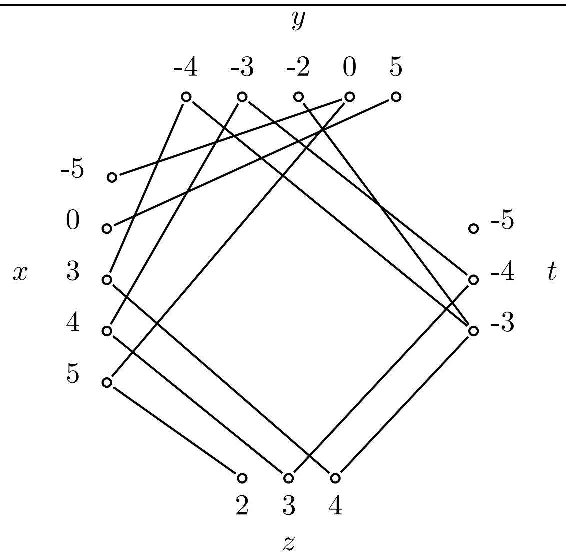


FIG. 2.2 – Micro-structure associée au CSP de l'exemple 2.1.1 page 6. Pour simplifier la figure, seuls les liens entre les couples de variables reliées par une contraintes sont représentées. Les variables x et t d'une part et de y et z d'autre part ne sont liées par aucune contrainte ; les valeurs de x (resp. y) sont donc compatibles avec toutes les valeurs de t (resp. z).

Les CSPs généraux se modélisent par un *hypergraphe de contraintes* qui étend la notion de graphe de contraintes des CSPs binaires. L'*hypergraphe de contraintes* associé à un CSP est l'hypergraphe dont les sommets sont les variables du CSP et les hyperarêtes sont les ensembles des variables liées par une même contrainte. Rossi *et. al.* ont montré qu'il était possible, avec toutefois un coût non négligeable, de convertir un CSP général en CSP binaire [**?**]. En pratique, il est inconcevable de transformer un système de contraintes non-binaires en un système de contraintes binaires, dû au coût en temps de calcul et en mémoire, en particulier pour les contraintes non-représentables [**?**].

Définition 2.1.5 (Hypergraphe associé à un CSP général) *Soit $P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$, un CSP général. L'**hypergraphe de contraintes** associé à P est l'hypergraphe $G = (\mathcal{S}, \mathcal{H})$ tel que :*
- *L'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets de G est défini par $\mathcal{S} = \mathcal{X}$*
- *L'ensemble $\mathcal{H}$ des hyperarêtes de G est défini par :*

$$\mathcal{H} = \{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \in \mathcal{S}^p : \exists c \in \mathcal{C} \textit{ t.q. } \mathcal{V}(c) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\}$$

La section suivante présente les techniques classiques de résolution d'un CSP à domaines finis.

2.2 Résolution classique de CSPs finis

Résoudre un CSP consiste à trouver un ensemble de valeurs à affecter aux variables permettant de satisfaire l'ensemble des contraintes. Le nombre d'affectations possibles des variables dans leur domaine étant exponentiel, la résolution de CSPs est un problème NP-complet. Notons d'ailleurs que la définition générale d'un CSP inclut par exemple le problème de 3-satisfaisabilité.

Plusieurs approches ont été développées pour résoudre des CSPs finis. Parmi ces méthodes on distingue les méthodes *complètes*, qui recherchent toutes les solutions, et les méthodes *incomplètes* comme la *recherche locale* qui se limitent à la recherche d'une seule solution. Nous intéresserons dans ce chapitre à la première catégorie. Le lecteur pourra se reporter à [] pour plus de détails sur les méthodes de recherche locale.

Plus formellement, une instanciation partielle est un ensemble d'affectation de variables à une valeur de leur domaine :

Définition 2.2.1 (Instanciation partielle [?]) *Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ un CSP fini. Une* ***instanciation partielle*** *$I_{\mathcal{Y}}$ sur le sous-ensemble de variables $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ est définie par :*

$$I_{\mathcal{Y}} = \{\langle x_i, v_i \rangle : x_i \in \mathcal{Y} \wedge v_i \in \boldsymbol{d}_i\}$$

Une instanciation partielle sur l'ensemble de variables $\mathcal{Y}$ est *localement consistante* si elle satisfait chacune des contraintes mettant en jeu un ensemble de variables inclus dans $\mathcal{Y}$:

Définition 2.2.2 (Consistance locale [?]) *Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ un CSP fini, $\mathcal{Y}$ un sous-ensemble de $\mathcal{X}$. Une instanciation partielle $I_{\mathcal{Y}}$ sur l'ensemble de variables $\mathcal{Y}$ est* ***localement consistante*** *ssi :*

$$\forall c \in \mathcal{C} \ t.q. \ \mathcal{V}(c) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\} \subseteq \mathcal{Y} : (v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}) \in c,$$

où $\langle x_{i_k}, v_{i_k} \rangle \in I_{\mathcal{Y}}, \forall k \leq p$.

Remarque De manière similaire, une instanciation partielle sur l'ensemble de variables $\mathcal{Y}$ est *inconsistante* si il existe une contrainte c telle que $\mathcal{V}(c) \subseteq \mathcal{Y}$ qui ne soit pas satisfaite.

Une solution d'un CSP est une affectation de toutes ses variables par des valeurs de leur domaine qui satisfait toutes les contraintes :

Définition 2.2.3 (Solution[?]) *Une* ***solution*** *d'un CSP $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ est une instanciation localement consistante sur $\mathcal{X}$.*

L'algorithme le plus naïf pour trouver toutes les solutions d'un CSP consiste à générer toutes les combinaisons possibles de valeurs. Les combinaisons sont alors testées ; celles qui satisfont toutes les contraintes sont des solutions du CSP. Cet algorithme, également appelé *Generate & Test*, explore un espace de recherche dont la taille est celle du produit cartésien des domaines.

Une méthode plus efficace combine une recherche arborescente en profondeur d'abord avec des retours-arrières : l'algorithme de *backtracking*. Une première citation de cet algorithme est tirée d'une œvre d'un mathématicien français, Edouard Lucas en 1891 [**?**]. Cet algorithme a été redécouvert à plusieurs reprises notamment par [**?**].

L'algorithme de *backtracking* construit une instanciation partielle des variables, en sélectionnant séquentiellement les variables et en leur attribuant une valeur dans leur domaine. Chaque fois qu'une nouvelle valeur est affectée à une variable, un test de consistance est effectué :

- Si au moins une contrainte est violée, la variable courante est affectée à la prochaine valeur de son domaine. S'il ne reste plus de valeurs dans le domaine de la variable courante, l'algorithme effectue un *retour-arrière* , ou *backtrack*, qui consiste à revenir à la variable précédemment instanciée.
- Si toutes les contraintes sont satisfaites, l'instanciation se poursuit avec la variable suivante. Une solution est obtenue lorsque toutes les variables ont été instanciées.

L'ordre dans lequel les variables et les valeurs sont choisies peut influencer de manière significative sur les performances de la recherche. Par exemple, pour trouver une première solution du CSP de l'exemple 2.1.1, l'algorithme de backtrack, avec un ordre alphabétique sur les variables et un ordre croissant sur les valeurs, nécessite 4 retours-arrières et 26 tests de consistance dont 18 échecs (Fig. 2.3). Différentes heuristiques de choix de variables et de choix de valeurs seront présentées dans la section 2.4.

$\langle x, -5\rangle$ ✓	$\langle y, -4\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, -3\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, -2\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, 0\rangle$ ✓	$\langle z, 2\rangle$ $\bullet$	
		$\langle z, 3\rangle$ $\bullet$	
		$\langle z, 4\rangle$ $\bullet$	
	$\langle y, 5\rangle$ $\bullet$		
$\langle x, 0\rangle$ ✓	$\langle y, -4\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, -3\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, -2\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, 0\rangle$ $\bullet$		
	$\langle y, 5\rangle$ ✓	$\langle z, 2\rangle$ $\bullet$	
		$\langle z, 3\rangle$ $\bullet$	
		$\langle z, 4\rangle$ $\bullet$	
$\langle x, 3\rangle$ ✓	$\langle y, -4\rangle$ ✓	$\langle z, 2\rangle$ $\bullet$	
		$\langle z, 3\rangle$ $\bullet$	
		$\langle z, 4\rangle$ ✓	$\langle t, -5\rangle$ $\bullet$
			$\langle t, -4\rangle$ $\bullet$
			$\langle t, -3\rangle$ ✓

FIG. 2.3 – Algorithme de backtrack sur le CSP de l'exemple 2.1.1 page 6

Bien que le *backtracking* soit toujours plus efficace que le *Generate & Test*, il n'en reste pas moins exponentiel et s'adapte mal aux problèmes de grande taille. En effet, l'espace de recherche est parcouru aveuglément sans tenir compte d'informations qui permettrait de réduire le temps de calcul. Ce manque d'efficacité provient essentiellement du fait que le test de consistance peut échouer pour la même raison dans deux espaces de recherche différents.

Supposons par exemple qu'une contrainte unaire sur une variable v interdise une certaine valeur a. Chaque fois que v sera instanciée à a, le test de consistance échouera à cause de cette contrainte unaire, mais cette information ne sera pas prise en compte dans le reste de la recherche. Ce phénomène est qualifié d'*inconsistance de noeud* dans [**?**] et peut être résolu en éliminant des domaines, préalablement à la recherche, les valeurs incompatibles avec les contraintes unaires.

Avec une contrainte binaire entre deux variables u et v, le même phénomène se produit lorsque u est instanciée à une valeur a et qu'il n'existe aucune valeur compatible dans le domaine de v. Chaque fois que u sera instancié à a, le test de consistance échouera pour la même raison après avoir énuméré le domaine de v dans sa totalité : c'est l'*inconsistance d'arc* [**?**]. Ce problème peut également être résolu en calculant une fermeture par *arc-consistance* du CSP.

Ce raisonnement s'étend à 3, 4, ..., k variables, ce qui a engendré des familles d'algorithmes de consistances locales, comme les k-consistances [?]. La section suivante présente les principales techniques de consistances en domaines finis.

2.3 Filtrage par consistance

Une des approches les plus classiques en intelligence artificielle pour pallier au problème de complexité combinatoire inhérent aux CSPs est d'utiliser des techniques de filtrage par consistance . Ces techniques tentent d'éliminer des valeurs dans les domaines des variables pour lesquels certaines contraintes ne peuvent être satisfaites (*valeurs inconsistantes*). Cela permet de réduire au préalable la taille des domaines et donc de limiter l'effort de recherche.

Un algorithme de filtrage associé à une propriété Φ de consistance consiste à réduire les domaines d'un CSP afin qu'il vérifie Φ. Le CSP résultant de ce filtrage est inclus dans le CSP initial, c'est-à-dire que sonespace de recherche a été réduit tout en conservant l'ensemble de ses solutions.

Les filtrages par consistance présentées dans cette section sont à la base des techniques de filtrage de CSPs continus. Toutefois, s'il est envisageable pour des domaines finis d'éliminer les valeurs unes à unes, cela n'est pas possible pour des domaines non dénombrable comme les intervalles. On verra dans la section 3.5 comment ces techniques de consistance ont été adaptées aux CSPs continus.

2.3.1 Arc-consistance

L'arc-consistance est la plus populaire des consistances. Elle a été définie en 1975 par Waltz pour les CSPs binaires [?], puis étudiée par Mackworth [?] qui a notamment défini la première génération d'algorithme de filtrage par arc-consistance. Cette définition est basée sur la notion de *support*. De manière informelle, on dira qu'une valeur $v_i \in \boldsymbol{d}_i$ possède un support sur une contrainte c s'il existe une instanciation des autres variables dans leurs domaines qui satisfait c lorsque $x_i = v_i$. Le domaine d'une variable x_i est arc-consistant si chacune de ses valeurs possède un support sur toutes les contraintes du CSP. Un CSP est arc-consistant si tous ses domaines sont arc-consistants. Plus formellement,

Définition 2.3.1 (Notion de support) *Soit c une contrainte telle que $\mathcal{V}(c) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\}$. Soit v_{i_k} une valeur du domaine de la variable $x_{i_k} \in \mathcal{V}(c)$. Le* ***support*** *de v_{i_k} sur c est l'ensemble défini par :*

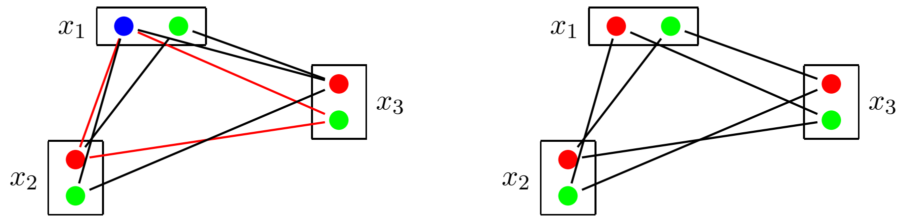
$$\pi_c^{v_{i_k}} = \{(v_{i_1}, \ldots, v_i, \ldots, v_{i_p}) \in c / v_{i_1} \in \boldsymbol{d}_{i_1} \ldots v_{i_p} \in \boldsymbol{d}_{i_p}\}$$

Remarque On dira que v_i possède un support sur c si $\pi_c^{v_i} \neq \emptyset$. Au contraire, v_i n'a pas de support sur c si $\pi_c^{v_i} = \emptyset$. Plus généralement, on dira que la valeur v_i d'une variable x_i a un support si $\forall c \in \mathcal{C}/x_i \in \mathcal{V}(c) : \pi_c^{v_i} \neq \emptyset$. La valeur v_i d'une variable x_i n'a pas de support si $\exists c \in \mathcal{C}/x_i \in \mathcal{V}(c) : \pi_c^{v_i} \neq \emptyset$.

Définition 2.3.2 (Arc-consistance [?]) *On dit que le domaine $\boldsymbol{d}_i$ d'une variable x_i est* ***arc-consistant*** *ssi :*

$$\forall v_i \in \boldsymbol{d}_i, \forall c_j \in \mathcal{C}/x_i \in \mathcal{V}(c_j) : \pi_{c_j}^{v_i} \neq \emptyset$$

Un CSP est ***arc-consistant*** *ssi tous ses domaines sont arc-consistants.*



(a) Un CSP arc-consistant et une de ses solutions(en rouge)

(b) Un CSP arc-consistant mais qui n'a pas de solutions

FIG. 2.4 – Arc-consistance pour un problème de coloriage de graphe

Exemple 2.3.1 *Considérons deux problèmes de coloriage de graphe a trois noeuds, décrits par les CSP $P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ et $P' = (\mathcal{X}, \mathcal{D}', \mathcal{C})$ tels que :*

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$
- $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1 : \{{\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}\},\ \boldsymbol{d}_2 : \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}\},\ \boldsymbol{d}_3 : \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}\}\}$
- $\mathcal{D}' = \{\boldsymbol{d}_1 : \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}\},\ \boldsymbol{d}_2 : \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}\},\ \boldsymbol{d}_3 : \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}\}\}$
- $\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} c_1 : x_1 \neq x_2 \\ c_2 : x_2 \neq x_3 \\ c_3 : x_1 \neq x_3 \end{array} \right.$

Tous les domaines du CSP P sont arc-consistants (Fig. 2.4(a)). Sur cet exemple, on voit bien que si $x_1 = {\color{blue}\bullet}$, c_1 (resp. c_3) est vérifiée pour $x_2 = {\color{red}\bullet}$ ou pour $x_2 = {\color{green}\bullet}$ (resp. $x_3 = {\color{red}\bullet}$ ou pour $x_3 = {\color{green}\bullet}$). Si $x_1 = {\color{green}\bullet}$, c_1 (resp. c_3) est vérifiée pour $x_2 = {\color{red}\bullet}$ (resp. $x_3 = {\color{red}\bullet}$). La figure 2.4(a) montre également qu'une solution possible de ce CSP est $({\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet})$. En revanche, le CSP P' est également arc-consistant (Fig. 2.4(b)), mais n'a pas de solutions.

Pour rendre un domaine arc-consistant il suffit d'éliminer les valeurs qui ne satisfont pas la propriété d'arc-consistance. L'élimination de ces valeurs ne modifient pas l'espace des solutions du CSP. Mackworth a défini l'un des premiers algorithmes pour calculer l'arc-consistance d'un CSP binaire : AC-3 [?]. Cet algorithme utilise la procédure Revise (Fig. 2.5) pour éliminer des domaines les valeurs qui n'ont pas de support sur une contrainte.

Pour que chaque arc du graphe soit consistant il ne suffit pas d'appeler Revise une seule fois sur tous les domaines. Chaque fois que le domaine $\boldsymbol{d}_i$ d'une variable x_i a été réduit par cette procédure, il faut vérifier si les domaines des variables reliées à x_i par une contrainte sont toujours arc-consistants. En effet, Revise peut éliminer dans $\boldsymbol{d}_i$ l'unique support d'une valeur d'un autre domaine $\boldsymbol{d}_k$; dans ce cas il faut remettre à jour $\boldsymbol{d}_k$. Chaque réduction d'un domaine doit donc être propagée sur l'ensemble du CSP jusqu'à qu'aucune réduction ne soit possible (fermeture par arc-consistance).

Mackworth a proposé un algorithme pour calculer efficacement le filtrage d'un CSP par arc-consistance [?]. Cet algorithme nommé AC-3 (Fig. 2.6) utilise la procédure Revise décrite dans la figure 2.5. Chaque fois que le domaine d'une variable x_i est modifié par la procédure Revise (ligne 6), AC-3 doit mettre à jour les domaines de toutes variables x_k reliées à x_i par une contrainte autre que celle qu'il vient de considérer (ligne 7).

Revise(in : x_i,c)

$m \leftarrow false$
%% m indique si le domaine de x_i a été modifié
foreach $v_i \in \boldsymbol{d}_i$ **do**
  if $\pi_c^{v_i} = \emptyset$ **then**
    %% v_i n'a pas de support sur c
    $\boldsymbol{d}_i \leftarrow \boldsymbol{d}_i \setminus \{v_i\}$
    $m \leftarrow true$
  endif
endfor
return(m)

FIG. 2.5 – Procédure Revise : élimine du domaine de x_i les valeurs qui n'ont pas de support sur la contrainte c. Revise retourne un booléen (m) qui indique si le domaine a été modifié.

AC-3(in-out :$P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$)

$Q \leftarrow \{\langle x_i, c_j \rangle : x_i \in \mathcal{V}(c_j)\}$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  extraire $\langle x_i, c \rangle$ de Q
  if Revise(x_i,c_j) **then**
    $Q \leftarrow Q \cup \{\langle x_k, c \rangle : c \neq c_j \wedge x_i, x_k \in \mathcal{V}(c)\}$
  endif
endwhile
return

FIG. 2.6 – Algorithme de propagation AC-3 [?]

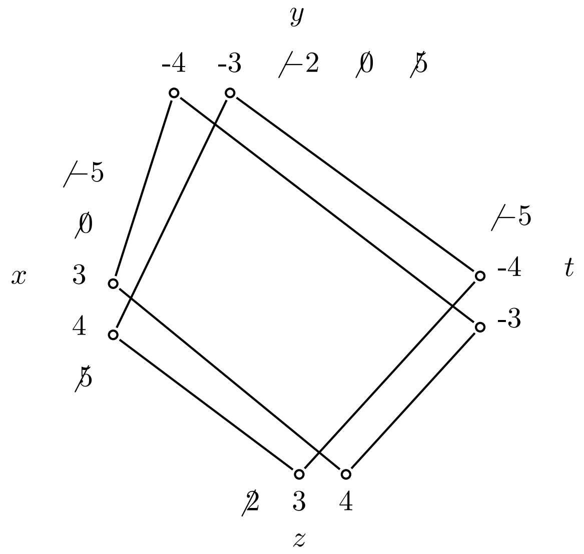


FIG. 2.7 – Filtrage par arc-consistance sur le CSP de l'exemple 2.1.1 page 6

2.3.2 Consistances partielles

La consistance d'arc permet de réduire l'espace de recherche d'un CSP mais ne suffit pas à résoudre le CSP. Afin de réduire davantage l'espace de recherche, des degrés de consistances plus fortes ont été introduite à la fin des années 70 par Freuder [?] : les k-consistances (Déf. 2.3.3) et les k-consistances fortes (Déf. 2.3.4).

Notons que la consistance de noeud est équivalente à la 1-consistance, l'arc-consistance est équivalente à la 2-consistance et la consistance de chemin est équivalente à la 3-consistance.

Définition 2.3.3 (k-consistance [?]) *Un CSP est k-**consistant** ssi toute instanciation partielle consistante de $k-1$ variables peut être étendue à une instanciation partielle consistante de k variables.*

Définition 2.3.4 (k-consistance forte [?]) *Un CSP est **fortement** k-**consistant** ssi il est j-consistant pour tout $j \leq k$.*

Des algorithmes pour calculer la k-consistance d'un CSP ont été définis [?, ?]. Si un CSP à n variables est fortement n-consistant alors il n'est plus nécessaire de recourir à un algorithme de backtrack pour le résoudre. Cependant la complexité en temps de calcul au pire des cas pour calculer la n-consistance forte est rédhibitoire. En fait, les k-consistance pour $k > 3$ sont très peu utilisées dû à la complexité exponentielle des algorithmes qui les calculent. De plus, la k-consistance n'est, en général, pas suffisante pour résoudre le CSP ; il faut donc encore faire appel au backtracking. Dans certains cas, selon la structure du graphe de contraintes, la k-consistance peut suffire à résoudre le CSP. D'autres techniques ont été élaborées pour réduire l'espace en recherche en utilisant les propriétés du graphe de contraintes (voir [?] pour plus de détails).

2.4 Amélioration de l'algorithme de recherche

Nous avons présenté deux techniques pour résoudre des CSPs finis : le backtracking et le filtrage par consistance. Dans la première, différentes instanciations de variables sont testées jusqu'à trouver une solution. Dans la deuxième, les valeurs inconsistantes (à différents degrés) sont éliminées des domaines. Or, ces deux techniques utilisées seules s'avèrent inefficaces pour résoudre des CSPs de grande taille.

Deux grandes familles d'heuristiques pour améliorer les performances de l'algorithme de backtracking se distinguent :

- Les approches prospectives (*Lookahead*) : Après chaque instanciation d'une variable, le *Lookahead* consiste à regarder dans les domaines des variables non encore instanciées s'il est possible d'éliminer des valeurs incompatibles avec l'instanciation courante. L'incompatibilité de ces valeurs peut être vérifiée à différents niveaux, ce qui a engendré différents algorithmes présentés dans [?] puis classifiés dans [?]. Les plus connus sont le *forward-checking* (FC), le *partial lookahead* (PL), le *full lookahead* (FL) et le *really full lookahead* (RFL). FC a longtemps été considéré comme la technique la plus efficace pour résoudre des CSPs finis. Plus récemment, Sabin *et. al.* ont développé une technique qui maintient la consistance d'arc après chaque nouvelle instanciation [?]. Il a été observé par des résultats expérimentaux que cette technique, nommé MAC (Maintaining Arc-Consistency), est plus efficace que FC.

– Les approches rétrospectives (*Lookback*) : Par exemple, le *backchecking*[?] ou le *backmarking* [?] tirent parti des informations contenues lors des échecs de consistance afin de sélectionner un meilleur point de retour. Il y a également d'autres techniques comme le *conflict-set* [?] ou le *backjumping*[?] : Lors d'un backtrack, plutôt que de revenir à la dernière variable instanciée, on revient à la variable qui a causé l'échec du test de consistance.

Dans l'algorithme de backtracking, l'ordre dans lequel les variables sont instanciées peut influencer de manière significative les performances de la résolution. L'ordre dans lequel les valeurs dans les domaines sont affectées peut également jouer un rôle déterminant dans la résolution. Cela a donné lieu à deux types d'heuristiques :

– Ordre de sélection des variables : L'une des méthodes les plus connues est de réorganiser dynamiquement les variables de manière à instancier en premier celle dont le domaine contient le moins de valeurs [?, ?].
– Ordre de sélection des valeurs : On peut par exemple choisir en premier les valeurs les moins contraintes en premier [?, ?, ?].

Les performances d'un algorithme de recherche de solutions d'un CSP fini dépendent donc essentiellement de deux facteurs : les filtrages, qui réduisent l'espace de recherche, et les heuristiques, qui permettent de parcourir cet espace plus intelligemment. Les filtrages forts réduisent grandement la taille de l'espace de recherche mais souvent au détriment des performances. On utilise donc en général des filtrages locaux comme l'arc-consistance. Cependant, le manque d'expressivité des contraintes et la faiblesse de ces filtrages locaux réduisent l'efficacité de la recherche de solutions. Il est donc intéressant de trouver des algorithmes de filtrage à la fois puissants et efficaces.

La section suivante présente les contraintes globales en domaines finis.

2.5 Contraintes globales

Les filtrages locaux, comme le filtrage par arc-consistance, sont bien souvent trop faibles car ce sont des algorithmes généraux qui ne tiennent pas compte de la spécificité des contraintes. D'autre part, l'arc-consistance considère les contraintes séparemment (localité) alors que certaines contraintes n'ont de sens que lorsqu'elles s'expriment toutes ensembles. Il est donc nécessaire dans ce cas de prendre en compte ces contraintes simultanément.

Une contrainte globale est une contrainte qui exprime un ensemble de contraintes. Plus précisemment, une contrainte globale est la conjonction d'un ensemble de relations :

Définition 2.5.1 (Contrainte globale) *Une contrainte globale C est définie par la conjonction d'un ensemble de contraintes $\{c_1, \ldots, c_n\}$:*

$$C = c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$$

Les contraintes globales expriment de manière plus compacte un ensemble de contraintes pour lequel on peut utiliser une méthode de filtrage adaptée. Par opposition aux techniques de consistances locales, les contraintes globales utilisent la simultanéité des contraintes et peuvent donc être associées à des techniques de filtrage plus forts.

La contrainte globale la plus ancienne et à la fois celle qui illustre le mieux le principe des contraintes globales est la contrainte AllDiff [?]. Cette contrainte exprime le fait que toutes les variables du CSP doivent être différentes deux à deux. Autrement dit, pour un ensemble

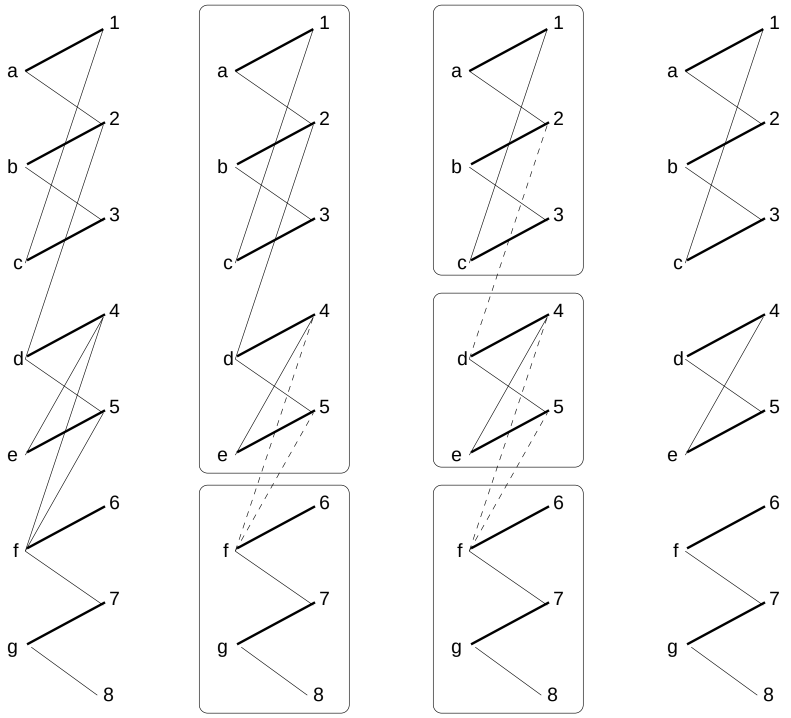


FIG. 2.8 – Illustration d'un filtrage par la contraint globale AllDiff

$\mathcal{X}$ de n variables, AllDiff est la conjonction des $n(n-1)$ contraintes de la forme $x_i \neq x_j$, avec $x_i, x_j \in \mathcal{X}$ et $i \neq j$.

Avec la contrainte AllDiff, il n'est plus nécessaire de représenter explicitement les contraintes, c'est à dire, pour chaque contrainte l'ensemble des couples qui la satisfont, d'où un gain en mémoire non négligeable. La force de la contrainte AllDiff est l'algorithme de filtrage par consistance d'arc qui lui est associé. Cet algorithme permet d'obtenir un filtrage des domaines plus fort qu'une réduction par arc-consistance sur le CSP binaire équivalent.

Par exemple, supposons que l'on ait un CSP à 3 variables x, y et z ayant pour domaine $\boldsymbol{d}_x = \boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{d}_z = a, b$, avec l'ensemble de contraintes binaires $\{x \neq y, x \neq z, y \neq z\}$. Sous cette forme, l'arc-consistance ne permet pas de réduire les domaines (voir exemple 2.3.1 page 12). Pourtant ce système n'a pas de solution. L'algorithme de filtrage associé à la contrainte AllDiff permet de détecter cette inconsistance.

L'algorithme de filtrage AllDiff[1] utilise une modélisation du problème par un graphe biparti, puis utilise plusieurs techniques de recherche opérationnelle pour éliminer les valeurs inconsistantes des domaines. Notemment, il utilise des techniques issues de la théorie des graphes comme le couplage maximum, la décomposition de Dulmage-Mendelson et les composantes fortement connexes. Il a été montré que cet algorithme calcule une réduction optimale des domaines [**?**]. La figure 2.8 montre une illustration de l'éxécution de cet algorithme.

D'autres contraintes globales ont été introduites, comme entre autres, *Global Cardinality*

[1] Par abus de langage, une contrainte globale désigne souvent à la fois l'ensemble des contraintes et l'algorithme de filtrage correspondant.

[?], *Symetric AllDiff* [?], *Cumulative* [?], ...

2.6 Synthèse

Chapitre 3

CSPs à domaines continus

La problématique des CSPs continus est radicalement différente de celle des CSP finis présentée dans le chapitre précédent. Un CSP continu est un CSP dont les domaines sont des intervalles, c'est-à-dire des ensembles non dénombrables de valeurs réelles contiguës. Les techniques de résolution comme le backtrack sont donc inutilisables en pratique. Il n'est évidemment pas envisageable d'instancier les variables en énumérant toutes les valeurs de tels domaines.

D'autre part, il n'existe pas de représentation efficace des ensembles de nombres réels, l'arithmétique des ordinateurs n'autorisant qu'une approximation des nombres réels : les nombres flottants. L'ensemble des nombres flottants représentables en machine, quelle que soit la représentation choisie, est un ensemble fini de valeurs discontinues, ce qui ne correspond pas avec la définition des CSPs continus.

Une autre manière de représenter les domaines continus est d'utiliser une approximation des intervalles sur les réels par des intervalles sur les flottants. L'arithmétique des intervalles fournit des bases solides pour l'édification de techniques de consistance pour les CSPs continus.

Ce chapitre présente les CSPs à domaines continus et les différentes approches pour les résoudre. La section 3.1 définit les CSPs continus et introduit la notation utilisée dans le reste de ce manuscrit. La section **??** présente brièvement les techniques de résolution issues de domaines hors de la PPC. La section 3.3 donne quelques notions d'arithmétique des intervalles qui seront utiles pour la compréhension de la suite. Les sections 3.5 et 3.6 présentent les techniques de consistance et les contraintes globales pour les CSPs continus. Enfin, différentes techniques de résolution seront présentées dans les sections 3.4 et 3.7.

3.1 Définition et exemple

Un CSP continu est défini de la manière suivante :

Définition 3.1.1 (CSP continu) *Un **CSP continu**, ou CSP à domaines continus, est défini par :*

- $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$*, un ensemble de n **variables**.*
- $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$*, un ensemble de **domaines**. Le domaine* $\boldsymbol{x}_i$ *est un intervalle contenant l'ensemble des valeurs autorisées pour la variable* x_i
- $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$*, un ensemble de **contraintes** reliant l'ensemble des variables* $\mathcal{X}$*.*

Remarque Les contraintes sont modélisées (*en intention*) par des équations numériques de la forme :

$$c_j : f_j(x_1, \ldots, x_n) \bowtie_j 0, \text{avec} \bowtie_j \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$$

Les domaines des variables étant non dénombrables, la modélisation des contraintes *en extension* n'est pas représentable en machine. Toutefois, une contrainte, au sens relationnel du terme, désigne l'ensemble des tuples qui la satisfont : x

$$c_j : \{(v_1, \ldots, v_n) : f_j(v_1, \ldots, v_n) \bowtie_j 0\}, \text{avec} \bowtie_j \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$$

On conservera donc la notation des CSPs finis : $(v_1, \ldots, v_n) \in c$ si c est satisfaite lorsque $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$. Les solutions d'un CSP sont définies par l'intersection de toutes les contraintes :

$$S = \bigcap_{i=1}^{i=m} c_i \cap (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

Exemple 3.1.1 (Exemple de CSP à domaines continus) *Soit le CSP* $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ *défini par :*
- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
- $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{x}_1 = [-5, 5],\ \boldsymbol{x}_2 = [-4, 5],\ \boldsymbol{x}_3 = [2, 4],\ \boldsymbol{x}_4 = [-5, -3]\}$,
- $\mathcal{C} = \begin{cases} c_1 : x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ c_2 : x_3^2 + x_4^2 = 25 \\ c_3 : x_1 + x_3 = 7 \\ c_4 : x_2 + x_4 = -7 \end{cases}$

Un CSP continu peut être résolu en utilisant une grande variété de méthodes de résolution dont des techniques issues de l'analyse numérique, de la programmation linéaire et non-linéaire, des techniques algébriques, des algorithmes évolutionnaires, de l'analyse par intervalles et des techniques de consistance. Ce chapitre est axé essentiellement sur les deux dernières catégories de méthodes. Dans la section **??**, d'autres méthodes de résolution seront présentées.

3.2 Méthodes issues des mathématiques conventionnelles

Il existe différentes approches issues des mathématiques conventionnelles pour résoudre des CSPs continus : des méthodes algébriques ou numériques.

Les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels sont relativement bien traités par ces outils mathématiques, notamment par la programmation linéaire ou l'algèbre linéaire. Par exemple, la méthode du simplexe [**?**] permet d'optimiser un critère linéaire sur des variables soumises à un système d'inégalités linéaires. La méthode d'élimination de Gauss est une méthode qui permet de trouver systématiquement les solutions d'un système linéaire bien-contraint. Ces outils sont disponibles dans un large panel de librairies mathématiques.

En revanche, les systèmes non-linéaires offrent plus de résistance aux techniques de programmation mathématique :
- Les méthodes algébriques se limitent au contraintes polynômiales et ne sont pas adaptées pour traiter des systèmes de grande taille. C'est le cas par exemple des solveurs basés sur les bases de Gröbner [**?**, **?**], qui permettent de calculer une formule exacte pour les solutions d'un système d'équations polynômiales. Toutefois une large classe de problèmes

peuvent être résolus par des bases de Gröbner. A l'heure actuelle l'algorithme le plus efficace est F_4 [?], disponible sur la plate-forme Magma.
- L'inconvénient des méthodes numériques est qu'elles ne convergent pas de manière systématique et peuvent avoir un comportement chaotique. Plusieurs méthodes numériques, comme par exemple la méthode de Newton, ont été étendues aux intervalles afin de pallier aux erreurs d'approximations liés à l'arithmétique sur les flottants. L'arithmétique des intervalles permet de calculer une enveloppe externe des solutions et donc de garantir la correction des résultats.

La programmation par contraintes en domaines continus et l'analyse par intervalles apportent différentes contributions dans la résolution de systèmes de contraintes. Les CSPs sont plus informés qu'un système général d'équations ou d'inéquations car l'espace de recherche des solutions est borné. Ces informations peuvent dans certains cas faciliter la résolution. Les techniques de consistances en domaines continus sont des méthodes générales, c'est-à-dire qu'elle peuvent traiter tout type de contraintes numériques, ce qui n'est pas le cas des méthodes algébriques par exemple. Enfin, l'arithmétique des intervalles permet de traiter des systèmes avec incertitudes sur les paramètres, ce qui n'est pas le cas des méthodes conventionnelles.

La section suivante présente les bases de l'arithmétique des intervalles.

3.3 Arithmétique des intervalles

L'objectif de cette section n'est pas de faire une description complète de l'arithmétique des intervalles et de ses propriétés, mais d'énoncer les définitions nécessaire à la compréhension du reste de ce manuscrit. Le lecteur pourra se reporter à [?, ?, ?, ?, ?, ?] pour plus détails à ce sujet.

3.3.1 Définitions et notations

Soit $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ étendu aux valeurs infinies $\{-\infty, +\infty\}$ et soit $\overline{\mathbb{F}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ le sous-ensemble des réels correspondants aux nombres flottants dans un format donné. L'intervalle *fermé* $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ dénote l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$. Les intervalles *ouverts* seront dénotés par $]\underline{x}, \overline{x}[= \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} < x < \overline{x}\}$. On dira que $\boldsymbol{x}$ est un intervalle *dégénéré* si $\underline{x} = \overline{x}$, et on notera x pour $[x, x]$.

On notera $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles à bornes dans $\mathbb{R}$. Les nombres réels n'étant pas tous représentables en machine, les intervalles réels sont approximés par des intervalles flottants. L'ensemble des intervalles à bornes dans $\mathbb{F}$ sera noté $\mathbb{IF}$. Dans la suite, on considérera que les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{IF}$. Les variables seront notées x, y et les vecteurs de variables par X, Y. Les intervalles seront notés $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et les vecteurs d'intervalles - ou *boîtes* - par $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$.

Notations Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombre réels
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}$ étendu à $\{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{F}$	L'ensemble des nombre flottants dans un format donné ($\overline{\mathbb{F}} \subset \overline{\mathbb{R}}$).
$\overline{\mathbb{F}}$	$\mathbb{F}$ étendu à $\{-\infty, +\infty\}$
$[\underline{x}, \overline{x}]$	un intervalle fermé (l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$)
$]\underline{x}, \overline{x}[$	un intervalle ouvert (l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\underline{x} < x < \overline{x}$)
$m(\boldsymbol{x})$	le milieu de l'intervalle $\boldsymbol{x}$ ($m(\boldsymbol{x}) = (\overline{x} + \underline{x})/2$)
$w(\boldsymbol{x})$	la taille de l'intervalle $\boldsymbol{x}$ ($w(\boldsymbol{x}) = \overline{x} - \underline{x}$)
$\mathbb{IR}$	l'ensemble des intervalles à bornes dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{IF}$	l'ensemble des intervalles à bornes dans $\mathbb{F}$.
x, y, z	des variables réelles
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$	des intervalles
X, Y, Z	des vecteurs de variables réelles
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$	des vecteurs d'intervalles - ou *boîtes*
$\boldsymbol{X} = \emptyset$	si une des composantes $\boldsymbol{x}_i$ de $\boldsymbol{X}$ est vide
$w(\boldsymbol{X})$	La taille du plus grand intervalle qui compose $\boldsymbol{X}$

3.3.2 Opérateurs arithmétiques

L'arithmétique des intervalles est une *extension* de l'arithmétique sur les réels [?]. L'extension aux intervalles $\odot$ d'un opérateur sur les réels $\cdot$ doit respecter la propriété suivante :

$$\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y} = \{x \cdot y : x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{y}\}$$

Les extensions aux intervalles des opérateurs arithmétiques de base sur les réels ont été définis de la manière suivante :

Définition 3.3.1 (Opérateurs arithmétiques de base sur les intervalles [?]) *Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux intervalles, les opérateurs arithmétiques de base sur les intervalles sont définis de la manière suivante :*

$$\begin{array}{lcll}
[\underline{x}, \overline{x}] \oplus [\underline{y}, \overline{y}] & = & [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] & \\
[\underline{x}, \overline{x}] \ominus [\underline{y}, \overline{y}] & = & [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] & \\
[\underline{x}, \overline{x}] \otimes [\underline{y}, \overline{y}] & = & [min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}), max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y})] & \\
[\underline{x}, \overline{x}] \oslash [\underline{y}, \overline{y}] & & [min(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}), max(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}})] & \textit{si } 0 \notin \boldsymbol{y}
\end{array}$$

On peut étendre cette arithmétique aux fonctions élémentaires (cos,sin,log,exp,...) [?]. D'autres opérateurs comme la puissance on été définis :

$$\boldsymbol{x}^n = \begin{cases} [1, 1] & \text{si } n = 0 \\ [\underline{x}^n, \overline{x}^n] & \text{si } \underline{x} \geq 0 \text{ ou si } 0 \in \boldsymbol{x} \text{ et } n \text{ est impair} \\ [\overline{x}^n, \underline{x}^n] & \text{si } \overline{x} \leq 0 \\ [0, \max(\underline{x}^n, \overline{x}^n)] & \text{si } 0 \in \boldsymbol{x} \text{ et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Remarque L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives :

$$\begin{array}{rcll}
\text{Commutatitivité} & : & \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{x} \\
\text{Associativité} & : & \boldsymbol{x} \oplus (\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) \oplus \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} \otimes (\boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{z}
\end{array}$$

Cependant, la distributivité n'est plus valide. De manière générale, une propriété plus faible est vérifiée : la sous-distributivité [**?**]. Cette propriété énonce que quels que soient les intervalles $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$:

$$\text{Sous-distributivité :} \quad \boldsymbol{x} \otimes (\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}) \subseteq \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z}$$

L'utilisation des nombres à virgule flottante pour les calculs d'expressions numériques entraîne des erreurs de calcul auquel l'arithmétique des intervalles peut pallier. Il suffit d'arrondir vers l'extérieur chaque opération de base [**?**], afin de garantir que le résultat réel soit inclus dans le résultat intervalle. Plusieurs normes IEEE ont été définies en ce sens.

Plus précisément, étant donné un nombre flottant $f \in \mathbb{F}$, on désignera par f^+ le plus petit nombre flottant supérieur à f. Par analogie, f^- le plus grand nombre flottant inférieur à f. L'arrondi supérieur d'un réel r est le plus petit flottant supérieur à r, noté $\lceil r \rceil$. L'arrondi inférieur de r est le plus grand flottant inférieur à r, noté $\lfloor r \rfloor$. Un intervalle réel $[a, b] \in \mathbb{IR}$ est arrondi à l'extérieur par l'intervalle flottant $[\lfloor a \rfloor, \lceil b \rceil]$. Chaque intervalle résultant d'un calcul intermédiaire lors d'une évaluation par intervalles doit être arrondi de cette manière. Cela alourdi le calcul mais permet de garantir la *correction* du résultat.

Arithmétique étendue Dans les règles de calcul énoncées dans la définition 3.3.1, la division par un intervalle contenant zéro a été exclue. En effet, cela suppose de gérer correctement les valeurs $\pm\infty$. Une arithmétique étendue a donc été définie dans ce sens [**?**], dans laquelle les définitions des opérateurs de base $\oplus$, $\ominus$ et $\otimes$ sont notamment étendus aux valeurs $\pm\infty$. D'autre part, il est possible en utilisant l'arithmétique des intervalles étendus de calculer une évaluation de $\boldsymbol{x} \oslash \boldsymbol{y}$ lorsque $0 \in \boldsymbol{y}$ (Ex. 3.3.1). Cette évaluation est dans certains cas une union d'intervalles, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.3.1 *Soient* $\boldsymbol{x} = [-1, 1]$ *et* $\boldsymbol{y} = [-2, 2]$ *deux intervalles. L'évaluation par intervalles de* $\boldsymbol{x} \oslash \boldsymbol{y}$ *en utilisant l'arithmétique étendue est* $[-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty]$.

3.3.3 Extension aux intervalles

Les fonctions et contraintes numériques, tout comme les expressions arithmétiques, peuvent être étendues aux intervalles. De la même manière que pour les opérateurs arithmétiques, une extension aux intervalles d'une fonction f doit respecter certaines propriétés. On dira que $\boldsymbol{f}$ est une extension aux intervalles de f si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ est un intervalle contenant toutes les valeurs de f, lorsque les x_i prennent leurs valeurs dans $\boldsymbol{x}_i$. Formellement,

Définition 3.3.2 (Extension d'une fonction aux intervalles [?, ?]) *Soit* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction à valeurs réelles à* n *inconnues* $X = (x_1, \ldots, x_n)$. *Une* ***extension aux intervalles*** *de* f *est une fonction* $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$ *telle que :*

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{I} : x_1 \in \boldsymbol{x}_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{x}_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

Une évaluation par intervalle d'une $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur une boite donnée $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ est un intervalle $\boldsymbol{y}$ tel que :

$$\forall x_i \in \boldsymbol{x}_i, 1 \leq i \leq n : \qquad \underline{y} \leq f(x_1, \ldots, x_n) \leq \overline{y}$$

En d'autres termes, $\boldsymbol{y}$ est un intervalle qui contient toutes les valeurs de f lorsque les valeurs des inconnues sont restreintes à la boîte $\boldsymbol{X}$.

La manière la plus simple de calculer $\boldsymbol{y}$ est d'évaluer l'**extension naturelle** de f (Ex. 3.3.2), obtenue en substituant tous les opérateurs mathématiques classiques (resp. les constantes et les variables) de f par leur extension *basique* aux intervalles [?, ?]. Le même principe peut être appliqué pour calculer une union d'intervalles qui contient toutes les valeurs de f, en utilisant l'arithmétique des intervalles étendue.

Exemple 3.3.2 (Extension naturelle) *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x, y, z) = 2x + yz - 1$. *L'extension naturelle de* f *est la fonction intervalles* $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^3 \to \mathbb{IR}$ *définie par* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 2 \otimes \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z} \ominus 1$. *Une évaluation de* f *sur la boîte* $\boldsymbol{X} = ([-1, 1], [-1, 1], [1, 2])$ *est donc* $2 \otimes [-1, 1] \oplus [-1, 1] \otimes [1, 2] \ominus 1 = [-5, 3]$.

La définition (Déf. 3.3.2) peut être étendue aux contraintes de la manière suivante :

Définition 3.3.3 (Extension d'une contrainte aux intervalles [?]) *Une* ***extension aux intervalles*** *d'une contrainte* $c \subseteq \mathbb{R}^n$ *est une relation* $\boldsymbol{c} \subseteq \mathbb{IR}^n$ *telle que :*

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{I} : x_1 \in \boldsymbol{x}_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{x}_n \Rightarrow ((x_1, \ldots, x_n) \in c \Rightarrow (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \boldsymbol{c})$$

Une relation sur $\mathbb{R}$ peut être approximée par un intervalle contenant l'ensemble des éléments de cette relation (Déf. 3.3.4).

Définition 3.3.4 (Enveloppe intervalle d'une relation sur $\mathbb{R}$) . *Soit* $\rho \subseteq \mathbb{R}$, *un sous-ensemble de l'ensemble des réels, l'**enveloppe intervalle** de* ρ, *notée* $\Box_{\mathbb{I}}(\rho)$, *est définie par l'intervalle :*

$$\Box_{\mathbb{I}}(\rho) = [\inf \rho, \sup \rho]$$

De même, une relation sur $\mathbb{R}^n$ peut être approximée par une boîte contenant l'ensemble des éléments de cette relation (Déf. 3.3.6). Cette boîte est le produit cartésien des enveloppes intervalles des projections de la relation sur chacune des dimension de $\mathbb{R}^n$ (Déf. 3.3.5).

Définition 3.3.5 (Projection d'une relation sur $\mathbb{R}^n$) *Soit* $\rho \subseteq \mathbb{R}^n$, *la* ***projection*** *de* ρ *sur la dimension* i *est définie par le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\pi_i(\rho) = \{v_i \in \mathbb{R} : (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \in \rho\}$$

Définition 3.3.6 (Enveloppe intervalle d'une relation sur $\mathbb{R}^n$) . *Soit* $\rho \subseteq \mathbb{R}^n$, *l'**enveloppe intervalle** de* ρ *est définie par la boîte :*

$$(\Box_{\mathbb{I}}(\pi_1(\rho)), \ldots, \Box_{\mathbb{I}}(\pi_n(\rho))) \in \mathbb{IR}$$

3.3.4 Problème de dépendance des variables

Supposons que l'on veuille soustraire un intervalle $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ de lui-même. Le résultat attendu est évidemment 0 et pourtant en utilisant les règles de calcul énoncées plus haut on obtiendrait $[\underline{x} - \overline{x}, \overline{x} - \underline{x}]$. Le résultat obtenu est $\{x - y : x \in \boldsymbol{x}, y \in \boldsymbol{x}\}$ au lieu de $\{x - x : x \in \boldsymbol{x}\}$.

En fait, lorsqu'une variable apparaît plus d'une fois dans une expression (*occurrence multiple*) elle est traitée comme si c'était une variable différente à chaque occurrence. Dans l'exemple précédent, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}$ a été traité comme $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ avec $\boldsymbol{x}$ égal à $\boldsymbol{y}$, comme si x et y étaient deux variables indépendantes.

Le problème de dépendance a pour effet d'augmenter la taille de l'intervalle résultant de l'évaluation d'une expression. La forme syntaxique des fonctions joue un rôle déterminant dans leur évaluation par intervalles (Ex. 3.3.3) Il a été montré [?] qu'une expression sans occurrences multiples de la même variable s'évalue de manière exacte (Prop. 3.3.1).

Exemple 3.3.3 (Influence de la forme syntaxique des fonctions) *Considérons les fonctions* $f_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ *et* $f_2(x, y) = (x + y)^2$, *avec* $x, y \in \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. *Pour certaines valeurs de* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$, *l'évaluation de* f_1 *sur* $\boldsymbol{X}$ *est plus grossière que celle de* f_2. *Par exemple, si* $\boldsymbol{X} = ([-1, 2], [-1, 2])$ *alors* $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{X}) = [-4, 16]$ *et* $\boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{X}) = [0, 16]$.

Proposition 3.3.1 ([?]) *Soit* $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ *l'extension naturelle aux intervalles de* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Si toutes les variables n'apparaissent qu'une seule fois dans l'expression arithmétique de* f *alors :*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \Box_{\mathbb{I}}\{f(v_1, \ldots, v_n) : x_1 \in \boldsymbol{x}_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{x}_n\}$$

Sinon,

$$\Box_{\mathbb{I}}\{f(v_1, \ldots, v_n) : x_1 \in \boldsymbol{x}_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

La section suivante présente les algorithmes de résolution de CSPs continus basés sur les techniques de consistance.

3.4 Résolution de CSPs continus

La méthode la plus courante pour résoudre un CSP à domaine continu est d'utiliser un algorithme de type Branch&Prune, dont le schéma général est donné par la figure 3.1. Cet algorithme alterne réduction des domaines et décomposition de domaines jusqu'à ce qu'une précision donnée sur les boîtes ω_{sol} soit atteinte. La fonction Prune (ligne 5) est un des algorithmes de filtrage standard basé sur les techniques de consistances pour les CSPs numériques : Hull-consistance, Box-consistance ou kB-consistances. La fonction Split (ligne 10) sélectionne une variable et décompose le domaine associé. Les problèmes générés sont ajoutés à l'ensemble Q.

Dans la suite de cette section, on s'attachera à décrire plus précisément l'étape de splitting. Dans la section 3.5, les principales techniques de filtrage issues de la programmation par contrainte seront présentées.

La section suivante présente les différentes heuristiques pour améliorer la recherche des solutions.

3.4.1 Heuristiques de recherche

Tout comme pour l'algorithme de backtracking pour les CSPs finis, les performances d'un algorithme de recherche basé sur ce schéma dépend de plusieurs facteurs, dont l'ordre de sélection des domaines et le choix des points de coupe dans le domaine sélectionné.

```
BranchAndPrune(in : X_0, C, ω_sol out : S)
%% X_0 = (x_1, ..., x_n)
Q ← {X_0}
S ← ∅
while Q ≠ ∅ do
  Extract X from Q
  X ← Prune(C, X)
  if X ≠ ∅ then
    if w(X) ≤ ω_sol then
      S ← S ∪ X
    else
        % Standard splitting process
      Q ← Q ∪ Split(X)
    endif
  endif
endwhile
return S
```

FIG. 3.1 – Schéma général de l'algorithme de recherche standard

Stratégies de sélection de domaine Étant donné une boîte $\boldsymbol{X}$, le splitting consiste tout d'abord à choisir un domaine $\boldsymbol{x}_i$ à décomposer. Ce choix peut être déterminé de manière statique ou bien dynamiquement pendant la résolution. Les trois heuristiques les plus utilisées sont les suivantes :

- RR (Round Robin) : les domaines sont sélectionnés les uns à la suite des autres dans un ordre statique, autrement dit défini par l'utilisateur. Cette stratégie est considérée comme étant la plus efficace car elle permet d'équilibrer les choix de variables durant le processus de recherche.
- LF (Largest First) : à chaque étape de splitting, le domaine le plus grand est sélectionné. Cette stratégie est souvent combinée avec RR, car elle conduit souvent à sélectionner la même variable plusieurs fois d'affilée. Autrement dit, si une variable x_k est sélectionnée plus de p fois à la suite, un RR est alors utilisé pour passer à la variable x_{k+1}.
- MS (Maximal Smear) : à chaque étape de splitting, le domaine qui maximise la "smear function" est sélectionné. La smear function donne une indication sur le potentiel de filtrage d'une variable ; MS sélectionne la variable dont la projection sur l'une des contraintes a la plus grande pente. Plus précisément, la smear function de la variable x_k est définie par :

  $$s_k = \max_{1 \leq j \leq m} \{\max\{|\underline{J}_{i,j}|, |\overline{J}_{i,j}|\} w(\boldsymbol{x}_i)\},$$

  où $\boldsymbol{J}_{i,j} = [\underline{J}_{i,j}, \overline{J}_{i,j}]$ est la (i, j)-ème entrée de l'extension aux intervalles de la matrice Jacobienne du système.

Stratégies de décomposition Une fois que le domaine d'une variable a été sélectionné, il s'agit de déterminer un ou plusieurs points de coupe à l'intérieur de ce domaine pour générer les sous-problèmes.

La stratégie à la fois la plus simple et la plus efficace en pratique est de couper en 2 parties de même taille : la *bisection* ; c'est-à-dire le point de coupe choisi est le milieu de l'intervalle. Concernant la bisection, il n'est pas nécessaire de couper l'intervalle choisi en son milieu, on peut choisir n'importe quel point de l'intervalle. Quelques études ont porté sur le choix de ce point de coupe notamment dans [?], mais sans toutefois proposer de résultats expérimentaux.

D'autres stratégies de splitting sélectionnent plusieurs points de coupe en général dans le même domaine. Plus précisément, la multisection découpe le domaine sélectionné en k parties de même taille. En pratique, il est souvent plus avantageux de couper le domaine en 2 ou 3 parties puis de faire confiance au filtrage pour réduire l'espace de recherche.

La section suivante présente les principales techniques de filtrage par consistance pour les CSPs continus.

3.5 Filtrage par consistance

Le filtrage joue un rôle important dans la recherche de solution car il permet de réduire l'espace de recherche. Différents algorithmes de réduction des bornes des domaines ont été conçus et définis par des propriétés de consistances. Les principales caractéristiques de ces propriétés sont d'une part la complétude, c'est-à-dire qu'elles garantissent qu'aucune solution n'est perdue. En revanche, elles ne pas "sound", c'est-à-dire qu'elles ne garantissent pas l'existence de solutions.

Tout comme pour les CSPs finis, il y a différents niveaux de consistance pour les CSPs continus qui se divisent en deux catégories : les consistances locales et les consistances partielles. Les consistances locales sont des propriétés qui ne portent que sur une seule contrainte. Les consistances partielles mettent en jeu un ensemble de contraintes (ou un sous-ensemble). Ces propriétés sont établies par des algorithme dits de *filtrage par consistance*, qui éliminent des domaines les valeurs inconsistantes. Pour éviter l'explosion combinatoire due à la gestion d'unions d'intervalles, les réductions des domaine sont opérées uniquement aux bornes des domaines.

Les sections 3.5.1 et 3.5.2 décrivent respectivement les principales techniques de filtrage par consistance locale et par consistance partielle.

3.5.1 Consistances locales

L'algorithme classique pour calculer un filtrage par consistance locale, nommé IN-1 (Fig. 3.2), est basé sur le même schéma que l'algorithme AC-3 (Fig. 2.6 page 13) qui calcule l'arc-consistance pour des CSPs finis. Cet algorithme utilise une procédure de réduction des domaines, nommée Narrow, qui joue le même rôle que la procédure Revise (Fig. 2.5 page 13).

Autrement dit, Narrow établit une propriété de consistance locale Φ sur les domaines des variables d'une contrainte, en éliminant les valeurs ne respectant Φ. Cette propriété de consistance est associée à un opérateur de narrowing (Déf. 3.5.1), qui garantit la convergence de IN-1 et la conservation de l'espace des solutions.

Définition 3.5.1 (Opérateurs de narrowing [?]) *Soit c une contrainte n-aire. Un* ***opérateur de narrowing*** *pour la contrainte c est une application* $\phi : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ *telle que pour tout*

IN-1(in-out :$P = (\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$)

$Q \leftarrow \{\langle x_i, c_j\rangle : x_i \in \mathcal{V}(c_j)\}$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  extraire $\langle x_i, c\rangle$ de Q
  if Narrow(x_i,c_j) **then**
    $Q \leftarrow Q \cup \{\langle x_k, c\rangle : c \neq c_j \wedge x_i, x_k \in \mathcal{V}(c)\}$
  endif
endwhile
return

FIG. 3.2 – Algorithme de propagation IN-1

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{IR}$ *les propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{array}{cc} \phi(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X} & \textit{(Contractance)} \\ c \cap \boldsymbol{X} \subseteq \phi(\boldsymbol{X}) & \textit{(Correction)} \\ \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Y} \Longrightarrow \phi(\boldsymbol{X}) \subseteq \phi(\boldsymbol{Y}) & \textit{(Monotonie)} \end{array}$$

Le filtrage par propagation peut engendrer des cycles de réductions faibles et de ce fait entraîner des phénomènes de convergence lente. Cela se produit en particulier quand la fonction Narrow réduit faiblement les domaines. Différentes techniques d'accélération de la convergence ont été proposées, comme les méthodes d'extrapolation [?]. La propagation peut également être court-circuitée lorsque la réduction du domaine n'est pas suffisante.

Les deux consistances locales les plus utilisées sont la Hull-consistance ou 2B-consistance [?, ?, ?, ?, ?, ?] et la Box-consistance [?, ?, ?]. Les algorithmes qui calculent ces consistances sont définis par un opérateur de narrowing spécifique, que nous nommerons HCNarrow pour la Hull-consistance et BCNarrow pour la Box-consistance. Les deux paragraphes suivants décrivent ces opérateurs.

Hull-consistance La Hull-consistance ou 2B-consistance [?, ?, ?, ?, ?, ?] est une approximation de l'arc-consistance. L'arc-consistance établit une propriété sur tous les éléments du domaine, alors que la Hull-consistance établit cette propriété uniquement sur les bornes. Une contrainte c est dite Hull-consistante si pour toute variable x_i de $\mathcal{V}(c)$, il existe une valeur dans les domaines des autres variables qui satisfait c lorsque x_i est instanciée à $\underline{x}_i$ ou à $\overline{x}_i$.

La Hull-consistance est basée sur la notion de projection de contrainte (Déf. 3.5.2) ou fonction de projection. La projection d'une contrainte c sur une variable x_k pour une boîte $\boldsymbol{X}$ est l'ensemble des valeurs de $v_k \in \boldsymbol{x}_k$ pour lesquelles il existe une affectation des autres variables dans leurs domaines qui satisfait c. Plus formellement,

Définition 3.5.2 (Projection d'une contrainte) *Soit $c(x_1, \ldots, x_n)$ une contrainte n-aire. La k-ème projection de c par rapport à la boîte $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ est définie par :*

$$\begin{array}{ll} \pi_k(c \cap \boldsymbol{X}) = \{v_k \in \boldsymbol{x}_k | & \exists v_1 \in \boldsymbol{x}_1, \ldots, \exists v_{k-1} \in \boldsymbol{x}_{k-1}, \\ & \exists v_{k+1} \in \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \exists v_n \in \boldsymbol{x}_n \quad \textit{t.q.}\ (v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, v_n) \in c\} \end{array}$$

Ainsi, une contrainte c est Hull-consistante si le domaine de chacune de ses variables x_k est égal à l'intervalle englobant la projection de c sur x_k :

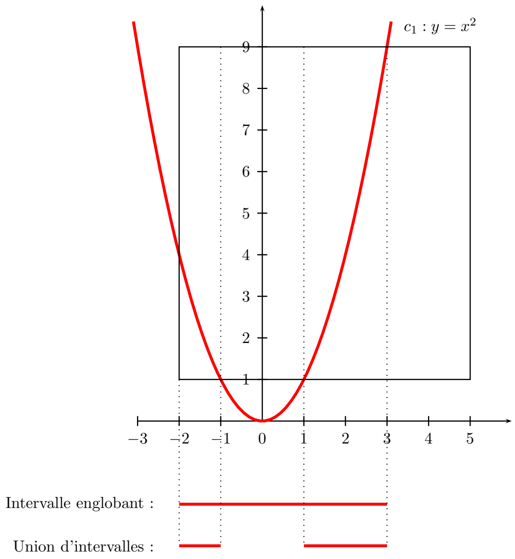


FIG. 3.3 – Projection d'une contrainte

Définition 3.5.3 (Hull-consistance [?, ?]) *Soit c une contrainte n-aire. c est Hull-consistante sur la boîte $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ ssi $\forall x_k \in \mathcal{V}(c), \boldsymbol{x}_k = \Box_{\mathbb{I}}(\pi_k(c \cap \boldsymbol{X}))$. Un CSP est Hull-consistant ssi toutes ses contraintes sont Hull-consistantes.*

Les fonctions de projections peuvent être approximées par un intervalle englobant, en général c'est ce que l'on obtient en utilisant l'arithmétique de base sur les intervalles. En revanche, en utilisant l'arithmétique étendue, on peut approximer ces fonctions de projection de manière plus fine par une union d'intervalles. Par exemple, la figure 3.3 montre que la projection sur x de la contrainte $c : y = x^2$ pour la boîte $[-3, 3] \times [1, 9]$ peut être approximée par l'intervalle $[-3, 3]$ ou l'union d'intervalles $[-3, -1] \cup [1, 3]$.

Le calcul de ces fonctions de projections est donc au coeur des algorithmes qui calculent la Hull-consistance. Différentes techniques ont été proposées pour calculer ces fonctions de projection. La première de ces techniques consiste à décomposer le système de contraintes en contraintes élémentaires (unaires, binaires ou ternaires) pour lesquelles il est facile d'évaluer ces projections. Par exemple, la décomposition en contraintes élémentaire de la contrainte $c : (xy)^3 + z^2 + xy = 0$ est le système suivant :

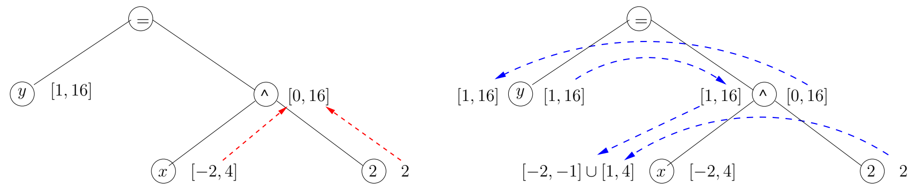
$$\left\{ \begin{array}{rcl} X^3 + Y + X & = & 0, \\ X & = & xy, \\ Y & = & z^2, \end{array} \right.$$

L'inconvénient d'une telle décomposition est l'introduction de nombreuses variables additionnelles. En effet, celles-ci introduisent un coût supplémentaire à la fois en mémoire et en temps de calcul.

L'implantation la plus efficace de la Hull-consistance, nommée HC4 [?], est basée sur l'opérateur de réduction HC4Revise. La figure 3.4 illustre l'exécution de HC4Revise sur la contrainte $c : y = x^2$ pour la boîte $[-2, 4] \times [1, 16]$.

Cette implantation ne nécessite aucune décomposition explicite des contraintes. Toutes les projections sont calculées en traversant la représentation arborescente des contraintes en deux étapes :

- *Forward Propagation* : Durant cette phase, les expressions associées à chaque noeud sont évaluées par un parcours infixe de l'arbre syntaxique. Les valeurs associées à chaque noeud de l'arbre sont calculées en utilisant l'opérateur correspondant et les domaines associés à ses sous-arbres.
- *Backward Propagation* : L'arbre est parcouru dans le sens inverse pour réduire les domaines des variables, en utilisant les fonctions de projection associés à chacun des opérateurs.



(a) Forward propagation (b) Backward propagation

FIG. 3.4 – Opérateur de réduction HC4revise.

Box-consistance La Box-consistance [?, ?] est une approximation plus grossière de l'arc-consistance que la Hull-consistance. Pourtant, en pratique, elle permet d'obtenir un filtrage plus fort des domaines. D'autre part, la Box-consistance permet dans certains cas de remédier au problème de dépendances des variables, autrement dit lorsque certaines variables apparaissent plusieurs fois dans la même contrainte.

Une contrainte c est Box-consistante si pour toutes les variables x_i de $\mathbb{V}_c$, les bornes de $\boldsymbol{x}_i$ satisfont la contraintes unaire obtenu en remplaçant chaque occurrence d'une variable x_j autre que x_i par l'intervalle constant $\boldsymbol{x}_j$. Plus formellement,

Définition 3.5.4 (Box-consistance [?, ?]) *Soit c une contrainte n-aire. c est Box-consistante pour la boîte $\boldsymbol{X}$ ssi $\forall x_i$ les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, [\underline{x}_i, \underline{x}_i^+), \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
2. $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, (\overline{x}_i^-, \overline{x}_i], \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$

Un CSP est Box-consistant si toutes ses contraintes sont Box-consistantes.

La Box-consistance génère un ensemble de fonctions univariées qui peuvent être résolues par des méthodes numériques comme la méthode de Newton [?]. Le filtrage consiste à trouver les quasi-zéros extrêmes de ces fonctions univariées. Un quasi-zéro est défini de la manière suivante :

Définition 3.5.5 (Quasi-Zéro) *Un quasi-zéro de la fonction $\boldsymbol{f}$ est une boîte $\boldsymbol{X}$ telle que* $0 \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$.

Soit BCNarrow, l'opérateur de réduction associé à la Box-consistance. BCNarrow(c,$\boldsymbol{X}$) réduit le domaine de chaque variables de c jusqu'à ce que c soit Box-consistante. Pour chaque x_k de c, une fonction intervalle univariée $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_k}$ est générée à partir de c, en remplaçant toutes les

BCNarrow(in :c, $\boldsymbol{X}$) : Interval vector

% $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
foreach $x_k \in \mathbb{V}_c$ **do**
  $\boldsymbol{x}_k \leftarrow \mathsf{LeftNarrow}(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_k}, \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}_k}, \boldsymbol{x}_k)$
  $\boldsymbol{x}_k \leftarrow \mathsf{RightNarrow}(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_k}, \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}_k}, \boldsymbol{x}_k)$
  if $\boldsymbol{x}_k = \emptyset$ **then**
    return $\emptyset$
  endif
endfor
return $\boldsymbol{X}$

FIG. 3.5 – L'opérateur de Narrowing associé à la Box-consistance

variables sauf x_k par leur domaine associé. Le filtrage consiste alors à trouver le quasi-zéro le plus à gauche et le quasi-zéro le plus à droite de $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_k}$.

Cette réduction est calculée pour la borne inférieure par la fonction LeftNarrow (voir figure 3.6) et pour la borne supérieure par la fonction RightNarrow (voir [?, ?] pour plus de détails sur ces algorithmes).

LeftNarrow(in :$\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{f}'$,$\boldsymbol{x}$) : Interval

$r \leftarrow \overline{x}$
if $0 \notin \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **then**
  return $\emptyset$
endif
$\boldsymbol{x} \leftarrow \mathsf{MonoNewton}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', \boldsymbol{x})$
if $0 \in \boldsymbol{f}([\underline{x}, \underline{x}^+])$ **then**
  return $[\underline{x}, r]$
else
  $l \leftarrow \mathsf{LeftNarrow}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', [\underline{x}, m(\boldsymbol{x})])$
  if $l = \emptyset$ **then**
    $l \leftarrow \mathsf{LeftNarrow}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', [m(\boldsymbol{x}), \overline{x}])$
  endif
  return $[\underline{l}, r]$
endif
return $\boldsymbol{x}$

FIG. 3.6 – LeftNarrow :L'opérateur de réduction de la borne inférieure, qui recherche le quasi-zéro le plus à droite.

De manière informelle, LeftNarrow tente de réduire la borne inférieure d'un domaine $\boldsymbol{x} = [a, b]$ par rapport à une contrainte c. Pour cela, LeftNarrow vérifie si $[a, \frac{a+b}{2}]$ est un quasi-zéro de $\boldsymbol{f}_x$. Si ce n'est pas le cas alors la recherche du quasi-zéro le plus à droite se poursuit avec l'intervalle $[\frac{a+b}{2}, b]$. Sinon, LeftNarrow réduit $[a, \frac{a+b}{2}]$ avec le Newton monovarié et poursuit sa recherche dans la moitié gauche de l'intervalle réduit. L'opérateur de Newton monovarié sera détaillé dans la section 8.3.3 page 80.

La section suivante présente les techniques de consistance partielles pour les CSPs conti-

```
3BPrune(in-out : P)
FP = (fp_1, ..., fp_n)
S = (s_1, ..., s_n)
foreach i ≤ n do
  fp_i ← false
  s_i ← +∞
endfor
while ∃i s.t. fp_i = false do
  foreach i ≤ n do
    if ¬fp_i then
      s_i ← min(s_i, w(x_i))/2
      if s_i ≤ ω then
        fp_i ← true
        s_i ← ω
      endif
    endif
  endfor
  X = 3BFixpoint(P, S)
endwhile
```

```
3BFixpoint(in : P, S)
fp ← false
foreach i ≤ n do
  if 2BPrune(P_{x_i ← [x̲_i, x̲_i + s_i]}) = ∅ then
    fp ← false
    x_i ← x_i \ [x̲_i, x̲_i + s_i]
    X ← 2BPrune(P)
  endif
  if 2BPrune(P_{x_i ← [x̄_i − s_i, x̄_i]}) = ∅ then
    fp ← false
    x_i ← x_i \ [x̄_i − s_i, x̄_i]
    X ← 2BPrune(P)
  endif
endfor
return X
```

FIG. 3.7 – 3BPrune : Algorithme de fermeture par 3B-consistance

nus.

3.5.2 Consistances partielles

Les consistances partielles, comme les kB-consistances [?, ?], sont des consistances qui ne sont pas strictement locales. Pour réduire les domaines, ces consistances tentent de prouver que certaines parties de ces domaines sont inconsistantes. La kB-consistance tente de rejeter $[\underline{x}, s]$ ou $[s, \overline{x}]$, avec $s \in [\underline{x}, \overline{x}]$, en utilisant une consistance plus faible, la $(k-1)$B-consistance.

La kB-consistance est a une définition récursive basée sur la 2B-consistance, qui est équivalente à la Hull-consistance. D'autres consistances peuvent être définie en se basant sur d'autres consistances locales. C'est le cas de la Bound-consistance [?], qui est similaire à la 3B-consistance mais avec schéma récursif basé sur la Box-consistance. Plus formellement,

Définition 3.5.6 (kB-consistance) *Soit P un CSP, on note $P_{\boldsymbol{x}_i \leftarrow \boldsymbol{\alpha}}$, le CSP dérivé de P en substituant $\boldsymbol{x}_i$ par l'intervalle $\boldsymbol{\alpha}$.*
*P est dit k**B-consistant** ssi il vérifie les propriétés suivantes :*
- $P_{\boldsymbol{x}_i \leftarrow [\underline{x}_i, \underline{x}_i^+)}$ *est $(k-1)$B-consistant.*
- $P_{\boldsymbol{x}_i \leftarrow (\overline{x}_i^-, \overline{x}_i]}$ *est $(k-1)$B-consistant.*

L'algorithme de fermeture par 3B-consistance[1] est donné par la figure ??. Cet algorithme, que nous nommerons 3BPrune, n'est pas basé sur le schéma standard de propagation par opposition aux consistances locales (Hull et Box-consistance).

[1]Cet algorithme s'étend trivialement au calcul de la kB-consistance

Le principe de 3BPrune est de réfuter certaines portions du domaine d'une variable sans créer de point de choix. Autrement dit, si le domaine d'une variable d'un CSP P est $\boldsymbol{x} = [a, b]$, 3BPrune va tenter d'éliminer la portion $[a, \frac{a+b}{2})$ en appliquant un filtrage par 2B-consistance sur le CSP $P_{\boldsymbol{x} \leftarrow [a, \frac{a+b}{2})}$. Si la 2B-consistance prouve que l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2})$ est inconsistant alors le filtrage se poursuit avec l'intervalle $[\frac{a+b}{2}, b]$, sinon le filtrage se poursuit avec l'intervalle $[a, \frac{a+b}{4})$. L'algorithme s'arrête lorsque le point fixe est atteint ou que les réductions calculées sont inférieures à un ω donné.

Les kB-consistances sont très peu utilisées dans la mesure où les algorithmes pour les calculer sont très coûteux en temps de calcul. Toutefois, la 3B-consistance a permis de résoudre efficacement plusieurs problèmes difficiles comme le problème du transistor [?].

3.6 Contraintes globales

Tout comme pour les CSPs finis, il est d'un grand intérêt de trouver des algorithmes de filtrage à la fois efficace et puissant pour résoudre des ensembles de contraintes d'un même type. Toutefois, les contraintes globales en domaines continus reste un domaine dans lequel très peu de recherches ont été entreprises.

Certaines méthodes de résolution issues de l'analyse numérique ou l'analyse par intervalles peuvent être assimilés à des contraintes globales : par exemple, la méthode du simplexe pour les systèmes linéaires, ou la méthode de Newton multivarié.

Plus récemment, des travaux ont été entrepris sur les contraintes globales pour des CSPs continus. Parmi ces travaux, on peut mentionner la contrainte IS [?], qui regroupe des contraintes de somme et d'inégalité linéaires, et la contrainte Quad [?, ?] qui regroupe des contraintes quadratiques.

La contrainte IS a été introduite pour résoudre différents types d'applications, essentiellement pour des problèmes d'ordonnancement. IS est définie par :

- Une contrainte de somme :
  $$\mathsf{Sum} : y = \sum_{i=0}^{i=n} x_i$$
- Un ensemble d'inéquations binaires :
  $$\mathsf{Ineq} : \{x_i - x_j \leq c_{ij} : i, j \leq n, i \neq j\}$$
- Un ensemble de contraintes de domaines :
  $$\mathsf{Dom} : \{\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i, i \leq n\}$$

La contrainte globale est alors définie par :

$$\mathsf{IS}{=}\mathsf{Sum} \cup \mathsf{Ineq} \cup \mathsf{Dom}$$

L'algorithme de calcul de la consistance d'intervalles pour la contrainte IS est basé sur un calcul de plus court chemin pour réduire les bornes des domaines des variables. Cet algorithme a donc une complexité en temps de calcul de l'ordre de mn, où n est le nombre de variables et m le nombre de contraintes d'inégalités.

La contrainte globale Quad est un algorithme de filtrage global pour les systèmes de contraintes quadratiques (*c.f* [?, ?] pour une description plus détaillée). Cet algorithme repose sur une approximation des contraintes quadratiques du système initial par un ensemble de contraintes linéaires. Le simplexe est utilisé pour calculer une borne inférieure et supérieure des variables.

La relaxation des contraintes quadratiques consiste d'abord à introduire une nouvelle variable pour chaque terme non linéaire des contraintes quadratiques. Les domaines des variables additionnelles sont calculés en utilisant l'arithmétique de base sur les intervalles. Les termes quadratiques sont ensuite approximés par deux classes de relaxations linéaires.

Ces relaxations génèrent des surestimateurs et des sous-estimateurs linéaires qui définissent une enveloppe convexe des termes quadratiques. Ces approximations apportent une meilleure estimation de l'ensemble des solutions que les fonctions de projection basées sur l'arithmétique des intervalles. Le point important est que ces relaxations linéaires sont "safe", autrement dit garantissent qu'aucune solution ne sera perdue durant le processus de filtrage.

Du discret au continu Intuitivement, on pourrait envisager d'étendre les contraintes globales en domaines finis aux domaines continus. Très peu d'initiatives de cet ordre n'ont toutefois été entreprises. Il est en effet très difficile d'adapter les algorithmes de filtrages en domaines finis aux intervalles pour différentes raisons :

- La définition de ces contraintes n'est pas extensible à des domaines continus, car ils modélisent des problèmes purement finis. C'est le cas par exemple pour la contrainte Cycle, qui permet de trouver des cycles de longueur donnée dans un graphe orienté tels que chaque noeud soit visité une seule fois.
- Certaines contraintes globales utilisent une représentation des contraintes par un graphe dont le nombre de noeuds dépend du nombre de valeurs dans les domaines. C'est le cas par exemple pour la contrainte AllDiff, qui génère un graphe bi-parti dont les arêtes relient l'ensemble des variables à l'ensemble des valeurs (voir section 2.5), ou de manière similaire pour GCC, qui utilise des algorithmes de flots.
- Certaines contraintes globales ont une sémantique forte en domaines finis ; c'est justement sur cette sémantique que s'appuient les techniques de filtrage global. Or, pour un même contrainte, lorsque les variables varient dans des domaines continus, cette sémantique peut se perdre dès lors que les domaines des variables sont continus. Pour illustrer cette idée, prenons là encore la contrainte AllDiff sur un système à 3 variables x_1, x_2, x_3 et leurs domaines intervalles associés $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$. En supposant que ces intervalles ne soient pas dégénérés, il est toujours possible de trouver une affectation des variables par des valeurs différentes. Autrement dit, la consistance d'intervalle est toujours vérifiée.

3.7 Autres techniques de résolution

L'algorithme de Branch&Prune n'est plus adapté dès lors que l'espace des solutions est continu, ce qui est souvent le cas avec des systèmes d'inégalités. Cet algorithme génère dans ce cas un nombre de boîtes solutions qui peut être très grand selon la précision des calculs.

Des techniques permettant d'approximer ces sous-espaces continus de solutions, ou *continuums de solutions*, ont été proposées. Sam-Haroud [?] a proposé une technique de pavage de l'espace en 3 types de régions : des pavés contenant uniquement des solutions (Inner), des pavés ne contenant aucune solution(Outer) et des pavés pour lesquels il est impossible de se prononcer (Union). Cette technique de décomposition, nommée décomposition en 2^k-arbres, permet une représentation fine par un pavage de l'espace des solutions (voir figure 3.8).

FIG. 3.8 – Décomposition en 2^k-arbre de la contrainte $x^2 + y^2 <= 1$, avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = [-1, 1]$: les pavés Inner sont représentées en blanc, les zones Outer en noir et les zone Union en gris.

3.8 Synthèse

Deuxième partie

Contraintes globales pour les CSPs continus

Chapitre 4

Systèmes d'équations de distance

Les contraintes géométriques, et plus particulièrement, les contraintes de distance euclidienne, apparaissent dans de nombreux domaines d'application. Ce chapitre décrit le problème de satisfaction de contraintes de distance euclidienne à travers ses différentes applications, différentes modélisations et les différentes approches proposées dans la littérature pour le résoudre.

Les systèmes d'équations de distance euclidienne sont des problèmes particulièrement difficile à résoudre par les méthodes classiques. En effet, les domaines peuvent contenir à la fois des continuums et des solutions ponctuelles. De plus, le nombre important d'axes de symétrie et de disjonctions dans l'espace des solutions augmente la combinatoire du problème.

Les outils classiques pour résoudre les contraintes numériques sont basées sur des consistances locales comme la 2B-consistance [**?**] ou la Box-consistance [**?**, **?**]. L'inconvénient de ces méthodes vient du fait que les contraintes sont traitées indépendamment et sans exploiter leurs propriétés sémantiques. Par exemple, les variables associées aux coordonnées des points sont traitées comme des variables indépendantes.

Or, beaucoup d'informations peuvent être exploitées si l'on considère ces systèmes de contraintes simultanément, c'est-à-dire comme une contrainte globale. Dans les chapitres 5 et 6, nous présenterons deux méthodes qui tentent de tirer parti de certaines de ces informations.

La section 4.1 décrit le problème et ses différentes applications ainsi que les deux principales approches pour le modéliser. La section 4.2 survole rapidement les principales méthodes pour le résoudre. Enfin, la section 4.3 présente les avantages et les limites des techniques de consistance locale pour résoudre les systèmes d'équations de distance.

4.1 Introduction

Définitions On considère un ensemble de points $\mathcal{P}_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ de $\mathbb{R}^p$. La distance euclidienne δ_{ij} entre 2 points $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ est le nombre positif défini par la norme au carré du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j}$:

$$\delta_{ij}^2 = \|\overrightarrow{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j}\|^2 = \sum_{k=1}^{k=p} (x_{i_k} - x_{j_k})^2 \tag{4.1}$$

Un problème de satisfaction de contraintes de distance est la donnée d'un certain nombre de distances entre des couples de points. Résoudre le problème c'est de localiser ces points dans l'espace de manière à ce qu'ils vérifient les distances données. Plus généralement, ces distances peuvent être données par un intervalle ; dans ce cas, on cherche à borner une zone de faisabilité pour chacun des points.

Modélisations Il existe essentiellement deux modélisations différentes du problème. La première est la formulation usuelle que l'on utilisera le plus souvent dans la suite. Les inconnues sont les coordonnées des points dans un repère donné. Dans ce cas les contraintes sont de la même forme que dans l'équation 4.1. Plus formellement, un DCSP (Distance Constraint Satifaction Problem) est défini par :

- Un ensemble de n points $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ dans un $\mathbb{R}^p$. On dénote par x_{i_k}, la k-ème coordonnée du point $\mathcal{P}_i$.
- Un ensemble de domaines $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\mathcal{P}}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, où le vecteur d'intervalles $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i = \boldsymbol{x}_{i_1} \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{i_p}$ est le domaine du point $\mathcal{P}_i$.
- Un ensemble de contraintes de distance :

$$\mathcal{C} = \{c_{ij} : \sum_{k=1}^{k=p} (x_{ik} - x_{jk})^2 = \delta_{ij}^2\},$$

où $1 \leq i, j \leq n$. La distance δ_{ij} est un nombre réel strictement positif ou un intervalle $[\underline{\delta_{ij}}, \overline{\delta_{ij}}]$.

La deuxième approche est de chercher des valeurs pour les distances inconnues. En effet, une fois que toutes les distances sont connues, le système devient trivial et indépendant du repère choisi. Cette modélisation est basée sur la géométrie des distances initiée dans les années 50 par Blumenthal [**?**]. Cette modélisation permet de représenter la plupart des contraintes géométriques (distance, incidence, orthogonalité, parallélisme ...) par des équations non-linéaires qui ne dépendent pas des coordonnées des points, mais des distances entre les points. Ces équations sont définies par des contraintes sur les déterminants de Cayley-Menger, définis de la manière suivante :

$$\Xi(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n) = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 & \ldots & \delta_{1n}^2 & 1 \\ \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 & \ldots & \delta_{2n}^2 & 1 \\ \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 & \ldots & \delta_{3n}^2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1}^2 & \delta_{n2}^2 & \delta_{n3}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

Par exemple, si $n = 2$: $\Xi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = 2\delta_{12}^2$. Si $n = 3$, $\Xi(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3) = -16A^2$, où A est l'aire du triangle $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$. Pour $n = 4$, une équation relie le déterminant de Cayley-Menger et le volume du tétraèdre $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$. Pour $n > 4$, si ce déterminant est nul alors l'ensemble des points $\mathcal{P}_i$ est représentable dans $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, en dimension p, si $n > p + 1$ et si $\Xi(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n) = 0$, alors il existe une configuration des points $\mathcal{P}_i$ dans l'espace $\mathbb{R}^p$ qui vérifie l'ensemble des contraintes de distance indiquées par la matrice de Cayley-Menger.

Applications Les systèmes d'équations de distance euclidienne apparaissent dans de nombreux domaines d'application. Parmi ces applications, on peut citer les suivantes :

- *Conception optimale de robots* [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**] :
- *Contraintes géométriques* [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**] :

– *Conformation moléculaire* [**?**, **?**, **?**, **?**] :
– *Placement d'installations* [**?**] :
– *Localisation de capteurs* [**?**] :
– *Circle packing* [**?**, **?**, **?**] :

Notations Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

$\mathcal{P}_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$	Un point de $\mathbb{R}^p$
$\mathcal{P}_i(x_i, y_i, z_i)$	Un point de $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{P}_i(x_i, y_i)$	Un point de $\mathbb{R}^2$
$\overrightarrow{\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j}$	le vecteur entre le point $\mathcal{P}_i$ et le point $\mathcal{P}_j$
δ_{ij}	la distance entre le point $\mathcal{P}_i$ et le point $\mathcal{P}_j$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}_i$	le domaine du point $\mathcal{P}_i$, c'est-à-dire, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i = \boldsymbol{x}_{i_1} \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{i_p}$

Pour simplifier la notation en dimension 2 on notera les contraintes de la manière suivante :

$$c_{ij} : (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = \delta_{ij}^2$$

De la même manière, en dimension 3, on notera $\mathcal{P}_i(x_i, y_i, z_i)$ et les contraintes par :

$$c_{ij} : (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \delta_{ij}^2$$

Problème du pentagone Le problème du pentagone est un CSP bien connu dans la communauté de la programmation par contraintes sur les domaines continus. Il est souvent utilisé pour illustrer les problèmes que rencontrent les méthodes de filtrage local, lorsque l'espace solution est fractionné. Il s'agit d'un CSP géométrique en 2D, constitué de 5 points $\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$,$\mathcal{P}_3$,$\mathcal{P}_4$, et $\mathcal{P}_5$ sur le cercle unitaire, tels que les segments $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5$, et $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_5$ soient de longueur égale à d. L'un de ces 5 points est fixé au point de coordonnées (1,0) pour éviter que le nombre de solutions ne soit infini. Selon le choix de la distance d entre

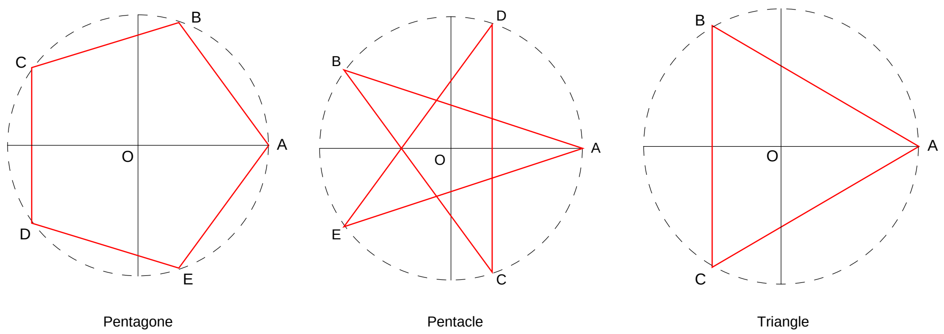


FIG. 4.1 – Solutions du problème du pentagone

deux points consécutifs, on obtient 3 instances que nous nommerons *penta1*, *penta2* et *penta3* donnant lieu à 3 types de solutions (Fig. 7.6) :

1. *penta1* : Si $d = 2\sin(\frac{\pi}{5})$ il y a 2 solutions pour la combinaison $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5$ formant un pentagone, $ABCDE$, $AEDCB$.
2. *penta2* : Si $d = 2\sin(\frac{2\pi}{5})$ il y a 2 solutions pour la combinaison $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5$ formant un pentacle, $ABCDE$, $AEDCB$.

---

3. *penta3* : Si $d = 2\sin(\frac{2\pi}{3})$ il y a 10 solutions pour la combinaison $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4\mathcal{P}_5$ formant un triangle, $ABCAB$,$ACBAC$, $ABCAC$, $ACBAB$, $ABABC$, $ACACB$, $ABCBC$, $ACBCB$, $ABACB$ et $ACABC$.

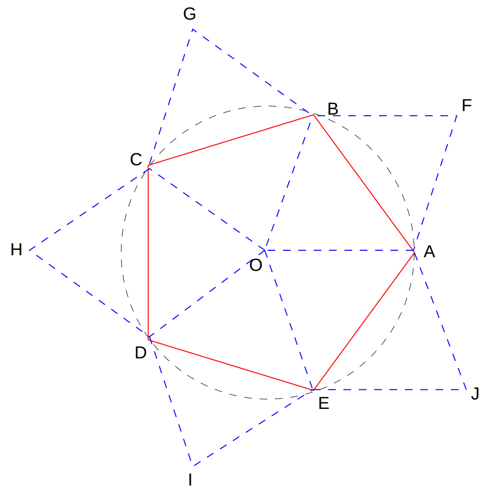


Fig. 4.2 – Ajout de contraintes dans le problème du pentagone

Pour compliquer un peu le problème, cinq points supplémentaires sont ajoutés au problème initial, un entre chaque arête à une distance de 1 de chaque extrémité (Fig. 7.7). Pour une solution du problème classique, cela engendre $2^5 = 32$ fois plus de solutions, soit 64 pour *penta1* et *penta2*, et 320 pour *penta3*. L'instance correspondant à l'extension de *penta1* (resp. *penta2*, *penta3*) étendue par ce procédé sera nommée *ext-penta1* (resp. *ext-penta2*, *ext-penta3*)

4.2 État de l'art

4.2.1 Géométrie des distances

4.2.2 Programmation quadratique

4.2.3 Méthode des régions actives

4.2.4 Heuristiques de résolution

4.2.5 Méthodes algébriques

4.3 Difficultés des techniques de consistances

Chapitre 5

Ajout de contraintes redondantes

5.1 Introduction

5.2 Fermeture du graphe de contraintes

5.3 Ajout de points virtuels

5.3.1 Isobarycentre des triangles

5.3.2 Isobarycentre des points

5.4 Résultats expérimentaux

5.5 Conclusion

Chapitre 6

QuadDist : Un filtrage global pour les contraintes de distance

Ce chapitre présente un algorithme de filtrage global pour résoudre les systèmes d'équations de distance. Cette nouvelle technique nommée QuadDist est dérivée de Quad, une technique de filtrage global pour les contraintes quadratiques. Quad calcule une relaxation linéaire des termes quadratiques des équations et utilise l'algorithme du simplexe pour réduire les domaines des variables. Nous présentons dans ce chapitre une approximation linéaire dédiée aux équations de distance euclidienne. Le point clé de cette nouvelle méthode réside dans le fait que ces approximations ne sont pas générées pour chaque terme des équations mais globalement pour chaque contrainte de distance. QuadDist définit donc une approximation plus précise que Quad, ce qui augmente la vitesse de convergence de la méthode. D'autre part, contrairement à la Quad, notre linéarisation des contraintes ne nécessite pas l'ajout de variables supplémentaires ce qui réduit la taille des systèmes linéaires résolus par le simplexe. Les résultats expérimentaux montrent que QuadDist résout certains problèmes près de 300 fois plus vite que la Quad.

6.1 Introduction

Cet chapitre introduit un nouvel algorithme de filtrage global pour résoudre les systèmes d'équations et d'inéquations de distance. Le problème de satisfaction de contraintes de distance est un problème NP-complet qui apparaît dans de nombreux domaines d'application comme en biochimie moléculaire, en conception assistée par ordinateur ou encore en robotique.

Les outils classiques pour résoudre les contraintes numériques sont basées sur des consistances locales comme la 2B-consistance [?, ?, ?] ou la Box-consistance [?, ?]. L'inconvénient de ces méthodes vient du fait que les contraintes sont traitées indépendamment et sans exploiter leurs propriétés sémantiques.

Lebbah *et al* ont introduit un algorithme de filtrage global, nommé Quad, pour traiter les contraintes quadratiques [?]. Quad génère une relaxation linéaire des termes quadratiques des équations puis d'utiliser l'algorithme du simplexe pour réduire les domaines des variables.

Nous présentons dans ce chapitre une approximation linéaire dédiée aux équations de distance euclidienne. Le point clé de cette nouvelle méthode réside dans le fait que ces approximations ne sont pas générées pour chaque terme des équations mais globalement pour chaque contrainte de distance. QuadDist définit donc une approximation plus précise que Quad.

Contrairement à la Quad notre linéarisation des contraintes ne nécessite pas l'ajout de variables additionnelles, ce qui réduit la taille des systèmes linéaires engendrés. Les performances de QuadDist sur des CSP constitués d'équations de distance sont tout à fait encourageantes.

Heusch [?] a introduit une contrainte globale pour traiter les relations de distance entre n points mais sans toutefois fournir de résultats expérimentaux. Son approche est basée sur la méthode des "Active Areas" utilisées par Markót et Csendes [?]. L'avantage de QuadDist est qu'il est s'agit d'un schéma plus général et plus facile à mettre en œuvre.

La section suivante présente les principes de QuadDist sur un exemple très simple.

6.1.1 Présentation informelle

Considérons le système de contraintes suivant :

$$\mathcal{C} = \begin{cases} c_1 : & x^2 + y^2 = & 10 \\ c_2 : & (x-4)^2 + y^2 = & 10 \end{cases}$$

et supposons que les domaines des variables x et y soient $\boldsymbol{x} = [1, 3]$ et $\boldsymbol{y} = [1, 4]$. La solution de $\mathcal{C}$ (voir figure 6.1) est le point d'intersection de deux cercles de rayon $\sqrt{10}$: $\mathcal{C}_1$ centré en $(0, 0)$ et $\mathcal{C}_2$ centré en $(4, 0)$.

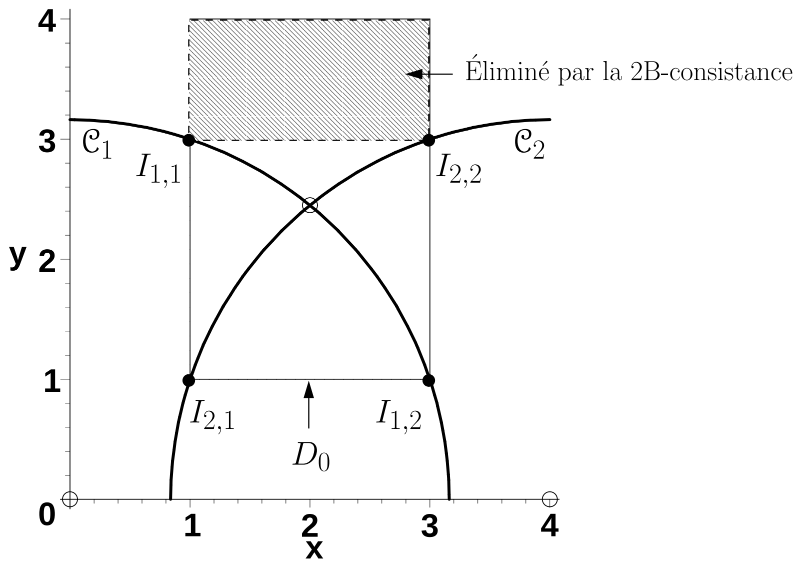


FIG. 6.1 – Réduction du domaine par 2B-consistance

La 2B-consistance réduit le domaine initial $D_0 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ à $[1, 3] \times [1, 3]$ puisque les bornes des domaines des variables satisfont les contraintes c_1 et c_2. La figure 6.1 montre en effet que les points $I_{1,1}$ et $I_{1,2}$ satisfont $c1$ et les points $I_{2,1}$ et $I_{2,2}$ satisfont $c2$. Pour réduire davantage les domaines, il faut utiliser une consistance plus forte ou une méthode d'énumération comme la bissection.

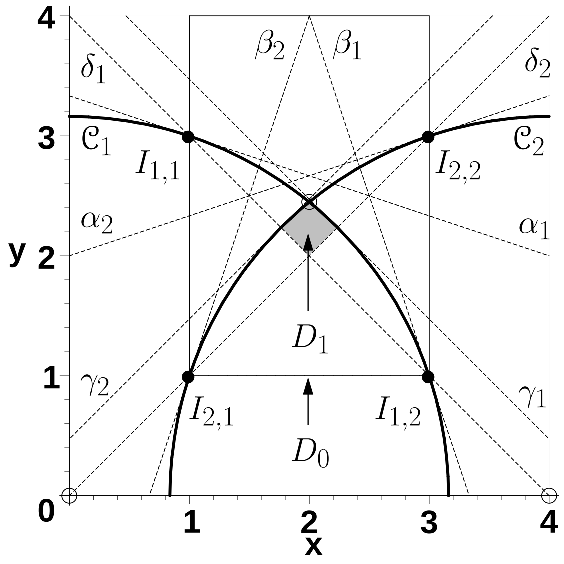


FIG. 6.2 – Première approximation des solutions de $\mathcal{L}(\mathcal{C})$.

Le processus de relaxation de QuadDist (détaillé dans la section 3) calcule l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ des approximations linéaires des contraintes de c_1 et c_2 :

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \underline{\mathcal{L}}(c_1) \cup \underline{\mathcal{L}}(c_2) \cup \overline{\mathcal{L}}(c_1) \cup \overline{\mathcal{L}}(c_2)$$

où $\underline{\mathcal{L}}(c_i)$ est l'ensemble des sous-estimateurs de la contrainte c_i et $\overline{\mathcal{L}}(c_i)$ est l'ensemble des surestimateurs de c_i. Plus précisément :

- $\overline{\mathcal{L}}(c_i)$ est défini par trois tangentes au cercle $\mathcal{C}_i$:
  - α_i et β_i, les tangentes à $\mathcal{C}_i$ aux points $I_{i,1}$ et $I_{i,2}$, les points d'intersection entre $\mathcal{C}_i$ et la boîte définie par les domaines initiaux de x et y.
  - γ_i, la tangente au milieu de l'arc de cercle $\widehat{I_{i,1}I_{i,2}}$.
- $\underline{\mathcal{L}}(c_i)$ est la corde δ_i entre les points $I_{i,1}$ et $I_{i,2}$.

Plus formellement, le système linéaire $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ généré par QuadDist est le suivant :

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & : & 3y + x - 10 \leq 0 \\ \beta_1 & : & y + 3x - 10 \leq 0 \\ \gamma_1 & : & 2y + 2x - \sqrt{80} \leq 0 \\ \delta_1 & : & y + 2x - 8 \geq 0 \\ & & \\ \alpha_2 & : & 3y - (x-4) - 10 \leq 0 \\ \beta_2 & : & y - 3(x-4) - 10 \leq 0 \\ \delta_2 & : & 2y - 2(x-4) - 8 \geq 0 \\ \gamma_2 & : & 2y - 2(x-4) - \sqrt{80} \leq 0 \end{array} \right.$$

Le simplexe est utilisé pour calculer les valeurs minimales et maximales de x et y satisfaisant les contraintes linéaires du système $\mathcal{L}(\mathcal{C})$. Après cette étape de filtrage, le domaine initial D_0 est réduit à la boîte englobant D_1 (voir figure6.2), puis le processus de relaxation recommence. Quatre itérations supplémentaires permettent d'isoler la solution du système avec une précision de 6 chiffres décimaux.

Dans la suite de ce chapitre, nous rappellerons les grandes lignes de l'algorithme Quad. La section 3 détaille le principe général de notre approche ainsi que le processus de linéarisation en dimension 2. Dans la section 4 la taille des programmes linéaires générés par QuadDist est comparé à ceux que génère la Quad. Enfin, la section 4 présente quelques résultats expérimentaux.

6.2 Quad :un filtrage global pour les contraintes quadratiques

Quad est un algorithme de filtrage global pour les systèmes de contraintes quadratiques (*c.f* [?, ?, ?] pour une description plus détaillée). Cet algorithme repose sur une approximation des contraintes quadratiques du système initial par un ensemble de contraintes linéaires. Le simplexe est utilisé pour calculer une borne inférieure et supérieure des variables.

La relaxation des contraintes quadratiques consiste d'abord à introduire une nouvelle variable pour chaque terme non linéaire des contraintes quadratiques. Les domaines des variables additionnelles sont calculés en utilisant l'arithmétique de base sur les intervalles. Les termes quadratiques sont ensuite approximés par deux classes de relaxations linéaires. Ces relaxations génèrent des surestimateurs et des sous-estimateurs linéaires qui définissent une enveloppe convexe des termes quadratiques. Ces approximations apportent une meilleure estimation de l'ensemble des solutions que les fonctions de projection basées sur l'arithmétique des intervalles.

Nous montrons dans ce chapitre que ces relaxations peuvent être améliorées de manière significative en construisant une approximation linéaire globalement pour chaque contrainte de distance plutôt qu'en combinant les approximations de ses termes quadratiques.

Dans la section suivante, nous montrons comment le processus de relaxation de QuadDist exploite la sémantique des contraintes de distance pour calculer une approximation plus précise que la Quad sans introduire de variables additionnelles.

6.3 QuadDist : Une approche globale

QuadDist est une contrainte globale qui a été conçue pour résoudre efficacement les problèmes mettant en jeu des contraintes de distance dans le plan et dans l'espace tridimensionnel. Pour simplifier la description de notre méthode, nous détaillerons notre approche en dimension 2 où les illustrations sont plus intuitives.

6.3.1 Schéma général

QuadDist calcule une réduction globale des domaines en itérant les deux étapes suivantes jusqu'à atteindre un point fixe :

1. **Relaxation des contraintes** : Génération de $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ l'ensemble des approximations linéaires des contrainte $c_{ij} \in \mathcal{C}$ de la forme :

$$c_{ij} : (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 = \delta_{ij}^2$$

où x_i et y_i (respectivement x_j et y_j) sont les coordonnées du point $\mathcal{P}_i$ (respectivement du point $\mathcal{P}_j$). Ces approximations linéaires sont de la forme :

$$a(x_j - x_i) + b(y_j - y_i) + c \leq 0$$

où a, b et c sont des nombres réels.

2. **Filtrage des domaines** : Utilisation du simplexe pour minimiser et maximiser chaque x_i et y_i soumis aux contraintes linéaires du système $\mathcal{L}(\mathcal{C})$.

Ce processus itératif s'arrête lorsque toutes les réductions de domaines sont plus petites qu'un certain réel positif ϵ.

Pour calculer les relaxations linéaires, les contrainte c_{ij} sont mises sous forme canonique en effectuant la substitution suivante :

$$\begin{aligned} x &= x_j - x_i \\ y &= y_j - y_i \end{aligned}$$

où x et y sont des variables temporaires dont les domaines $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont calculés en utilisant l'arithmétique de base des intervalles. La contrainte c_{ij} s'écrit donc :

$$c_{ij} : x^2 + y^2 = \delta_{ij}^2$$

Les domaines de x et de y et la distance δ_{ij} sont utilisés pour déterminer les coefficients a, b et c des relaxations linéaires de c_{ij} ; ces relaxations sont de la forme :

$$ax + by + c \leq 0$$

où a, b et c sont des nombres réels. Enfin, on génère les relaxations de la contrainte c_{ij} qui sont effectivement ajoutées au système de contraintes ; à savoir :

$$a(x_j - x_i) + b(y_j - y_i) + c \leq 0$$

Le problème se ramène donc à calculer l'ensemble $\mathcal{L}(c)$ des approximations linéaires d'une contrainte sous forme canonique $c : x^2 + y^2 = \delta^2$. Ce problème est loin d'être trivial car l'ensemble des solutions de c n'est en général ni convexe ni monotone. La section suivante montre comment décomposer les domaines de x et y de manière à ce que ces propriétés soient vérifiées, tandis que la section 6.3.3 montre comment calculer les relaxations de c.

6.3.2 Décomposition sémantique des domaines

Considérons la contrainte $c : x^2 + y^2 = \delta^2$ avec $\mathcal{P}(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ et $\delta > 0$. $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ est décomposé en au plus quatre sous-domaines sur lesquels la contrainte c est monotone et convexe :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++} &= \square_{\mathbb{I}^2}\{(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{P}} / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = \delta^2\} \\ \boldsymbol{\mathcal{P}}^{-+} &= \square_{\mathbb{I}^2}\{(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{P}} / x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 = \delta^2\} \\ \boldsymbol{\mathcal{P}}^{+-} &= \square_{\mathbb{I}^2}\{(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{P}} / x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = \delta^2\} \\ \boldsymbol{\mathcal{P}}^{--} &= \square_{\mathbb{I}^2}\{(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{P}} / x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 = \delta^2\} \end{aligned}$$

où $\square_{\mathbb{I}^2} E$ dénote la plus petite boîte contenant l'ensemble des valeurs de l'ensemble E. Notons que chacun de ces sous-domaines peut être réduit à l'ensemble vide.

Exemple 6.3.1 *Considérons les variables x et y de domaines respectifs $[-4,5]$ et $[-2,4]$ et la contrainte c :*

$$c : x^2 + y^2 = 25$$

La figure 7.5 montre que la décomposition sémantique découpe le domaine du point (x,y) en 3 sous-domaines : $[0,5] \times [0,4]$ réduit à $[3,5] \times [0,4]$, à l'aide de la projection de la contrainte c. De même, $[-4,0] \times [0,4]$ est réduit à $[-4,-3] \times [3,4]$. $[-4,0] \times [-2,0]$ est éliminé puisque la contrainte n'a pas de support dans ce domaine. Enfin, $[0,5] \times [-2,0]$ est réduit à $[4.5825,5] \times [-2,0]$.

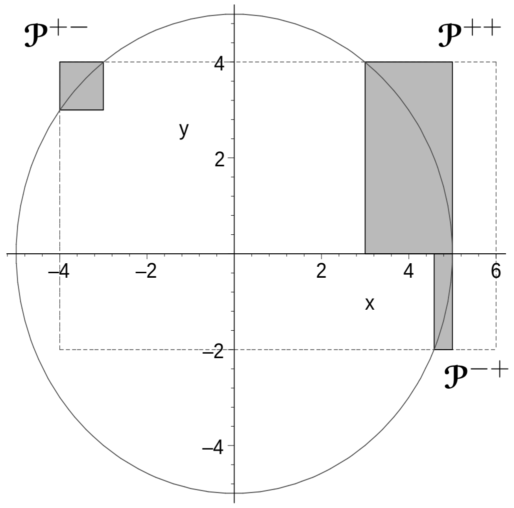


FIG. 6.3 – Illustration de la décomposition sémantique sur l'exemple 7.4.1.

La décomposition sémantique de $\mathcal{P}$ satisfait la propriété suivante :

Propriété 6.3.1 *Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - \delta^2$ et la contrainte définie par $f(x,y) = 0$ et Soit $s \in \{\mathcal{P}^{++}, \mathcal{P}^{-+}, \mathcal{P}^{+-}, \mathcal{P}^{--}\}$, tel que $s \neq \emptyset$. Alors la fonction f est monotone sur s.*

Preuve La monotonie est triviale puisque le vecteur gradient de f est $(2x, 2y)$ et que ses composantes sont de signe constant sur $\mathcal{P}^{++}$, $\mathcal{P}^{-+}$, $\mathcal{P}^{+-}$ et $\mathcal{P}^{--}$.

Comme f est monotone sur chacun des sous-domaines considérés, nous pouvons utiliser l'extension aux intervalles des fonctions de projection[**?**] associées à $f(x,y)$ pour calculer la plus petite boîte qui contient toutes les solutions de $c(x,y)$ sur le dit domaine.

Pour calculer une approximation linéaire des relations de distance, nous générons un ensemble d'inéquations qui encadrent chacun des espace solutions des sous-domaines monotones. Ces ensembles d'inéquations sont ensuite combinés pour obtenir une approximation du domaine complet. Nous présentons dans la suite les relaxations linéaires de $\mathcal{P}^{++}$, les autres se dérivant aisément par symétrie.

La section 3.3 montre comment obtenir une relaxation de $\mathcal{P}^{++}$ tandis que la section 3.4 montre comment combiner les approximations des sous-domaines monotones pour obtenir une relaxation du domaine $\mathcal{P}$.

6.3.3 Relaxation des contraintes de distance

Pour définir une approximation linéaire de l'espace des solutions, on distingue les relations de distance suivantes :

Distance exacte	c :	$x^2 + y^2 = \delta^2$
Distance minimale	$\underline{c}$:	$x^2 + y^2 \geq \delta^2$
Distance maximale	$\overline{c}$:	$x^2 + y^2 \leq \delta^2$

La contrainte c étant la conjonction des contraintes $\underline{c}$ et $\overline{c}$, le problème se ramène à trouver les relaxations de $\underline{c}$ et $\overline{c}$. Les relaxations de c seront définies par l'union de ces estimations.

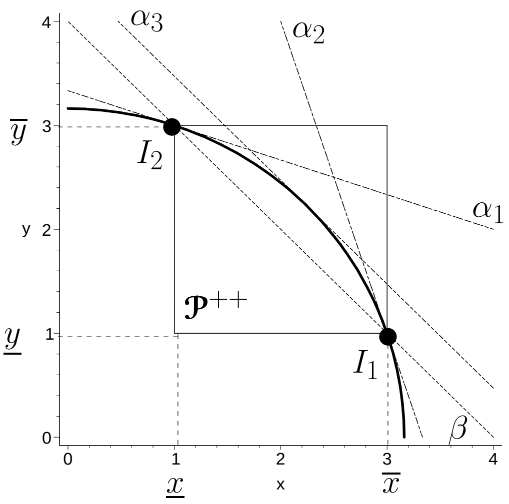


FIG. 6.4 – Relaxation de c sur $\mathcal{P}^{++}$.

Les relaxations de $\underline{c}$ et $\overline{c}$ sont calculées en considérant les points d'intersection entre le cercle défini par c et la boîte $\mathcal{P}^{++}$. La figure 6.4 montre que ces points, que l'on définit comme étant les *points d'intersection* de $\mathcal{P}^{++}$, sont $I_1(\overline{x}, \underline{y})$ et $I_2(\underline{x}, \overline{y})$.

De manière triviale, les tangentes en un point de l'arc de cercle $\widehat{I_1 I_2}$ définissent une surestimation des solutions de $\overline{c}$. De même, la corde $[I_1 I_2]$ définit une sous-estimation des solutions de $\underline{c}$.

Plus formellement, les propositions 6.3.1 et 6.3.2 définissent l'ensemble de sous-estimations de $\underline{c}$ et l'ensemble des surestimations de $\overline{c}$ sur le sous-domaine $\mathcal{P}^{++}$.

L'ensemble $\underline{\mathcal{L}}(\underline{c}, \mathcal{P}^{++})$ des sous-estimations de $\underline{c}$ correspondent au demi-plan délimité par le segment $[I_1 I_2]$ et qui ne contient pas le point $(0, 0)$.

Proposition 6.3.1 (Sous-estimations) *Considérons la contrainte* $\underline{c} : x^2 + y^2 \geq \delta^2$*, avec* $(x, y) \in \mathcal{P}^{++} = [\underline{x}, \overline{x}] \times [\underline{y}, \overline{y}]$.

Soit $\underline{\mathcal{L}}(\underline{c}, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++})$ *l'ensemble défini par la relation suivante :*

$$\beta : \quad (\overline{x} - \underline{x})y + (\underline{y} - \overline{y})x + \underline{x}\underline{y} - \overline{x}\overline{y} \quad \geq 0$$

Alors, $\underline{\mathcal{L}}(\underline{c}, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++})$ *est une sous-estimation linéaire de* $\underline{c}$.

L'ensemble $\overline{\mathcal{L}}(\overline{c}, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++})$ des surestimations de $\overline{c}$ correspond à l'intersections des demi-plans contenant le point $(0, 0)$ et délimités par trois tangentes en I_1, en I_2 et au milieu de l'arc de cercle $\widehat{I_1 I_2}$.

Proposition 6.3.2 (Surestimations) *Considérons la contrainte* $\overline{c} : x^2 + y^2 \leq \delta^2$, *avec* $(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++} = [\underline{x}, \overline{x}] \times [\underline{y}, \overline{y}]$.

Soit $\overline{\mathcal{L}}(\overline{c}, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++})$, *l'ensemble défini par les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \alpha_1 : & \overline{y}y + \underline{x}x - \delta^2 & \leq 0 \\ \alpha_2 : & \underline{y}y + \overline{x}x - \delta^2 & \leq 0 \\ \alpha_3 : & (\overline{x} - \underline{x})y + (\underline{y} - \overline{y})x - \gamma & \leq 0 \end{cases}$$

où $\gamma = \delta\sqrt{(\overline{x} - \underline{x})^2 + (\overline{y} - \underline{y})^2}$.
Alors, $\overline{\mathcal{L}}(\overline{c}, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++})$ *est une surestimation linéaire de* $\overline{c}$.

Les surestimations et les sous-estimations de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{+-}$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{-+}$ et $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{--}$ sont dérivées de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{++}$ par symétrie. Les relaxations complètes de c, $\underline{c}$ et $\overline{c}$ sur les sous-domaine S sont alors définies par :

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{L}}(c, S) = & \overline{\mathcal{L}}(\overline{c}, S) \\ \underline{\mathcal{L}}(c, S) & \underline{\mathcal{L}}(\underline{c}, S) \\ \mathcal{L}(c, S) = & \underline{\mathcal{L}}(c, S) \cup \overline{\mathcal{L}}(c, S) \end{cases}$$

La section suivante montre comment combiner ces approximations linéaires pour obtenir $\mathcal{L}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}})$, une approximation de c sur le domaine initial $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

6.3.4 Combinaison des approximations

Les tangentes au cercle défini par c surestiment les sous-ensembles de solutions contenus par chacun les sous-domaines. Par conséquent, l'ensemble des surestimations de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ est défini par l'union des surestimations de ses sous-domaines :

$$\overline{\mathcal{L}}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}}) = \overline{\mathcal{L}}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{++}) \cup \overline{\mathcal{L}}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{-+}) \cup \overline{\mathcal{L}}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{+-}) \cup \overline{\mathcal{L}}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{--})$$

La combinaison des sous-estimations des sous-domaines est plus compliquée ; l'union de ces approximations n'étant pas convexe en général.

Soit k le nombre de sous-domaines monotones non vides de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Il est évident que pour $k = 4$ il n'existe aucune sous-estimation convexe. Le problème se ramène donc à combiner les sous-estimations de c sur k sous-domaines monotones avec $k = 2$ ou $k = 3$. Il est facile de montrer que pour $k = 2$, les 2 sous-domaines sont contenus dans deux quadrants contigus.

Dans tous les cas, $\underline{\mathcal{L}}(c, \boldsymbol{\mathcal{P}})$ doit être une sous-estimation de $\underline{\mathcal{L}}(c, S)$ pour tout sous-domaine S de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Considérons tous les demi-plans définis par les segments entre chaque couples de *points* *d'intersection*. La sous-estimation globale est délimitée par le segment qui sous-estime l'ensemble de ces demi-plans, dans le domaine considéré.

Ce segment (ou ce plan en dimension 3) peut être déterminé en calculant l'enveloppe convexe de l'ensemble des *points d'intersection*. Dans le plan, on peut toutefois déterminer plus simplement ce segment en triant l'ensemble des points d'intersections par angle croissant par rapport à un point choisi dans un quadrant ne contenant pas de solutions. $\underline{\mathcal{L}}(c, \mathbf{\mathcal{P}})$ est alors défini par le premier et le dernier point de cet ensemble trié.

La figure 6.5 montre un exemple d'une telle combinaison pour $k = 3$.

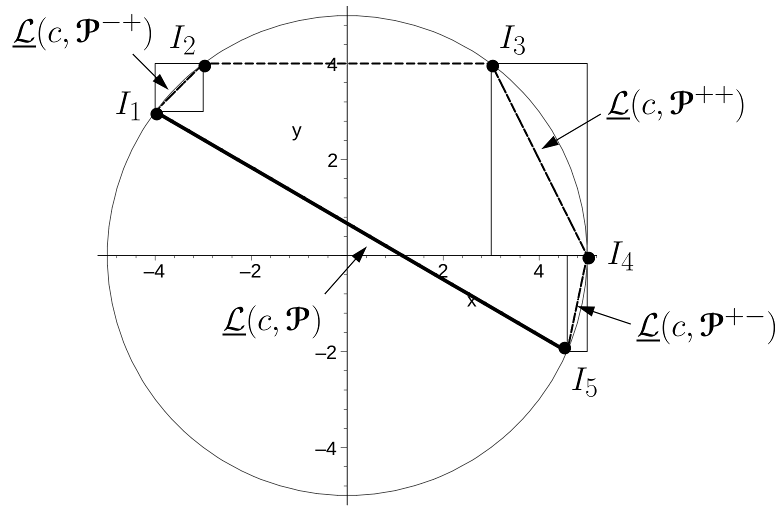


FIG. 6.5 – Sous-estimations de trois sous-domaines.

Dans la section suivante, nous comparons les systèmes linéaires engendrés par la Quad avec ceux générés par QuadDist.

6.4 Taille des programmes linéaires générés

Dans le cas général, c'est-à-dire pour des contraintes de distance dans un espace de dimension p, le nombre de contraintes générées par QuadDist est exponentiel. En effet, le nombre de contraintes linéaires générées est :

$$(p+1)2^p m$$

où $(p+1)$ est le nombre de contraintes linéaires engendrées sur un sous-domaine monotone, 2^p est le nombre maximal de sous-domaines engendrés par la décomposition sémantique et m est le nombre de contraintes de distance du système initial. Toutefois, rappelons que QuadDist a été conçu pour résoudre des systèmes de contraintes de distance dans le plan et dans l'espace. Dans ce cas, le nombre de contraintes générées par QuadDist est tout à fait raisonnable.

Nous comparons dans ce chapitre la taille des programmes linéaires engendrés par QuadDist à ceux générés par Quad en dimension 2 et 3.

Considérons un CSP constitué de m contraintes de distance mettant en jeu n points.

Nombre de variables Quad utilise la forme développée des équations de distance en dimension 2 :

$$x_i^2 + x_j^2 + y_i^2 + y_j^2 + 2x_ix_j + 2y_iy_j = \delta_{ij}^2$$

et ajoute une variable supplémentaire pour chaque terme carré et pour chaque terme produit, soit $2n + 2m$ variables ajoutées aux $2n$ variables initiales et donc un total de $(4n + 2m)$ variables.

QuadDist n'introduit pas de variables additionnelles, donc le nombre de variables des systèmes linéaires engendrés est égal à $2n$.

Le nombre de variables des programmes linéaires engendrés par QuadDist est donc toujours plus petit.

Nombre de contraintes linéaires Au pire des cas, Quad engendre 3 inéquations linéaires pour chaque terme carré et 4 inéquations pour chaque terme produit, soit au total $C_Q = 4 \times 2m + 3 \times 2n = 8m + 6n$.

QuadDist calcule au pire des cas 3 surestimations sur chacun des 4 sous-domaines monotones et aucune sous-estimation. Le nombre de contraintes linéaires engendrées est donc 12 par contraintes, soit $C_{QD} = 12m$ contraintes linéaires.

Si le graphe de contraintes ne contient pas de noeuds isolés, c'est-à-dire si $n > m$, on a $C_Q - C_{QD} = 6n - 4m > 2m$, alors le nombre de contraintes engendrées par QuadDist est inférieur au nombre de contraintes générées par Quad. En dimension 3, on peut montrer de manière analogue que $C_Q - C_{QD} > 0$ si et seulement si $m < 9/20n$. Autrement dit, QuadDist génère toujours moins de contraintes linéaires que Quad pour des graphes de contraintes ayant une densité moyenne inférieure à 9/20.

6.5 Résultats expérimentaux

Nous avons comparé les temps de résolution de QuadDist avec ceux du solveur *Realpaver*[1] et ceux de la Quad sur le problème du pentagone(penta1, penta2 et penta3) ainsi que sur une extension de ce problème (*c.f.* section 7.5.1).

Le tableau 7.9 récapitule les résultats obtenus sur un PC muni d'un processeur Pentium IV à 2Ghz avec 256Mo de RAM. Une case vide signifie que le solveur n'a pas résolu complètement le problème en moins d'une demi-heure. Pour chacun des solveur on affiche les temps de calcul en secondes et le nombre de boîtes calculées.

On peut remarquer que pour l'ensemble de ces problèmes, QuadDist améliore significativement les performances de la Quad. *Realpaver* qui combine la Box-consistance et la Hull-consistance, deux filtrages peu coûteux, est plus efficace que QuadDist sur les instances les plus simples. Ceci s'explique aisément du fait du coût initial de l'appel au simplexe.

On peut aussi remarquer que pour un problème comme ext-penta1, *Realpaver* génère de nombreuses boîtes parasites alors que QuadDist isole toutes les solutions pour ces différents problèmes.

[1]Realpaver[**?**] est un solveur qui combine avantageusement des versions optimisées des consistances locales comme la 2B-consistance et la Box-consistance.

Problème(# solutions)	Realpaver		Quad		QuadDist	
	t(s)	#box	t(s)	#box	t(s)	#box
penta1(2)	0.02s	2	2s	2	0.23s	2
penta2(2)	0.02s	2	0.51s	2	0.41s	2
penta3(10)	0.03s	10	3.71s	10	0.52s	10
ext-penta1(64)	7.66s	1066	-	-	3.10s	64
ext-penta2(64)	-	-	-	-	8.15s	64
ext-penta3(320)	-	-	-	-	15.25s	320

Fig. 6.6 – Résultats expérimentaux

6.5.1 Problèmes aléatoires

En nous alignant sur la méthodologie utilisée dans [?] et *KB03*, nous avons générés des instances de systèmes satisfiables de contraintes de distance avec un nombre de points n variant de 3 à 20 et un graphe de distance complet.

Pour chaque valeur de n, 25 problèmes ont été générés en prenant un ensemble aléatoires de points dans le plan. Les contraintes de distance sont données par les distances entre chaque paire de points. Les domaines sont générés en prenant une boîte de taille aléatoire autour des points. Les performances moyennes de `Quad` et de *QuadDist* pour chaque ensemble de problèmes sont reportées sur la figure 6.7.

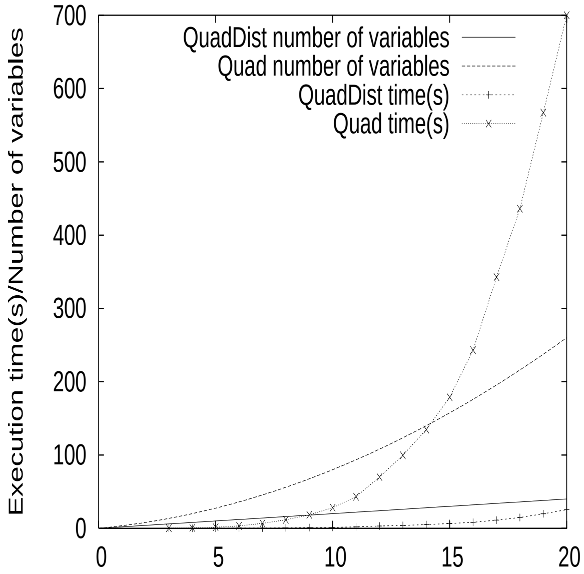


Fig. 6.7 – Temps d'execution par rapport au nombre de variables des systèmes linéaires engendrés

Les deux algorithmes ont été paramètrés pour obtenir des boîtes avec une précision de 10^{-6} sur les bornes. Autrement dit, l'itération de relaxation+filtrage s'arrête lorsque la réduction globale des domaines est inférieure à 10^{-6}. Les calculs ont été effectués sous Linux, sur un

	% reduction	iterations
Quad	56.45	402.23
QuadDist	56.63	356.67

Tab. 6.1 – Réduction des domaines et nombre d'itérations de Quad en comparaison avec QuadDist

PC équipé d'un processeur Pentium IV cadencé à 2.2Ghz avec 512Mo de mémoire.

Sur ces instances aléatoires, on remarque que les deux algorithmes calculent pratiquement la même réduction des domaines, mais QuadDist requiert moins d'itérations pour approximer l'espace des solutions (voir table 6.1). En revanche, QuadDist est bien plus rapide que Quad : par exemple QuadDist requiert moins de 30s en moyenne pour filtrer un problème à 20 points, alors que Quad demande plus de 700s. Notons qu'ILOG Solver [?], un solveur commercial basé sur la Box-consistance, n'est pas capable de filtrer le problème en moins d'une demi-heure.

La section suivante décrit plus en détail les problèmes sur lesquels nous avons réalisé nos expérimentations.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un algorithme de filtrage global pour résoudre les systèmes d'équations de distance. Cet algorithme réalise un filtrage global basé sur des approximations linéaires plus précises que celles qui sont générées par la Quad. Ces relaxations dédiées n'introduisent pas de variables additionnelles et permettent à la Quad de gagner en efficacité sur la résolution d'équations de distance.

Contrairement à la Quad, QuadDist ne garantit pas la correction des approximations linéaires calculées. L'adaptation des principes proposés dans [?] ne devrait toutefois pas poser de difficultés majeures.

Troisième partie

Contribution à la résolution de CSPs continus

Chapitre 7

Décomposition sémantique pour les contraintes de distance

Les solveurs de systèmes de contraintes combinent des techniques de filtrage avec des techniques de recherche systématiques qui ne tiennent pas compte de la sémantique des contraintes. Nous proposons dans cet article une technique de décomposition de domaines guidée par la sémantique des contraintes de distance. Cette décomposition sémantique, que nous nommerons SDD (Semantic Domain Decomposition), isole les sous-espaces disjoints dans l'espace de recherche. Les domaines des coordonnées d'un même point sont décomposés et réduits par la SDD en utilisant les propriétés de monotonie et de convexité des contraintes de distance. Nous montrons comment cette technique peut être combinée avec différents filtrage locaux. L'apport de la SDD est mis en évidence sur différents CSP constitués d'équations de distance.

7.1 Introduction

La satisfaction d'un système de contraintes numériques (ou NCSP[1]) est un problème qui a de nombreuses applications dans les sciences de l'ingénieur. Un NCSP est défini par un ensemble $\mathcal{X}$ de variables, un ensemble $\mathcal{D}$ de domaines associés à ces variables, ainsi qu'un ensemble $\mathcal{C}$ de contraintes constitué d'égalités et d'inégalités entre des fonctions numériques impliquant ces variables. La représentation des domaines par des intervalles a permis une adaptation des outils existants en programmation par contraintes sur des domaines finis. Plus particulièrement, les techniques de consistances locales [**?**], comme la kB-consistance [**?**, **?**] ou la Box-consistance [**?**] calculent une approximation extérieure de l'ensemble des solutions.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

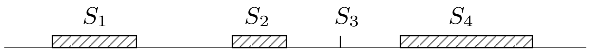


Fig. 7.1 – Disjonctions dans l'espace des solutions

Pour isoler les solutions ponctuelles du système, on utilise des méthodes d'énumération, comme la bissection, en combinaison avec ces techniques de filtrage local. La plupart des sol-

[1]Numerical Constraint Solving Problem

veurs de contraintes mettent en œuvre ces techniques de manière systématique, souvent sans tenir compte de la sémantique du problème. C'est notamment le cas pour la résolution de contraintes géométriques où les points sont représentés par un ensemble de variables traitées de manière indépendante. D'autre part, l'utilisation des propriétés des contraintes, comme la monotonie ou la convexité, améliore l'efficacité des techniques de résolution usuelles [?].

Nous proposons dans cet article une stratégie de recherche qui s'appuie sur la sémantique des contraintes. L'intérêt de cette stratégie est illustrée sur des problèmes de satisfaction de contraintes de distance. Ce type de contraintes intervient dans de nombreux domaines d'application comme la conception optimale de robots [?, ?, ?, ?] et plus généralement les problèmes de modélisation géométrique, les problèmes de conformation moléculaire [?, ?], ou encore dans d'autres applications plus théoriques comme le problème de *circle packing* [?, ?, ?]. Les systèmes d'équations de distance sont des problèmes particulièrement difficile à résoudre par les méthodes classiques. En effet, les domaines peuvent contenir à la fois des continuums et des solutions ponctuelles. De plus, le nombre important d'axes de symétrie et de disjonctions dans l'espace des solutions augmente la combinatoire du problème.

Différentes techniques spécifiques de filtrage ont été proposées pour la résolution de systèmes d'équations de distance, notamment les travaux de Lebbah *et al* qui introduisent une méthode de filtrage global nommée *Quad* et spécifiquement adaptée aux contraintes quadratiques [?, ?]. On peut citer également les travaux de Markot et Csendes qui présentent une technique basée sur une représentation des domaines par des polytopes convexes [?, ?, ?]. Cette technique, nommée *Method of "Active Areas"*, a été réintroduite par Heusch sous la forme d'une contrainte globale [?].

L'approche proposée ici est complémentaire à ces filtrages dans la mesure où elle guide la stratégie de recherche. Son objectif est d'identifier des points de choix les plus plus pertinents. C'est une approche alternative aux techniques de décomposition structurelle du graphe de contraintes introduites par Jermann *et al* [?, ?, ?]. En effet, cette dernière approche utilise la structure des systèmes de contraintes pour décomposer en sous-systèmes plus simples alors que nous proposons d'utiliser les propriétés des contraintes pour décomposer les domaines.

La section suivante décrit de manière informelle le principe de notre stratégie de recherche guidée par la sémantique des contraintes de distance.

7.2 Description informelle

Les méthodes de résolution de CSPs numériques sont souvent basées sur une approche de type Branch & Prune. Basiquement, l'idée est de découper le domaine d'une variable afin de diviser le problème en deux sous-problèmes (Branch). Chaque sous-problème est alors réduit ou éliminé en utilisant une méthode de filtrage, par exemple une consistance locale. Puis, un nouveau domaine est choisi pour être découpé et le processus recommence jusqu'à ce que tous les domaines soient de taille inférieure à un certain paramètre de précision.

Notre décomposition se place en amont de la résolution proprement dite dans la mesure où elle divise l'espace de recherche en sous-espaces vérifiant de fortes propriétés (consistance locale et monotonie des contraintes) mais non nécessairement réduits à une solution ponctuelle.

7.2.1 Décomposition sémantique des domaines

Nous introduisons ici une technique de décomposition sémantique pour les contraintes de distance, nommée SDD (Semantic Domain Decomposition). Cette méthode découpe et réduit les domaines des points mis en jeu dans une contrainte de distance en utilisant ses propriétés de monotonie. La forme canonique des équations de distance [2] $X^2 + Y^2 - D^2 = 0$ est utilisée pour isoler ces parties monotones sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$.

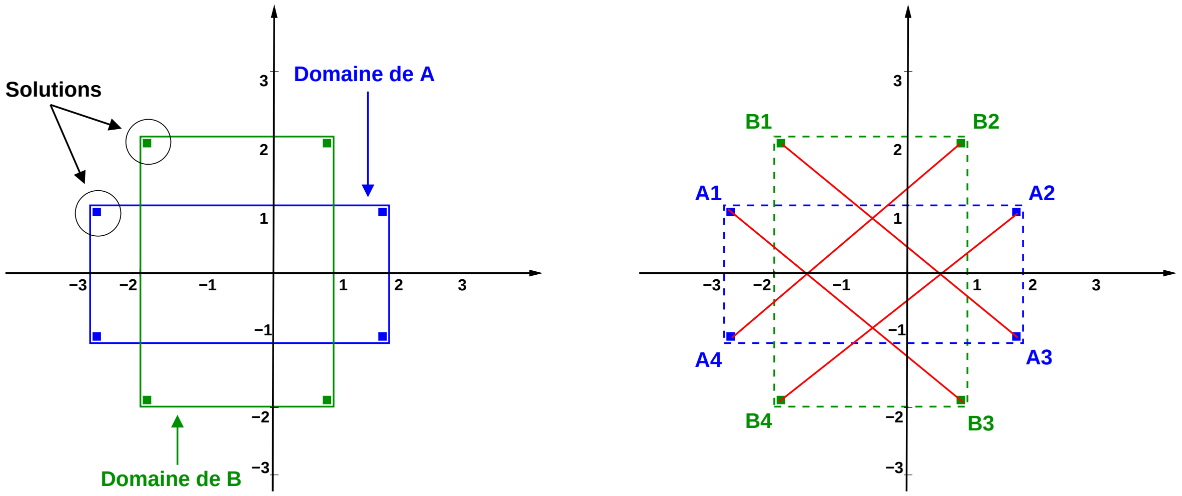


FIG. 7.2 – La figure de gauche montre les domaines de A et B après un filtrage par 2B-consistance. Les carrés pleins représentent les continuums de solutions. La figure de droite montre les 4 sous-domaines de A et ceux de B ainsi que leurs liaisons dans la micro-structure calculée par la SDD.

Un changement de variable linéaire permet de passer de la forme canonique à une contrainte et ainsi d'extraire les sous-domaines des points sur ces parties monotones. L'exemple suivant illustre les apports de SDD par rapport aux consistances locales :

Exemple 7.2.1 *Soient 2 points du plan $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ dont les domaines sont respectivement les boîtes $[-3, 2] \times [-1, 1]$ et $[-2, 1] \times [-2, 2]$. On cherche à déterminer les points A et B tels que la longueur du segment $[AB]$, notée D, soit dans l'intervalle $[4.95, 5]$. Le CSP correspondant est décrit par la contrainte $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = D^2$, avec $x_A \in [-3, 2]$, $x_B \in [-1, 1]$, $y_A \in [-2, 1]$, $y_B \in [-2, 2]$ et $D \in [4.95, 5]$.*

La 2B-consistance ne permet pas de réduire ces domaines ; la figure 7.2 (à gauche) montre que les continuums de solutions sont proches des bornes des domaines. À droite, la figure 7.2 montre que la SDD divise le CSP initial en 4 sous-CSP correspondant aux 4 sous-espaces de solutions locales. Ces sous-espaces sont modélisés par un graphe de sous-domaines dont les arêtes sont les segments A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 et A_4B_2.

Notons qu'avec une précision de l'ordre de 0.05 la bissection combinée à la 2B permettrait d'obtenir un résultat similaire mais avec 2 étapes de division alors que la SDD ne nécessite

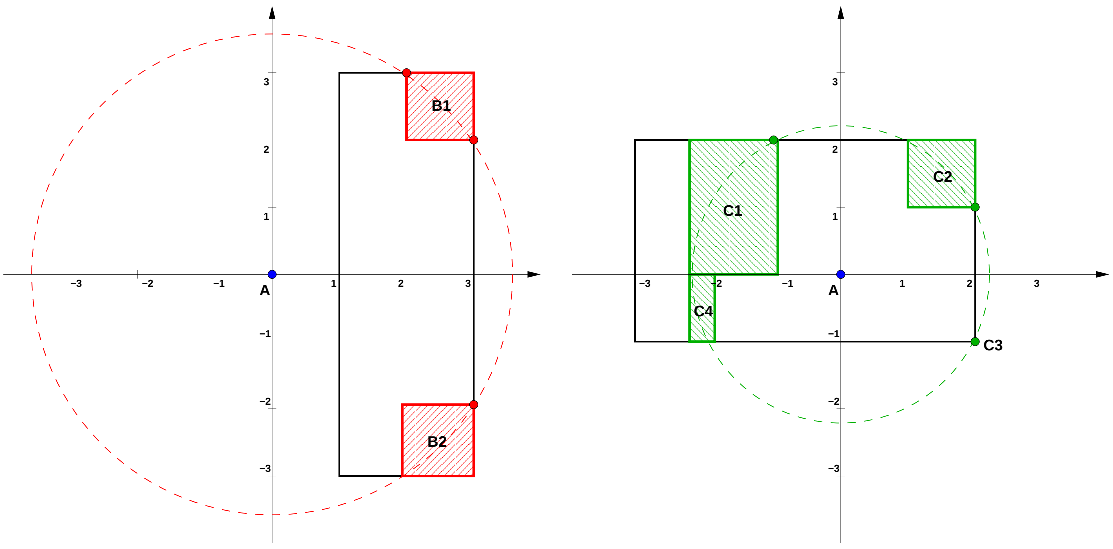
[2] En dimension 2 pour simplifier la notation. La généralisation en dimension quelconque est triviale.

qu'une étape. La combinaison 2B & bissection avec une petite précision conduirait à énumérer un grand nombre de points solutions du système.

Une approche basée sur les unions d'intervalles [?] permettrait également d'obtenir une décomposition similaire pour chacun des domaines mais sans la micro-structure. Sans ces liaisons, les 16 combinaisons de sous-domaines doivent être examinées afin de trouver les sous-espaces potentiellement porteurs de solutions.

7.2.2 Décomposition sémantique d'un CSP

Dans cette section, nous montrons sur un exemple simple comment la SDD est propagée sur l'ensemble du système de contraintes. Le résultat de cette propagation est une décomposition du CSP initial en un ensemble de sous-domaines sur lesquels toutes les contraintes sont consistantes et monotones. Dans cet exemple notre algorithme de décomposition suffit à isoler rapidement les solutions du système.



(a) (b)

Fig. 7.3 – La figure 7.3(a) montre la décomposition du domaine de B en 2 sous-domaines B_1 et B_2, pour la contrainte c_1. La figure 7.3(b) montre la décomposition du domaine de C en 4 sous-domaines C_1, C_2, C_3 et C_4, pour la contrainte c_2.

Exemple 7.2.2 *Considérons dans le plan, 3 points* $A(0,0)$, $B(x_B, y_B)$ *et* $C(x_C, y_C)$ *où le point* P_1 *est fixé à l'origine du repère cartésien. Les domaines initiaux de* x_B, y_B, x_C *et* y_C *sont respectivement* $[1,3]$, $[-3,3]$, $[-3,2]$ *et* $[-1,2]$. *Les distances entre les points sont données par :* $AB^2 = 13$,$AC^2 = 5$ *et* $BC^2 = 10$. *Le CSP correspondant est le suivant :*
- $\mathcal{X} = \{x_B, y_B, x_C, y_C\}$.
- $\mathcal{D} = \{[1,3], [-3,3], [-3,2], [-1,2]\}$.
- $\mathcal{C} = \begin{cases} c_1 : & x_B^2 + y_B^2 & = & 13 \\ c_2 : & x_C^2 + y_C^2 & = & 5 \\ c_3 : & (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 & = & 10 \end{cases}$

Les 3 solutions de ce CSP sont représentées graphiquement sur la figure 7.4.

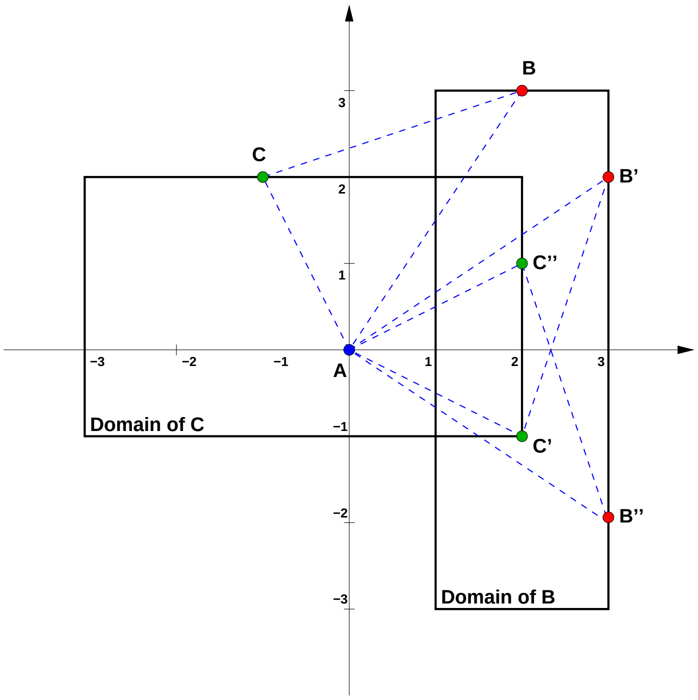


FIG. 7.4 – Les 3 solutions du CSP de l'exemple 7.2.2 sont les triangles ABC, $AB'C'$ et $AB''C''$.

La SDD appliquée à la contrainte c_1 décompose le domaine initial de B en 2 sous-domaines B_1 et B_2. De même, la contrainte c_2 permet à la SDD de décomposer le domaine de C en 4 sous-domaines C_1, C_2, C_3 et C_4. La figure 7.5 montre le résultat de cette décomposition. Le traitement de la contrainte c_3 nous conduit à examiner les 8 combinaisons de sous-domaines de B et C :

- B_1C_4 et B_2C_4 sont immédiatement éliminées car C_4 n'a de support ni dans B_1, ni dans B_2.
- De même pour B_2C_3 et B_2C_1, car B_2 n'a de support ni dans C_3, ni dans C_1.
- Une consistance locale appliquée à B_1C_1, B_1C_3 et B_2C_2 suffit à isoler les 3 solutions du système.

La suite de cet article est organisé de la manière suivante : dans la section 7.3, nous donnons les définitions nécessaires à la compréhension de la suite l'article. La section 7.4 détaille la décomposition sémantique des domaines et l'algorithme de décomposition de CSP. Enfin, la section 8.4 montre que la SDD améliore les performances des méthodes traditionnelles (consistance locale couplée avec la bissection) pour différentes variantes du classique problème du pentagone, ainsi que pour un problème classique de robotique.

7.3 Préliminaires

Nous utilisons la définition classique des CSP, telle qu'elle est énoncée par Mackworth :

Définition 7.3.1 (Constraint Solving Problem (CSP)[?]) *Un $\mathcal{CSP}$ est un triplet* $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ *tel que :*

- $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *est un ensemble de variables.*
- $\mathcal{D} = \{D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}\}$ *est un ensemble de domaines.* D_{x_i} *est le domaine contenant toutes les valeurs potentielles de la variable* x_i.
- $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ *est un ensemble de contraintes.*

On note $Var(c)$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{X}$ *des variables de* c.

Dans le cas des CSP continus, les domaines des variables sont représentées par des intervalles, de la forme $D_x = [\underline{x}, \overline{x}]$.

Le problème de satisfaction de contraintes de distance consiste à déterminer les positions de n points satisfaisant un ensemble de relations de distance euclidienne, dans un espace borné. Une contrainte de distance est une équation quadratique qui met en jeu les coordonnées de deux points $P_i(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^p)$ et $P_j(x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^p)$, ainsi qu'une variable réelle positive δ_{ij} :

$$\sum_{k=1}^{p} (x_i^k - x_j^k)^2 = {\delta_{ij}}^2$$

Les domaines des coordonnées des points et de la distance δ_{ij} sont des intervalles. Le domaine d'un point est une boîte définie par le produit cartésien des domaines de ses coordonnées.

La description la plus générale en dimension p de ce problème sous la forme d'un CSP est la suivante :

- $\mathcal{P} = \{P_i(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^p)\}_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de n points de $\mathbb{R}^p$.
- $\mathcal{D} = \{D_i^1, D_i^2, \ldots, D_i^p\}_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de domaines associés aux composantes des points et tels que $D_i^k = [\underline{x_i^k}, \overline{x_i^k}]$. Le domaine du point P_i, noté D_i est la boite $D_i^1 \times D_i^2 \times \ldots \times D_i^p$.
- $\Delta = \{\Delta_k\}_{1 \leq k \leq m}$ un ensemble de m intervalles associés aux distances euclidiennes δ_k entre les couples de points (P_{i_k}, P_{j_k}) définit un ensemble de m contraintes :
$$\forall k \leq m \quad c_k : \quad \sum_{l=1}^{p} (x_{i_k}^l - x_{j_k}^l)^2 = {\delta_k}^2 \quad \text{avec } \delta_k \in \Delta_k$$

En dimension 2, on notera les coordonnées du point P_i par (x_i, y_i), son domaine par $D_i = D_{x_i} \times D_{y_i}$ et les contraintes par :

$$\forall k \leq m \quad c_k : \quad (x_{i_k} - x_{j_k})^2 + (y_{i_k} - y_{j_k})^2 = {\delta_k}^2$$

Les distances sont des caractéristiques du problème : elles ne seront pas représentées par des variables du CSP et on ne cherchera pas à réduire leur domaines. Les intervalles associés aux distances, généralisent les relations de distance au sens large. À un intervalle dont les bornes sont égales correspond une équation. Deux inéquations représentent la relation de distance correspondant à un domaine non ponctuel.

La section suivante présente la technique de décomposition des domaines qui est au cœur de notre démarche.

7.4 Décomposition sémantique d'un CSP

Les solveurs de contraintes utilisent habituellement une technique de bissection qui consiste à découper un domaine en deux parties généralement de même taille. Différentes heuristiques (taille des domaines, variables contiguës, ...) peuvent être utilisées pour sélectionner le domaine de la variable à bissecter. C'est une méthode systématique qui ne prend pas en compte les informations spécifiques des contraintes considérées.

Nous proposons une stratégie de résolution qui tire profit des propriétés spécifiques des contraintes de distance. Les principales caractéristiques de cette méthode sont :

- Un découpage simultané de toutes les variables liées par une contrainte.
- Une stratégie de choix de point de coupe qui exploite les propriétés sémantiques des contraintes (monotonie et convexité).

Cette stratégie améliore les performances des résolveurs de contraintes basées sur des consistances locales (*c.f.* expérimentations dans la dernière section de l'article).

Dans cette section nous décrivons plus formellement notre algorithme de décomposition. La section 7.4.2 détaille la réécriture du CSP initial avant l'application de notre stratégie de recherche. Dans la section 7.4.3, nous verrons que le schéma général de cet algorithme repose non sur un découpage systématique des domaines mais guidé par la sémantique des contraintes. Dans la section suivante nous présentons cette technique de décomposition qui est au coeur de notre démarche.

7.4.1 Décomposition des domaines guidée par la sémantique des contraintes

On considère la forme canonique des équations de distance :

$$c : x^2 + y^2 = \delta^2$$

Cette forme nous permet d'isoler rapidement les sous-domaines des variables x et y sur lesquels la contrainte c possède un support et est monotone.

Définition 7.4.1 (Semantic Domain Decomposition(SDD)) *Considérons la contrainte $c(x, y) : x^2 + y^2 = \delta^2$ avec $(x, y) \in D$. On définit l'ensemble SDD(c, D) des sous-domaines engendrés par la décomposition sémantique du domaine D relativement à la contrainte c. Ces sous-domaines sont définis par :*

$$D_+^+ = \square\{(x, y) \in D : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge c(x, y)\}$$

$$D_+^- = \square\{(x, y) \in D : x \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge c(x, y)\}$$

$$D_-^- = \square\{(x, y) \in D : x \leq 0 \wedge y \leq 0 \wedge c(x, y)\}$$

$$D_-^+ = \square\{(x, y) \in D : x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge c(x, y)\}$$

où $\square\{S\}$ désigne la plus petite boîte contenant tous les éléments de l'ensemble S et $c(\alpha, \beta)$ signifie que la contrainte c est vérifiée pour $x = \alpha$ et $y = \beta$. Notons que certains de ces sous-domaines peuvent être vides.

Propriété 7.4.1 *Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - \delta^2$ et la contrainte définie par $f(x, y) = 0$ et Soit $s \in$ SDD(c, D), tel que $s \neq \emptyset$. Alors la fonction f est monotone sur s.*

Preuve Le vecteur gradient de $f(x, y)$ est défini par :

$$\nabla_f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = (2x, 2y)$$

Chacune des composantes de $\nabla_f(x, y)$ est de signe constant sur tout sous-domaine $s \in$ SDD(c, D), par définition. Donc f est monotone sur s.

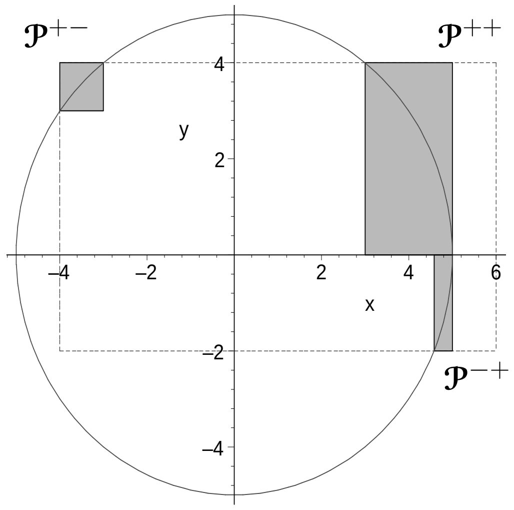


FIG. 7.5 – Illustration de la décomposition sémantique sur l'exemple 7.4.1.

Comme f est monotone sur chacun des sous-domaines considérés, nous pouvons utiliser l'extension aux intervalles des fonctions de projection[**?**] associées à $f(x, y)$ pour calculer la plus petite boite qui contient toutes les solutions de $c(x, y)$ sur le dit domaine.

Exemple 7.4.1 *Considérons les variables x et y de domaines respectifs* $[-4, 5]$ *et* $[-2, 4]$ *et la contrainte c :*

$$c : x^2 + y^2 = 25$$

La figure 7.5 montre que la décomposition sémantique découpe le domaine du vecteur (x, y) *en 3 sous-domaines :* $[0, 5] \times [0, 4]$ *réduit à* $[3, 5] \times [0, 4]$*, à l'aide de la projection de la contrainte c. De même,* $[-4, 0] \times [0, 4]$ *est réduit à* $[-4, -3] \times [3, 4]$. $[-4, 0] \times [-2, 0]$ *est éliminé puisque la contrainte n'a pas de support dans ce domaine. Enfin,* $[0, 5] \times [-2, 0]$ *est réduit à* $[4.5825, 5] \times [-2, 0]$.

La fonction `SDD` (*c.f.* Fonction 1) réalise cette décomposition sémantique en considérant une contrainte de distance sous forme canonique C et le domaine $D = D_x \times D_y$ du vecteur associé à C. La réduction des sous-domaines (ligne 7) est effectuée par la fonction `Narrow`(D, C) qui utilise les fonctions de projection suivantes :

$$D_x \leftarrow D_x \cap SQRT(\Delta^2 - Y^2)$$

$$D_y \leftarrow D_y \cap SQRT(\Delta^2 - X^2)$$

où $SQRT(\Delta^2 - X^2)$ est l'extension aux intervalles[**?**] de la fonction $\sqrt{\delta^2 - x^2}$. Les sous-domaines non réduits à l'ensemble vide sont ajoutés à l'ensemble S, destiné à contenir les sous-domaines résultant de cette décomposition (ligne 9).

Cette fonction dont la complexité temporelle est constante renvoie donc l'ensemble des sous-domaines décrits par la proposition 7.4.1.

Notons qu'en dimension p le nombre maximal de sous-domaines engendrés par cette décomposition est exponentiel et égal à 2^p. Néanmoins cette méthode est tout à fait adaptée

Function 1 SDD(C, D)

```
D_1 ← {(x,y) ∈ D : x ≥ 0 ∧ y ≥ 0}
D_2 ← {(x,y) ∈ D : x ≤ 0 ∧ y ≥ 0}
D_3 ← {(x,y) ∈ D : x ≤ 0 ∧ y ≤ 0}
D_4 ← {(x,y) ∈ D : x ≥ 0 ∧ y ≤ 0}
S ← ∅
for all i such that 1 ≤ i ≤ 4 do
  D_i ← Narrow(D_i, C)
  if D_i ≠ ∅ then
    S ← S ∪ {D_i}
  end if
end for
return S
```

en dimension faible (2 et 3), où les applications faisant intervenir des contraintes de distance sont les plus nombreuses.

Notons également qu'un sous-domaine s issu de la décomposition sémantique ne peut être décomposé à plusieurs reprises, ce qui se traduit par la propriété suivante :

Propriété 7.4.2 (Point fixe) *Soit $s \in SDD(c, D)$ alors $SDD(c, s) = s$.*

7.4.2 Réécriture du CSP initial

Considérons un CSP $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ constitué exclusivement de m contraintes de distance de la forme[3] :

$$c_k : (x_{j_k} - x_{i_k})^2 + (y_{j_k} - y_{i_k})^2 = \delta_k^2$$

La réécriture du CSP initial consiste à mettre toutes les contraintes sous forme canonique. Pour chaque contrainte c_k on introduit deux variables additionnelles X_k et Y_k correspondant aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{P_{i_k}P_{j_k}}$. Les domaines V_k des vecteurs (X_k, Y_k) sont calculés en utilisant l'arithmétique des intervalles. La réécriture du système consiste à ajouter les contraintes de changement de repère et à remplacer c_k par sa forme canonique :

$$\begin{cases} c'_k : X_k^2 + Y_k^2 = \delta_k^2 \\ X_k = x_{j_k} - x_{i_k} \\ Y_k = y_{j_k} - y_{i_k} \end{cases}$$

L'ensemble des domaines est donc de la forme :

$$\mathcal{D} = \{V_1, \ldots, V_m, D_1, \ldots, D_n\}$$

où D_i est le domaine du point P_i avec $1 \leq i \leq n$, et V_k est le domaine du vecteur (X_k, Y_k) associé à la contrainte c'_k avec $1 \leq k \leq m$.

Les contraintes c'_k étant sous forme canonique, les domaines V_k des vecteurs (X_k, Y_k) pourront être décomposés en utilisant la technique de décomposition sémantique (*c.f* section 7.4.1).

[3]Nous décrivons notre méthode en dimension 2, l'extension en dimension supérieure est triviale

7.4.3 Algorithme de décomposition sémantique

Notre algorithme de Décomposition Sémantique, nommé DS, considère un CSP (X, D, C) et calcule une décomposition du domaine initial D et un ensemble de sous-domaines sur lesquels :

- toutes les contraintes de C sont monotones
- une propriété de consistance locale est vérifiée

Par exemple, soit le CSP initial $(\{x, y\}, \{D_x, D_y\}, C)$. DS va générer un ensemble de couples de la forme $\{D_x^i, D_y^j\}$ où $D_x^i \subset D_x$ et $D_y^j \subset D_y$ De plus, pour chacun de ces couples engendrés par DS, les CSP $(\{x, y\}, \{D_x^i, D_y^j\}, C)$ vérifient une propriété de consistance locale.

DS est donc paramétré par une fonction nommée LC qui étant donné un CSP (X, D, C) renvoie l'ensemble des domaines obtenus par un filtrage utilisant une consistance locale(*e.g.* 2B-consistance[?, ?], Box-consistance[?]). Si le CSP ne vérifie pas la consistance locale associée à LC, cette fonction renvoie un ensemble vide.

Le principe de DS (voir fonction 2) est sensiblement le même que celui d'un algorithme de recherche arborescente basé sur la bissection. La principale différence étant le fait que les domaines des (X_k, Y_k) sont décomposés en utilisant la décomposition sémantique décrite précédemment. Contrairement à la bissection dont le processus de décomposition ne s'arrête que lorsque tous les domaines sont suffisamment petits (de taille inférieure à un $\epsilon > 0$ donné), le point fixe est atteint lorsque tous les domaines on été considérés (voir propriété 7.4.2). Autrement dit, tous les domaines des vecteurs V_k vérifient la propriété $V_k = \texttt{SDD}(V_k, c_k)$, ce qui signifie que V_k a déjà été décomposé par SDD.

Function 2 $\texttt{DS}(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$

$R \leftarrow \emptyset$
$Q \leftarrow \{\mathcal{D}\}$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  Choose S from Q %% $S = \{V_1, \ldots, V_m, D_1, \ldots, D_n\}$
  if $V_k = \texttt{SDD}(V_k, c_k)$ for all $V_k \in S$ **then**
    $R \leftarrow R \cup \{S\}$
  else
    Choose V_k from S
    Let $c_k \in C$ the constraint associated to V_k.
    for all $s \in \texttt{SDD}(V_k, c_k)$ **do**
      $S' \leftarrow S[V_k \leftarrow s]$ %% $S' = \{V_1, \ldots, V_{k-1}, s, V_{k+1}, \ldots, V_m, D_1, \ldots, D_n\}$
      $S' \leftarrow \texttt{LC}(\mathcal{X}, S', \mathcal{C})$ %% Local filtering of the domain S'
      if $S' \neq \emptyset$ **then**
        $Q \leftarrow Q \cup \{S'\}$
      end if
    end for
  end if
end while
return R

Plus précisément, DS utilise un ensemble Q contenant des sous-domaines du domaine initial et initialisé à $\{D\}$ (ligne 2). S est alors extrait de l'ensemble Q et l'on vérifie si le point fixe est atteint (lignes 4 et 5).

Si c'est le cas, S est ajouté à R, l'ensemble destiné à contenir les sous-domaines engendrés par DS (ligne 6). Sinon, on choisit un vecteur dont le domaine V_k n'a pas encore été décomposé par SDD (ligne 8). Pour tous les sous-domaines engendrés par la décomposition sémantique du domaine du vecteur choisi (ligne 10), on ajoute à Q les sous-domaines de S correspondants s'ils vérifient la propriété de consistance locale (lignes 10 à 15). L'appel à la fonction LC utilise toutes les contraintes de $\mathcal{C}$ pour réduire les domaines de toutes les variables.

L'heuristique utilisée pour choisir le sous-domaine extrait de Q (ligne 4) est de choisir celui dont la décomposition est la plus avancée. Cela correspond à une recherche arborescente en profondeur d'abord, ce choix se fait donc en temps constant.

L'heuristique utilisée pour choisir le prochain domaine à décomposer (ligne 8) est de choisir celui dont la décomposition par SDD engendre un nombre de sous-domaines minimal et strictement supérieur à 1. Une recherche exhaustive du minimum est utilisée avec une complexité temporelle en $\mathcal{O}(m)$ où m est le nombre de vecteurs, c'est-à-dire de contraintes du système.

Nous allons maintenant montrer l'apport de notre algorithme de décomposition sur différentes expérimentations.

7.5 Résultats expérimentaux

Les sections 7.5.1 et 7.5.2 détaillent respectivement les problèmes du pentagone et de la cinématique directe d'un robot plan. Les résultats obtenus par DS sur ces problèmes sont détaillés dans la section 7.5.3, ainsi que la comparaison de ces résultats avec ceux obtenus avec la bissection.

7.5.1 Problème classique du pentagone

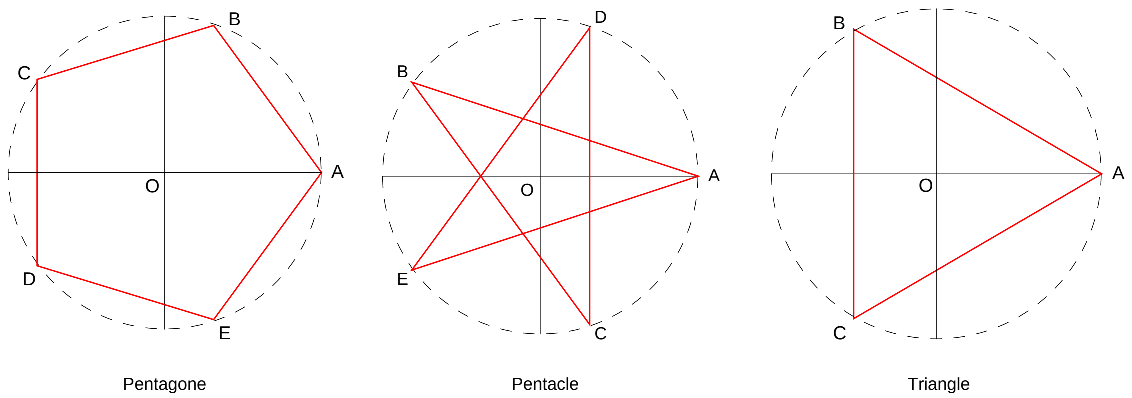


FIG. 7.6 – Solutions du problème du pentagone

Le problème du pentagone est un CSP bien connu dans la communauté de la programmation par contraintes sur les domaines continus. Il est souvent utilisé pour illustrer les problèmes que rencontrent les méthodes de filtrage local, lorsque l'espace solution est fractionné. Il s'agit d'un CSP géométrique en 2D, constitué de 5 points P_1,P_2,P_3,P_4, et P_5 sur le cercle unitaire, tels que les segments P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, et P_1P_5 soient de longueur égale à d. L'un de ces 5 points est fixé au point de coordonnées (1,0) pour éviter que le nombre de solutions ne soit infini. Selon le choix de la distance d entre deux points consécutifs, on obtient 3 instances que nous nommerons *penta1*, *penta2* et *penta3* donnant lieu à 3 types de solutions (Fig. 7.6) :

1. *penta1* : Si $d = 2\sin(\frac{\pi}{5})$ il y a 2 solutions pour la combinaison $P_1P_2P_3P_4P_5$ formant un pentagone, $ABCDE$, $AEDCB$.

2. *penta2* : Si $d = 2\sin(\frac{2\pi}{5})$ il y a 2 solutions pour la combinaison $P_1P_2P_3P_4P_5$ formant un pentacle, $ABCDE$, $AEDCB$.

3. *penta3* : Si $d = 2\sin(\frac{2\pi}{3})$ il y a 10 solutions pour la combinaison $P_1P_2P_3P_4P_5$ formant un triangle, $ABCAB$,$ACBAC$, $ABCAC$, $ACBAB$, $ABABC$, $ACACB$, $ABCBC$, $ACBCB$, $ABACB$ et $ACABC$.

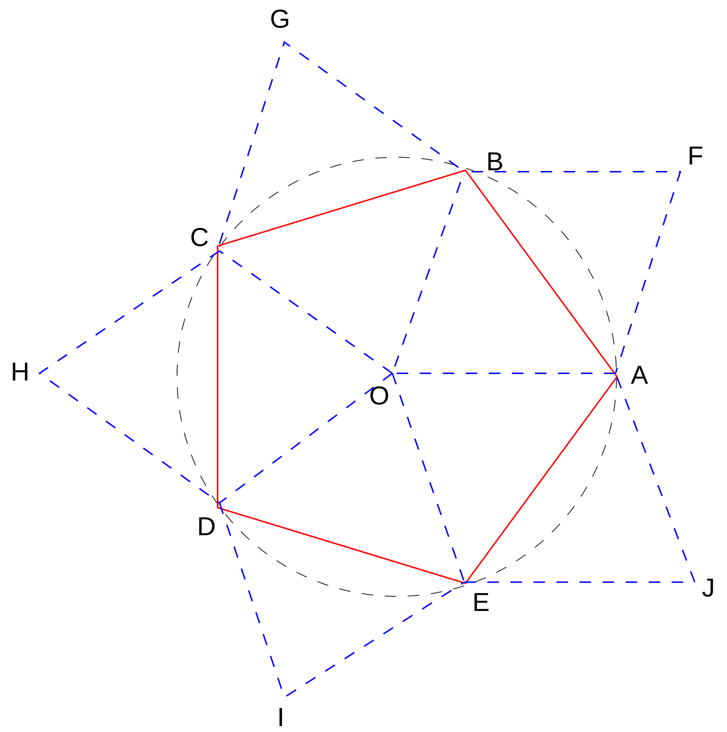


FIG. 7.7 – Ajout de contraintes dans le problème du pentagone

Pour compliquer un peu le problème, cinq points supplémentaires sont ajoutés au problème initial, un entre chaque arête à une distance de 1 de chaque extrémité (Fig. 7.7). Pour une solution du problème classique, cela engendre $2^5 = 32$ fois plus de solutions, soit 64 pour *penta1* et *penta2*, et 320 pour *penta3*. L'instance correspondant à l'extension de *penta1* (resp. *penta2*, *penta3*) étendue par ce procédé sera nommée *ext-penta1* (resp. *ext-penta2*, *ext-penta3*)

7.5.2 Cinématique directe d'un robot plan

Le manipulateur de type 3-RPR est formé de deux triangles : la base ABC et la plate-forme DEF reliés par 3 jambes AD, BE et CF (voir figure 7.8). Le problème de la cinématique directe est de trouver toutes les positions de la plate-forme compatibles avec les longueurs des jambes qui sont les données du problème. Ce problème possède 6 solutions réelles[**?**].

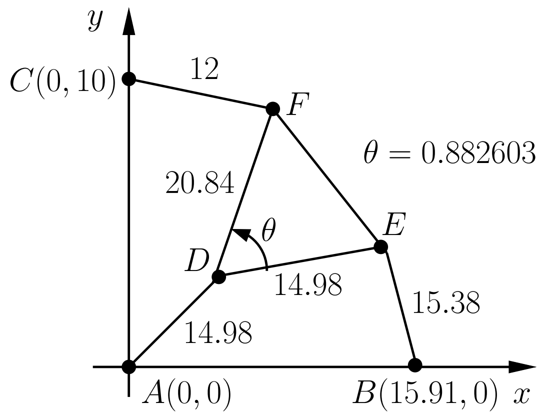


FIG. 7.8 – Un manipulateur planaire de type 3-RPR

7.5.3 Résultats et analyse

Pb(#sol)	Bissection				DS			
	2B(10^{-10})		Box(10^{-10})		2B(10^{-10})		Box(10^{-10})	
	t(s)	#box	t(s)	#box	t(s)	#box	t(s)	#box
penta1(2)	0.02s	4	0.16s	4	0.03s	2	0.16s	2
penta2(2)	0.03s	100	0.07s	2	0.03s	2	0.03s	2
penta3(10)	0.04s	56	0.63s	192	0.03s	10	0.18s	10
ext-penta1(64)	1.47s	5128	3.02s	64	0.26s	64	2.71s	64
ext-penta2(64)	3457.32s	430798	1.91s	64	0.08s	16	0.52s	16
ext-penta3(320)	21.44s	87642	1705.45s	210398	1.12s	320	9.53s	320
robot2D(6)	7.77s	127	1.7s	12	0.26s	18	0.37s	20

FIG. 7.9 – Résultats expérimentaux

Nous avons comparé les performances de `DS` avec celles de la bissection en combinant ces méthodes avec la 2B ou la Box avec une précision de 10^{-10}. Les expérimentations ont été réalisés en utilisant le solveur Ilog Solver 5.0 [**?**] sur un PC équipé d'un microprocesseur pentium IV à 2GhZ et 128Mo de mémoire.

Les résultats (voir tableau 7.9) montrent que pour les trois premiers exemples (penta1,penta2, penta3), les temps de toutes les approches sont de l'ordre du centième de secondes et la comparaison n'est pas significative. On note toutefois que `DS` génère une boîte par solution alors que la bissection génère de nombreuses boîtes parasites.

Pour *ext-penta3*, les performances de `DS` sont bien meilleures que celles d'un algorithme de recherche basé sur la bissection (le facteur de gain est compris entre 20 et 200). Pour *ext-penta2*, le gain de temps est également significatif mais certaines boîtes doivent encore être découpées pour isoler les solutions.

Pour robot2D, le gain de temps est également significatif mais quelques boîtes sans solutions sont générées, ce qui est dû aux faibles capacités de filtrage des consistances locales utilisées. Sur cet ensemble de tests préliminaires, les gains en performances et précision sont très encourageants.

7.6 Conclusion

Nous avons introduit dans cet article une nouvelle méthode de recherche basée sur une décomposition des domaines des variables, qui exploite directement la sémantique des contraintes de distance entre deux points. Les résultats obtenus sur des problèmes académiques de taille réduite sont encourageants. Toutefois, des expérimentations sur des problèmes réels d'une taille plus conséquente sont nécessaires pour valider effectivement la démarche. La suite des travaux porte d'une part la poursuite des expérimentations sur des problèmes issus de la robotique et de la théorie des mécanismes, d'autre part l'étude des possibilités d'élargir cette approche à d'autres systèmes de contraintes non-linéaires.

Chapitre 8

Mind The Gaps : Une nouvelle stratégie de résolution pour les techniques de consistances

Les outils classiques pour résoudre des CSPs numériques sont basés sur un algorithme de type Branch&Prune, une énumération dichotomique des domaines alternée avec un filtrage par consistance. Dans la plupart des solveurs d'intervalles, l'étape de filtrage est réalisée par des consistances locales (Hull-Consistance [?, ?, ?], Box-consistance [?, ?, ?]) ou des consistances partielles (kB-consistances [?, ?], Bound-consistance [?]). Les algorithmes de filtrage associés identifient souvent des trous dans les domaines, *i.e.*des intervalles de valeurs inconsistantes strictement inclus dans les domaines. Pourtant ces trous sont utilisés uniquement dans le but de calculer un filtrage plus fort des domaines.

Dans ce chapitre, nous présentons un stratégie de recherche, nommée MindTheGaps, qui exploite les trous identifiés durant l'étape de filtrage. Les trous sont collectés avec un sur-coût minime et sont utilisés pour sélectionner la direction de coupe ainsi que pour définir les points de coupe dans le domaine sélectionné.

Découper le domaine en éliminant ces trous permet de réduire l'espace de recherche, ce qui n'est pas le cas des techniques de splitting classique comme la bisection. Cela aide le solveurs à éliminer certaines solutions redondantes et à isoler des solutions disjointes. Des résultats expérimentaux montrent que MindTheGaps améliore de manière significative les performances de l'algorithme de résolution classique.

8.1 Introduction

Les consistances locales pour des CSPs aux domaines finis ont été adaptées aux CSPs numériques. Les algorithmes de filtrage associés éliminent des domaines certaines valeurs inconsistantes, c'est-à-dire pour lesquelles il existe au moins une contrainte qui ne peut être vérifiée. En pratique, le filtrage est en général limité à la contraction des bornes des intervalles.

Les techniques classiques pour résoudre des CSPs numériques sont basées sur un algorithme de type Branch&Prune. Cet algorithme alterne filtrages et décompositions de domaines jusqu'à ce qu'une précision donnée sur les domaines soit atteinte. L'étape de décomposition (ou *splitting*) sélectionne une variable et découpe son domaine en plusieurs parties. Les sous-problèmes générés sont alors résolus de manière indépendante. La technique la plus souvent utilisée est la bisection, qui coupe le domaine sélectionné en 2 parties de même taille. Diverses stratégies de sélection de domaines ont déjà été présentées dans la section 3.4.1 page 25. Parmi ces méthodes, celle qui est considérée comme la plus efficace est le Round Robin (RR), qui sélectionne les variables à tour de rôle.

Dans la plupart des solveurs d'intervalles, l'étape de filtrage est réalisée par des consistances locales (Hull-Consistance [?, ?, ?], Box-consistance [?, ?, ?]) ou des consistances partielles (kB-consistances [?, ?], Bound-consistance [?]). Les algorithmes de filtrage associés identifient souvent des trous dans les domaines, *i.e.*des intervalles de valeurs inconsistantes strictement inclus dans les domaines. Or, ces trous sont utilisés uniquement dans le but de calculer un filtrage plus fort des domaines.

Dans ce chapitre, nous présentons un stratégie de recherche, nommée MindTheGaps, qui exploite les trous identifiés durant l'étape de filtrage. Les trous sont collectés avec un sur-coût minime et sont utilisés pour sélectionner la direction de coupe ainsi que pour définir les points de coupe dans le domaine sélectionné. Si aucun trou n'a été identifié, l'étape de décomposition est réalisée en utilisant bisection combinée avec une heuristique standard de choix de variable.

Découper le domaine en éliminant ces trous permet de réduire l'espace de recherche, ce qui n'est pas le cas des techniques de splitting classique comme la bisection. Cela aide le solveurs à éliminer certaines solutions redondantes et à isoler des solutions disjointes. Des résultats expérimentaux montrent que MindTheGaps améliore de manière significative les performances de l'algorithme de résolution classique.

En général, un backtracking chronologique est utilisé pour gérer les sous-problèmes générés par l'étape de décomposition. Il existe pourtant d'autres méthodes plus sophistiquées comme par exemple le backtracking dynamique [?]. MindTheGaps est compatible avec n'importe quelle technique de backtracking.

Une approche similaire avait déjà été suggérée par Hansen [?, ?] pour la méthode de Newton par intervalles. L'algorithme de recherche exploite les trous identifiés lors de l'étape de résolution par l'algorithme de Gauss-Seidel. Cette approche a également été utilisée par Ratz [?] pour traiter des problèmes d'optimisation. Trois différentes stratégies de décomposition ont été explorées par Ratz :

- Utiliser seulement le trou le plus grand pour décomposer le domaine et générer 2 sous-problèmes [?].
- Utiliser au plus k trous dans le même domaine pour décomposer le domaine et générer $k+1$ sous-problèmes [?].
- Utiliser au plus 3 trous dans 3 domaines différents, combiner les sous-domaines pour générer au plus 8 sous-problèmes [?].

En fait, dans ce chapitre nous généralisons l'approche de Hansen pour tous les algorithmes de filtrage par consistances : Hull-consistance, Box-consistance and kB-consistances. En particulier, nous montrons comment ces techniques de filtrage identifient des trous dans les domaines. Nous montrons également que cette approche est efficace pour résoudre des CSPs numériques, c'est-à-dire pour trouver toutes les solutions isolées ou tous les espaces de solutions isolés.

Hyvönen [?] a également utilisés les trous mais pour calculer une consistance plus forte. Il a proposé un algorithme pour calculer la consistance d'union en combinant des ensembles d'intervalles, mais sa méthode est limitée par son caractère fortement exponentiel. MindTheGaps utilise les trous uniquement pour guider la recherche, ce qui limite le nombre de trous générés. Pour limiter le coût de la gestion des unions d'intervalles, les trous identifiés par les contraintes trigonométriques ne seront pas prises en compte. L'identification des trous sera restreinte aux puissances et aux produits de variables, dont la projection ne produit qu'un seul trou. Nous y reviendrons dans la section 8.3.

Dans ce chapitre, nous utiliserons des unions d'intervalles, notées $\boldsymbol{u} = \bigcup \boldsymbol{u}_{(j)}$, où les sous-intervalles $\boldsymbol{u}_{(j)}$ sont disjoints et triés par borne inférieure croissante, *i.e.* $\overline{u}_{(j)} < \underline{u}_{(j+1)}$. Le nombre de sous-intervalles de $\boldsymbol{u}$ est dénoté par $|\boldsymbol{u}|$. La borne inférieure (resp. supérieure) de $\boldsymbol{u}$ est notée $\underline{\boldsymbol{u}}$ (resp. $\overline{\boldsymbol{u}}$). $\mathbb{U}$ dénote l'ensemble des unions d'intervalles et $\cap_{\mathbb{U}}$ est l'opérateur d'intersection sur $\mathbb{U}$, tel que $\mathbf{u} \cap_{\mathbb{U}} \mathbf{v} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbf{u} \wedge x \in \mathbf{v}\}$. Enfin, les symboles $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ sont utilisés pour représenter des vecteurs d'unions d'intervalles.

Notations Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

$\boldsymbol{u} = \bigcup \boldsymbol{u}_{(j)}$	une union d'intervalles
$\lvert\boldsymbol{u}\rvert$	le nombre de sous-intervalles qui composent $\boldsymbol{u}$
$\underline{\boldsymbol{u}}$	la borne inférieure de $\boldsymbol{u}$
$\overline{\boldsymbol{u}}$	la borne supérieure de $\boldsymbol{u}$
$\mathbb{U}$	l'ensemble des unions d'intervalles sur à bornes dans $\mathbb{F}$
$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$	des vecteurs d'unions d'intervalles
$\cap_{\mathbb{U}}$	l'opérateur d'intersection sur $\mathbb{U}$
$\cap_{\mathbb{I}}$	l'opérateur d'intersection sur $\mathbb{I}$

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : La section 8.2 donne une vue d'ensemble de l'algorithme MindTheGaps. La section 8.3 décrit les extensions des algorithmes de filtrage par Hull-consistance et Box-consistance qui collectent les trous. La section 8.4 montrent quelques résultats expérimentaux sur des problèmes reconnus. Enfin, la section 8.5 propose différentes extensions de la méthode pour les consistances partielles.

8.2 MindTheGaps : Schéma général

Les techniques classiques pour résoudre les CSPs numériques sont basées sur un algorithme de type Branch&Prune (voir figure 3.1 page 26). Cet algorithme alterne réduction des domaines et décomposition de domaines jusqu'à ce qu'une précision donnée sur les boîtes ω_{sol} soit atteinte. En général, la bisection est utilisée et les intervalles sont coupés en leur milieux. Différentes stratégies de sélection de domaines peuvent être combinées à la bisection, dont RR, LF ou MS, déjà mentionnées dans la section 3.4.1 page 25.

Contrairement aux techniques classiques de sélection de domaines, MindTheGaps (voir figure 8.1) exploite les trous produits par les algorithmes de filtrage par consistance.

La fonction Prune* (ligne 5) collecte les trous générés pendant l'étape de filtrage. Les trous identifiés sont stockés dans $\boldsymbol{U}$, qui est un vecteur d'unions d'intervalles $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, tel que :

$$\boldsymbol{u}_i = \bigcup \boldsymbol{u}_{i(j)},$$

, où $\boldsymbol{u}_{i(j)} = [\underline{u}_{i(j)}, \overline{u}_{i(j)}]$ est le j-ème sous-domaine de x_i.

Tant que $w(\boldsymbol{X})$ est plus grand qu'un ω_{sol} donné, MindTheGaps décompose en premier les domaines qui contiennent au moins un trou (ligne 11). Différentes heuristiques pour sélectionner le domaine à découper ou pour choisir les points de coupe ont été explorées. Nous y reviendrons dans la section 8.4. La découpe des domaine proprement dite est mise en œuvre par la fonction GapSplit, qui élimine un ou plusieurs trou du domaine sélectionné, générant ainsi plusieurs sous-problèmes qui sont stockés dans l'ensemble Q.

```
MindTheGaps(in : X_0, C, ω_sol  out : S)
%% X_0 = (x_1, ..., x_n)
Q ← {X_0}
S ← ∅
while Q ≠ ∅ do
  Extract X from Q
  X ← Prune*(C, X, U)
  if X ≠ ∅ then
    if w(X) ≤ ω_sol then
      S ← S ∪ X
    else
      if ∃k s.t. |u_k| > 1 then
        % Gap Splitting
        Q ← Q ∪ GapSplit(U)
      else
        % Standard splitting process
        Q ← Q ∪ Split(X)
      endif
    endif
  endif
endwhile
return S
```

FIG. 8.1 – Schéma général de MindTheGaps.

MindTheGaps découpe d'abord les domaines qui contiennent des trous. Si aucun trou n'a été identifié par le filtrage, un splitting classique est mis en œuvre en combinaison avec l'une des stratégies de sélection classique (RR, LF, ou MS).

La section suivante présente les algorithmes de filtrage par consistance étendus de manière à collecter les trous qu'ils produisent.

8.3 Consistances locales et trous

La plupart des solveurs de contraintes (par exemple, IlogSolver [?], Numerica [?], Realpaver [?]) sont basés sur des consistances locales (Hull-consistance [?, ?], Box-consistance [?, ?]). Les algorithmes de filtrage associés réduisent les domaines des variables en éliminant des valeurs pour lesquelles certaines contraintes ne sont pas vérifiées (inconsistance). Cette réduction est calculée par des opérateurs de narrowing, qui sont des fonctions correctes, monotones et contractantes (voir définition 3.5.1 page 27). Ces réductions sont propagées en utilisant l'algorithme standard de propagation, dérivé d'AC3 [?] (voir algorithme Prune, figure 3.2 page 28).

La Hull-consistance et la Box-consistance sont toutes les deux basées sur l'algorithme Prune, mais avec un opérateur de réduction spécifique. Autrement dit, la Hull-consistance et la Box-consistance implémente chacune leur propre version de la fonction Narrow.

Dans cette section, nous décrivons une façon d'étendre ces opérateurs afin qu'ils collectent les trous identifiés par la technique de consistance à laquelle ils sont associés. Ces versions étendues, nommées $\mathsf{Narrow}^{\star}(c_i, \boldsymbol{X}, \mathbf{U})$, stockent les trous dans le vecteur d'union d'intervalles $\mathbf{U} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$. À partir de ces opérateurs étendus, on définit naturellement des algorithmes de filtrage par Hull-consistance et par Box-consistance qui collectent les trous qu'ils identifient.

La section suivante rappelle quelques notions de base sur l'artihmétique des intervalles qui sont nécessaires à la définition de ces algorithmes.

8.3.1 Extensions aux intervalles et fonctions de projection

Dans la section 3.3 page 21, on avait défini les extensions aux intervalles des fonctions ainsi que les fonctions de projection (Déf. 3.3.2 page 23 et 3.5.2 page 28). Le point clé est que ces fonctions de projection peuvent générer des unions d'intervalles comme on l'avait montré dans la figure 3.3 page 29.

Les opérateurs de narrowing de la Hull-consistance utilisent ces fonctions de projection pour réduire le domaine des vairables. De manière informelle, $\pi_k(c \cap \boldsymbol{X})$ (Déf. 3.5.2 page 28) dénote la projection sur le domaine de la variable x_k des solutions de c lorsque les valeurs des variables sont restreinte à la boîte $\boldsymbol{X}$. $\pi_k(c \cap \boldsymbol{X})$ peut être approximée par le plus petit intervalle englobant, noté $\Box_{\mathbb{I}}(\pi_k(c \cap \boldsymbol{X}))$, ou par la plus petite union d'intervalles, notée $\Box_{\mathbb{U}}(\pi_k(c \cap \boldsymbol{X}))$.

Exemple 8.3.1 *Considérons la contrainte $c : y = x^2$, avec $x \in [-2, 4]$ et $y \in [1, 16]$ et soit $\boldsymbol{X} = [-2, 4] \times [1, 16]$. La figure 3.3 page 29 montre que l'approximation par intervalle de $\pi(c_\cap \boldsymbol{X})$ est $\Box_{\mathbb{I}}(\pi(c_\cap \boldsymbol{X})) = [-2, 4]$, alors que l'approximation par union d'intervalles de $\pi(c_\cap \boldsymbol{X})$ is $\Box_{\mathbb{U}}(\pi(c_\cap \boldsymbol{X})) = [-2, -1] \cup [1, 4]$.*

Les projections des fonctions trigonométriques, comme sinus ou cosinus, peuvent engendrer un nombre très important de trous. Pour limiter les coût de la gestion des unions d'intervalles, nous limitons l'identification des trous aux termes produits et puissances, qui ne peuvent produire au plus qu'un trou. Notons que plusieurs trous peuvent être produit dans le même domaine en intersectant les projections de différentes contraintes. La forme syntaxique des contraintes influence de manière significative sur l'identification de trous. Nous y reviendrons dans la section 8.4.

La section suivante présente l'algorithme de filtrage par Hull-consistance étendu afin de collecter les trous.

8.3.2 Hull-consistance et trous

Comme on l'avait déjà enoncée dans la section 3.5.1 page 27, la Hull-consistance établit une propriété de consistance locale sur les bornes de domaines. Une contrainte c est dite Hull-consistante si pour toute variable x_i de $\mathcal{V}(c)$, il existe une valeur dans les domaines des autres variables qui satisfait c lorsque x_i est instanciée à $\underline{x}_i$ ou à $\overline{x}_i$. Rappelons la définition ici :

Définition 8.3.1 (Hull-consistance [?, ?]) *Soit c une contrainte n-aire. c est Hull-consistante sur la boîte $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ ssi $\forall x_k \in \mathcal{V}(c), \boldsymbol{x}_k = \Box_{\mathbb{I}}(\pi_k(c \cap \boldsymbol{X}))$. Un CSP est Hull-consistant ssi toutes ses contraintes sont Hull-consistantes.*

L'implantation basique de la Hull-consistance, nommée 2B-consistance [?, ?], décompose le système de contraintes en contraintes primitives pour lesquelles il est plus facile de calculer les fonctions de projection. L'implantation la plus efficace de la Hull-consistance est HC4 [?], basée sur l'opérateur HC4Revise. Cette implantation ne nécessite pas l'ajout de contraintes supplémentaire ; toutes les projections sont calculées an parcourant une représentation arborescente des contraintes, de bas en haut puis inversement (voir section 3.5.1 page 27 pour plus de détails).

Détaillons à présent HCNarrow, l'opérateur de réduction associé à la Hull-consistance, c'est-à-dire, HCNarrow correspond à la fonction Narrow dans l'algorithme générique de filtrage par propagation (voir figure 3.2 page 28).

HCNarrow(in :c, $\boldsymbol{X}$) : Interval vector

% $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
1 : **foreach** $x_k \in \mathcal{V}(c)$ **do**
2 : $\boldsymbol{x}_k \leftarrow \Box_{\mathbb{I}}(\boldsymbol{x}_k \cap_{\mathbb{U}} \Box_{\mathbb{U}}(\pi_k(c_{\cap}\boldsymbol{X})))$
  % Les éventuels trous sont perdus
3 :   **if** $\boldsymbol{x}_k = \emptyset$ **then**
4 :   **return** $\emptyset$
5 :   **endif**
6 : **endfor**
7 : **return** $\boldsymbol{X}$

FIG. 8.2 – HCNarrow : l'opérateur de réduction de la Hull-consistance

Basiquement, HCNarrow (figure 8.2) réduit le domaine $\boldsymbol{X}$ par rapport à la contrainte c en appliquant l'opérateur de réduction à chaque variable $x_k \in \mathcal{V}(c_c)$. Cet opérateur de réduction réduit les bornes du domaine $\boldsymbol{x}_k$ en calculant une enveloppe par union d'intervalles de la fonction de projection $\pi_k(c)$, notée $\Box_{\mathbb{U}}(\pi(c_{\cap}\boldsymbol{X})$.

Cette évaluation par union est alors intersectée avec $\boldsymbol{x}_k$ (ligne 2), et les trous éventuels sont perdus durant cette opération. En fait, les trous ne sont utilisés que pour calculer une évaluation plus fine du filtrage de $\boldsymbol{x}_k$.

Cependant, ces trous peuvent être récupérés en rempaçant l'opérateur d'intersection sur les intervalles ($\cap_{\mathbb{I}}$) par son correspondant sur les unions d'intervalles ($\cap_{\mathbb{U}}$). L'inconvénient est que le calcul d'intersection sur les unions d'intervalles coûte plus cher que celui sur les intervalles. Par conséquent, cela rajouterait un coût qui au final peut peser dans les performances du filtrage.

Or, il n'est pas nécessaire de calculer cette intersection d'unions d'intervalles à chaque projection. Les opérateurs de réduction étant contractants ($\Phi(\Omega) \subseteq \Omega$), la dernière projection opérée par l'algorithme de propagation fournira la plus petite union d'intervalles (au sens de l'inclusion d'ensembles), c'est-à-dire le plus grand trou. Autrement dit, il suffit de conserver pendant la propagation un ensemble S de couples contraintes/variables de la forme (c, x_k) pour lesquels des trous ont été identifiés. Il suffira alors de recalculer une approximation des projections $\pi_k(c)$ par union d'intervalles à la fin de la propagation.

Plus précisement, l'algorithme HCNarrow* (voir figure 8.3) vérifie si l'évaluation de $\pi_k(c)$ produit un trou dans le domaine $\boldsymbol{x}_k$ (lignes 6-10). Dans ce cas, le couple (c, x) est ajouté à S, sinon (c, x) est retiré de S pour traiter le cas où un trou avait précédemment été trouvé dans le domaine de x mais que celui-ci ait été repoussé hors du domaine durant la phase de propagation.

HCNarrow*(in :c, $\boldsymbol{X}$, in-out : S) : Interval vector

% $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
1 : **foreach** $x_k \in \mathbb{V}_c$ **do**
2 : $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{x}_k \cap_{\mathbb{U}} \square_{\mathbb{U}}(\pi_k(c \cap \boldsymbol{X}))$
3 : **if** $\boldsymbol{u} = \emptyset$ **then**
4 : **return** $\emptyset$
5 : **else**
% Mind the gap
6 : **if** $|\boldsymbol{u}| > 1$ **then**
7 : $S \leftarrow S \cup (c, x_k)$
8 : **else**
9 : $S \leftarrow S \setminus (c, x_k)$
10 : **endif**
11 : $\boldsymbol{x}_k \leftarrow \square_{\mathbb{I}}(\boldsymbol{u})$
12 : **endif**
13 : **endfor**
14 : **return** $\boldsymbol{X}$

FIG. 8.3 – HCNarrow* : extension de HCNarrow qui collecte les trous

Soit HCPrune$^+$($\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{X}$,S), l'algorithme Prune (voir figure 3.2 page 28), dans lequel l'appel à l'opérateur de réduction a été remplacé par HCNarrow*(c_i,$\boldsymbol{X}$,S). HCPrune$^+$ établit la Hull-consistance sur la boîte $\boldsymbol{X}$ et collecte dans l'ensemble S les paires contraintes/variables pour lesquelles des trous ont été identifiés. Enfin, HCPrune* récupère ces trous (lignes 4-6) en intersectant $\boldsymbol{u}_k$ avec l'évaluation par union d'intervalles de la projection $\pi_k(c)$ (voir figure 8.4).

HCPrune*(in :$\boldsymbol{C}$, in-out : $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{U}$)

% $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
% $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$
1 : $S \leftarrow \emptyset$
2 : HCPrune$^+$($\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{X}$,S)
3 : **if** $\boldsymbol{X} \neq \emptyset$ **then**
% Collect the gaps
4 : **foreach** $(c, x_k) \in S$ **do**
5 : $\boldsymbol{u}_k \leftarrow \boldsymbol{u}_k \cap_{\mathbb{U}} \square_{\mathbb{U}}(\pi_c^{x_k}(\boldsymbol{X}))$
6 : **endfor**
7 : **endif**

FIG. 8.4 – HCPrune* enforces Hull-consistency and collects the gaps

La section suivante présente l'extension de l'algorithme de fitrage par Box-consistance qui collecte les trous.

8.3.3 Box-consistance et trous

Comme on l'avait déjà enoncée dans la section 3.5.1 page 27, la Box-consistance [?, ?] est une approximation plus grossière de l'arc-consistance que la Hull-consistance. Informellement, une contrainte c est Box-consistante si pour toutes les variables x_i de $\mathbb{V}_c$, les bornes de $\boldsymbol{x}_i$ satisfont la contraintes unaire obtenu en remplaçant chaque occurrence d'une variable x_j autre aue x_i par l'intervalle constant $\boldsymbol{x}_j$. Rappelons la définition de la Box-consistance :

Définition 8.3.2 (Box-consistance [?, ?]) *Soit c une contrainte n-aire. c est Box-consistante pour la boîte $\boldsymbol{X}$ ssi $\forall x_i$ les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, [\underline{x}_i, \underline{x}_i^+), \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
2. $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, (\overline{x}_i^-, \overline{x}_i], \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$

Un CSP est Box-consistant si toutes ses contraintes sont Box-consistantes.

La Box-consistance génère des ensemble de fonctions univariées qui peuvent être résolue par des méthodes numériques comme la méthode de Newton [?]. Le filtrage consiste à rechercher les quasi-zéros les plus à droite et les plus à gauche de ces fonctions univariées. La fonction BCNarrow (voir section 3.5 page 27), réduit le domaine de toutes les variables d'une contrainte c jusqu'à ce que c soit Box-consistante. Le filtrage du domaine d'une variable de c consiste à réduire les borne de son domaine au quasi-zéros extrème de la fonction univariée $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_k}$. Cette réduction est opérée par la fonction LeftNarrow (see figure 3.6 page 31) pour la borne inférieure et par LeftNarrow (see figure 3.6 page 31) pour la borne supérieure.

Ces fonctions sont basées sur MonoNewton qui réduit le domaine de la variable $\boldsymbol{x}$ par rapport à la contrainte c, en utilisant l'algorithme classique de Newton monovarié par intervalles. Tant que la réduction de $\boldsymbol{x}$ est inférieure à ϵ, une dichotomie est appliquée pour garantir que $\boldsymbol{x}$ est bien un quasi-zéro. LeftNarrow* (voir figure 8.5) collecte les trous identifiés par l'opérateur de réduction de la Box-consistance.

Le point clé est que l'appel à MonoNewton (ligne 5) produit des trous de deux manières différentes :

1. Si la borne gauche de l'intervalle courant $\boldsymbol{x}$ est réduit par la méthode de Newton, alors l'intervalle éliminé $[\overline{x}', \overline{x}]$ ne satisfait pas la contrainte c. Or cet intervalle est strictement inclus dans le domaine initial de la variable x et consistue un trou.
2. Par la méthode de Newton, MonoNewton, elle-même.

Pour expliquer comment MonoNewton peut produire des trous, rappelons la définition de la méthode de Newton par intervalles :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}^{(0)} & = & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}^{(n+1)} & = & N(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', \boldsymbol{x}^{(n)}), \\ \text{where } N(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^{(n)}) & = & \boldsymbol{x}^{(n)} \cap (m(\boldsymbol{x}^{(n)}) - \frac{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(m(\boldsymbol{x}^{(n)}))}{\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^{(n)})}) \end{array}$$

La fonction MonoNewton calcule une fermeture de $N(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})$ et retourne l'intervalle résultant. Or, l'évaluation de la division $\frac{\boldsymbol{f}(m(\boldsymbol{x}^{(n)}))}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^{(n)})}$ en utilisant l'arithmétique étendue [?, ?] peut produire un trou, comme le montre l'exemple suivant :

$\mathsf{LeftNarrow}^\star$(in : $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}'$, $\boldsymbol{x}$, in-out : $S, \boldsymbol{u}$) : Interval

1 : $r \leftarrow \overline{x}$
2 : **if** $0 \notin \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **then**
3 :   **return** $\emptyset$
4 : **endif**
5 : $\boldsymbol{u}' \leftarrow \mathsf{MonoNewton}^\star(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', \boldsymbol{x})$
% Mind the gap
6 : $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u} \cap_{\mathbb{U}} (\boldsymbol{u}' \cup [r, +\infty))$
7 : $\boldsymbol{x} \leftarrow \square_{\mathbb{I}}(\boldsymbol{u})$
8 : **if** $0 \in \boldsymbol{f}([\underline{x}, \underline{x}^+])$ **then**
9 :   **return** $[\underline{x}, r]$
10 : **else**
11 : $l \leftarrow \mathsf{LeftNarrow}^\star(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', [\underline{x}, m(\boldsymbol{x})], S)$
12 :   **if** $l = \emptyset$ **then**
13 : $l \leftarrow \mathsf{LeftNarrow}^\star(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', [m(\boldsymbol{x}), \overline{x}], S)$
14 :   **endif**
15 :   **return** $[\underline{l}, r]$
16 : **endif**
17 : **return** $\boldsymbol{x}$

FIG. 8.5 – Opérateur de réduction de la Box-consistance étendu pour collecter les trous

Exemple 8.3.2 *Soit* $f(x,y) = x^2 - y$ *avec* $x \in [-4,4]$ *et* $y \in [1,16]$*. La fonction intervalle* $\boldsymbol{f_x}$ *et sa dérivée derivative* $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}$ *sont définies par* $\boldsymbol{f_x}(x) = x^2 - [1,16]$ *et* $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(x) = 2x$*. Donc,*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(0)} &= [-4,4] \\
\boldsymbol{x}^{(1)} &= [-4,4] \cap (0 \ominus ((0^2 \ominus [1,16]) \oslash (2 \otimes [-4,4]))) \\
&= [-4,4] \cap ([1,16] \oslash [-8,8]) \\
&= [-4,-1/8] \cup [1/8,4]
\end{aligned}$$

Par conséquent, $N(\boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})$ n'est pas en règle général un simple intervalle, mais peut-être une union d'intervalles. Notons $\mathsf{MonoNewton}^\star$, la fonction qui retourne cette union d'intervalles.

On définit alors $\mathsf{LeftNarrow}^\star$ (voir figure 8.5), qui étend l'opérateur classique de réduction de la Box-consistance de manière à collecter les trous. $\mathsf{MonoNewton}^\star$ récupère les trous produits par la méthode de Newton monovairé étendue (ligne 5). Enfin, les trous produits par la réduction de la borne gauche sont récupérés (ligne 6).

La section suivante présente quelques résultats expérimentaux qui montrent une amélioration significative du temps de résolution par rapport aux techniques de recherche classique.

8.4 Résultats expérimentaux

Cette section présente des résultats expérimentaux de MindTheGaps sur une variété de problèmes classiques : deux benchmarks classiques issus de l'arithmétique des intervalles (*i1*,*i4*), une application de cinématique directe de robot (*kin1*), un problème de mécanique céleste à 5 corps (*nbody5*), quelques applications de modélisation économique (*eco7*, *eco8*, *eco9* and *eco10*), des problèmes de satisfaction de contraintes de distance (*ponts*, *ext-penta* et des instances particulières), et un système issu de la liste de problèmes de Posso (*caprasse*). Ces problèmes sont détaillés dans la littérature, notamment dans [**?**], pour *i1, i4, kin1* and *ecoN*, dans [**?**] pour *nbody5*, dans [**?**] pour *ponts* et dans [**?**] pour *caprasse.* Le problème du pentagone étendu, *ext-penta* a quant à lui été défini dans la section 7.5.1.

La section suivante présente trois catégories d'heuristiques pour personnaliser MindTheGaps :

– Déterminer quels trous sont les moins pertinents et peuvent être éliminés (par exemple, des trous trop petit).
– Sélectionner des domaines contenant des trous.
– Découper le(s) domaine(s) seléctionné(s) en uilisant les trous.

Ensuite, dans la section 8.4.2 les résultats de MindTheGaps sur les benchmarks seront décrits pour la Hull et pour la Box. Dans la section 8.4.3, on verra comment la forme syntaxique influence l'identification des trous et son impact sur les performances de MindTheGaps.

8.4.1 MindTheGaps : heuristiques

Cette section présente trois cétégories de stratégies pour personnaliser MindTheGaps. Ces heuristiques ont été explorées dans le but de répondre au 3 questions suivantes :

1. Pertinence des trous : Quels trous sont insignifiants et devraient être ignorés ?
2. Sélection de domaines : Parmi les domaines dans lesquels des trous ont été identifiés, lesquels présentent les choix de coupe les plus intéressants ?
3. Gap splitting : Quel(s) trou(s) doit-on éliminer pour décomposer le ou les domaines seléctionnés ?

– *Stratégies de validation des trous* : Supposons qu'un trou a été identifié durant le processus de filtrage dans le domaine $\boldsymbol{x} = [a, d]$, tel que $\boldsymbol{u} = [a, b] \cup [c, d]$. Deux différentes stratégies ont été explorée pour valider le trou (b, c), en fonction de sa position à l'intérieur du domaine ou de sa proportion.
  – Hansen [**?**] : Ne considérer (b, c) que si $\min\{d - b, c - a\} \geq 0.25w(\boldsymbol{x})$. Cette stratégie élimine les trous qui sont entièrement inclus dans un des deux quart extrème du domaine.
  – Large-Gaps : Ne considérer (b, c) que si $c - b \geq 0.1w(\boldsymbol{x})$. Cette stratégie élimine des trous dont la taille relative est inférieure à 10% de la taille du domaine.

  Notons que ces deux stratégies peuvent être combinées. Par défaut, tous les trous sont conservés (AllGaps).
– *Stratégies de sélection de domaines* : Différentes heuristiques ont été explorées, pour la plupart basées sur la taille des trous identifiés :
  – LW (Largest Width) /SW (Smallest Width) : Le domaine sélectionné contient le trou dont la taille est la plus grande (resp. petite) [**?**].
  – LRW (Largest Relative Width) /SRW (Smallest Relative Width) : Le domaine sélectionné maximise (resp. minimise) le rapport entre la taille de l'un de ses trous et sa taille.
  – LTW (Largest Total Width) /STW (Smallest Total Width) : Le domaine sélectionné maximise (resp. minimise) la somme des tailles de ses trous.
– *Stratégies de décopomposition basée sur les trous* : Trois stratégies de décomposition ont été explorées :
  – B1G (Bisect One Gap) : Utiliser un seul trou pour décomposer le domaine sélectionné et générer 2 sous-problèmes [**?**]. Le trou est déterminé par la stratégie de sélection de

domaine.
- BkG (Bisect k Gaps) : Utiliser au plus k trous dans le domaine sélectionné pour décomposer la boîte et générer $k+1$ sous-problèmes [?].
- M3G (Multisect 3 Gaps) : Utiliser au plus 3 trous dans 3 domaines différents et combiner les sous-domaines pour générer au plus 8 sous-problèmes [?]. Les trois domaines et les trous sont déterminés là encore par la stratégie de décomposition.

Dans la section suivante, les résultats expérimentaux sont présentés et analysés.

8.4.2 Analyse des résultats

Les différentes heuristiques mentionnées précedemment ont été explorées méthodiquement sur les différents benchmarks. Les tables présentées dans cette section se limitent aux résultats obtenus avec RR,LW et B1G. Les autres stratégies ont donné des résultats tout à fait similaires pour la plupart des benchs, sauf pour ceux que l'on détaillera dans le reste de cette section.

Tous les tests ont été réalisés sur la plate-forme Realpaver [?] version 0.3, sur un Pentium IV cadencé à 2.6Ghz sous Linux. MindTheGaps a été interfacé avec Realpaver. Les différentes stratégies ainsi que la collecte des trous ont été ajoutés aux algorithmes par défaut de Realpaver. Notons que l'algorithme de Newton multivarié a aussi été étendu afin de collecter les trous, selon la méthode proposée par Hansen [?]. L'algorithle de filtrage par Box-consistabce a été modifié afin de coller aux spécification de l'algorithme par défaut [?, ?], qui utilise le Newton monovarié. En effet, l'implantation de la Box sous Realpaver n'utilisait pas le Newton monovarié, mais se basait uniquement sur l'évaluation par intervalle pour calculer les quasi-zéros.

Les tables 8.1, ??, 8.3, 8.4 montrent les résultats obtenus sur la série de problèmes présentés en introduction de cette section (p. 81). Tous les résultats présentés ont été obtenus avec RR,LW and B1G. Dans ces tableaux, la colonne t indique le temps de calcul ("-" désigne un temps de calcul supérieur à 1h), B est le nombre total de boîtes générées par le processus de splitting, et H est le nombre de fois qu'un trou a servi à décomposer le domaine. La colonne "ratio" présente le pourcentage de réduction en terme de temps CPU (t) et de nombre de branchements (B).

La table 8.1 montre les résultats obtenus pour des résolutions basés sur des filtrage par HC4 et HC4 combiné avec l'algorithme de Newton multivarié. Dans les deux cas, MindTheGaps améliore significativement le temps d'exécution et réduit le nombre de boîtes générées par le splitting. Par exemple, pour *eco7*, le temps d'exécution a été réduit d'un facteur 3.8 ou plus, selon le filtrage utilisé, et le nombre de branchements a également été réduit d'un facteur compris entre 3 et 4.

Même sur des problèmes où le nombre de branchements reste inchangé, comme par exemple pour *i4*, MindTheGaps améliore le temps de résolution. Ce problème met en évidence le rôle que joue l'élimination des trous dans le choix des points de coupe, mais également dans la réduction de l'espace de recherche.

D'autres stratégies que de choisir la variable dont le domaine contient le plus grand trou et couper en utilisant ce trou ne changent pas de manière significative les résultats. Cependant, les performances sont améliorées de manière significatives pour la Box ou la Box combinée avec la méthode de Newton multivarié lorsqu'on éliminent les trous qui se situent trop loin du centre de l'intervalle (critère de Hansen) ou ceux qui sont trop petits (voir table ?? et 8.3). Par exemple, le problème *eco8* a pu être résolu en moins d'une demi-heure alors que les autres stratégies requéraient plus d'une heure de temps de calcul. Ce succès est dû à la façon dont

	Filtering : HC4								Filtering : HC4+Newton						
	RR		MindTheGaps(RR)			Ratio		RR		MindTheGaps(RR)			Ratio	
	t(s)	B	t(s)	B	H	t	B	t(s)	B	t(s)	B	H	t	B
eco7	57.07	754885	14.74	231595	1	**-74%**	**-69%**	61.99	468799	12.74	107817	11	**-79%**	**-77%**
eco8	133.51	1614495	112.77	1360061	1	**-15%**	**-16%**	56.77	353155	40.54	246927	49	**-29%**	**-30%**
ponts	34.19	174915	33.12	171251	1043	**-3%**	**-2**	25.61	32643	16.80	21025	946	**-35%**	**-36%**
ponts0	0.30	1395	0.29	1395	0	-	-	0.06	71	0.07	71	0	-	-
ponts1	5.19	26523	4.54	22475	274	**-13%**	**-16%**	5.78	7465	3.61	4563	254	**-38%**	**-39%**
ponts2	23.63	123585	22.93	120993	779	**-3%**	**-2%**	18.77	24009	12.33	15567	670	**-35%**	**-35%**
pentagon	0.60	6131	0.59	5891	52	**-2%**	**-4%**	0.26	1655	0.23	1415	52	**-12%**	**-15%**
ext-penta	-	-	-	-	-	-	-	474.92	1006031	437.37	890943	11723	**-8%**	**-12%**
ext-penta0	0.34	873	0.11	423	51	**-68%**	**-52%**	0.45	873	0.17	423	51	**-62%**	**-52%**
ext-penta1	0.32	263	0.05	255	17	**-85%**	**-3%**	0.39	263	0.10	255	17	**-74%**	**-3%**
ext-penta2	0.77	2825	0.25	2047	9	**-68%**	**-28%**	1.23	2825	0.60	2047	9	**-51%**	**-28%**
nbody5	121.65	1756139	116.71	1645977	74882	**-4%**	**-7%**	74.70	841461	67.34	752079	84191	**-10%**	**-11%**
i1	29.60	515909	28.75	501677	82	**-3%**	**-3%**	49.46	340057	53.73	370449	38	8%	9%
i4	0.83	2047	0.77	2047	1023	**-8%**	-	1.19	2047	1.07	2047	1023	**-10%**	-
kin1	25.69	264685	19.99	203987	1	**-22%**	**-23%**	0.41	1447	0.30	1263	1	**-27%**	**-13%**
caprasse	0.79	6527	0.80	6527	0	1 %	-	0.65	2567	0.65	2567	0	-	- %

TAB. 8.1 – Résultats expérimentaux pour HC4 (à gauche) et HC4+Newton (à droite).

	Filtering : Box											
	RR		MindTheGaps(RR)			Ratio		MindTheGaps(RR)+Hansen			Ratio	
	t(s)	B	t(s)	B	H	t	B	t(s)	B	H	t	B
eco7	995.12	595505	-	-	-	-	-	276.91	192699	104	**-72%**	**-68%**
eco8	-	-	-	-	-	-		1372.13	847373	177	-	-
ponts	659.70	173331	644.60	170721	968	**-2%**	**-2%**	676.36	172515	1015	3%	**-1%**
ponts0	5.60	1481	4.90	1203	6	**-12%**	**-10%**	5.61	1481	0	-	- %
ponts1	105.47	25943	103.67	23335	122	**-2%**	**-10%**	99.83	22911	255	**-5%**	**-12%**
ponts2	461.20	122865	440.99	118123	656	**-5%**	**-4%**	459.61	121017	538	**-1%**	**-2%**
pentagon	11.27	6283	11.02	6275	173	**-3%**	- %	10.99	6033	51	**-3%**	**-4%**
ext-penta	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ext-penta0	5.80	873	2.20	1771	666	**-62%**	102.86%	1.84	423	51	**-68%**	**-52%**
ext-penta1	6.65	263	1.09	873	306	**-84%**	232%	0.81	255	17	**-88%**	**-3%**
ext-penta2	11.36	2825	12.05	17865	7037	6%	533%	2.12	2047	9	**-82%**	**-28%**
nbody5	601.57	878023	567.60	792987	79132	**-6%**	**-10%**	563.18	783929	75018	**-7%**	**-11%**
i1	353.70	484511	369.60	502035	7614	5%	4%	353.67	482565	39	-	-
i4	5.51	2047	6.07	2047	1023	10%	-	6.05	2047	1023	10%	-
kin1	235.74	132547	-	-	-	-	- %	217.18	120309	56	**-8%**	**-10%**
caprasse	10.55	2023	10.50	1991	48	- %	**-2%**	10.52	1991	48	- %	**-2%**

TAB. 8.2 – Résultat expérimentaux pour Box (à gauche) et avec le critère de Hansen (à droite)

	Filtering : Box+Newton											
	RR		MindTheGaps(RR)			Ratio		MindTheGaps(RR)+Hansen			Ratio	
	t(s)	B	t(s)	B	H	t	B	t(s)	B	H	t	B
eco7	797.72	429263	207.32	109267	685	**-74%**	**-75%**	196.39	102487	145	**-76%**	**-76**
eco8	-	-	-	-	-	-	-	516.92	224513	371	-	-
ponts	163.31	31735	180.84	35475	1098	11%	12%	133.51	25829	1014	**-19%**	**-19%**
ponts0	0.47	71	0.47	71	0	-	-	0.47	71	0	-	- %
ponts1	33.78	7363	27.56	4981	261	**-18%**	**-32%**	27.39	4981	261	**-19%**	**-32%**
ponts2	117.27	23417	110.37	21881	646	**-6%**	**-7%**	96.50	18675	563	**-18%**	**-21%**
pentagon	3.76	1639	0.27	1399	62	**-93%**	**-15%**	3.45	1399	62	**-9%**	**-15%**
ext-penta	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ext-penta0	6.43	873	1.58	707	133	**-75%**	**-19%**	2.02	423	51	**-69%**	**-52%**
ext-penta1	7.18	263	1.12	747	209	**-84.40%**	184%	0.92	303	41	**-88%**	15%
ext-penta2	12.55	2825	7.28	8721	3167	**-42%**	208.70 %	2.57	2047	9	**-80%**	**-28** %
nbody5	811.88	968213	770.64	881897	108255	**-5%**	**-9%**	766.25	876099	106005	**-6%**	**-10** %
i1	247.22	309681	244.86	302397	576	**-1%**	**-3%**	247.38	305797	52	-	**-1%**
i4	6.26	2047	6.84	2047	1023	9%	-	6.82	2047	1023	9%	-
kin1	2.78	791	1.87	641	72	**-33%**	**-19%**	1.86	629	66	**-33%**	**-20%**
caprasse	10.54	1495	10.52	1463	48	-	**-2%**	10.54	1463	48	-	**-2%**

TAB. 8.3 – Résultat expérimentaux pour Box+Newton (à gauche) et avec le critère de Hansen (à droite)

les trous sont générés par la Box-consistance. Le filtrage par Box-consistance tente d'éliminer des intervalles de plus en plus petit autour des bornes du domaine. Le résultat est que ce filtrage produit beaucoup de petits trous près des bornes des domaines. Ce comportement est mis en évidence sur *ext-penta2*, où le nombre de trous utilisés passe de 7037 à 9 (voir **??**). On peut remarquer la même chose quand la Box est combinée avec Newton, donc le critère d'Hansen tend à lisser le comportement de MindTheGaps combinée avec la Box.

Quelle que soit la stratégie, MindTheGaps améliore le temps d'éxécution comparée au classique Branch&Prune combiné avec le Round Robin. Mais, MindTheGaps a plus d'avantages que d'améliorer les performances de la recherche de solutions. Par exemple, sur le problème bien connu nommé *combustion*, MindTheGaps réussit à trouver les 4 solutions alors que le *Branch&Prune* classique ne génère que 2 boîtes englobant chacunes 2 solutions[1]. L'utilisation des trous permet donc dans certains cas d'isoler des solutions disjointes plus facilement qu'avec une stratégie de recherche standard.

La section suivante présente quelques résultats sur l'impact de la forme syntaxique des contraintes sur les performances de MindTheGaps.

8.4.3 Évaluation de contraintes et trous

Des règles de factorisation ont été conçues pour les polynômes univariés ou multivariés [**?**]. Ces outils symboliques tentent de réduire l'effet négatif des calculs par intervalles. En effet, l'arithmétique des intervalles a tendance à surestimer les résultats. En général, l'évaluation de contraintes polynômiales est plus fine sous forme factorisée. A priori, les trous produits sous cette forme sont également plus pertinents. Il est également possible que sous cette forme factorisée, certains trous puissent être découverts alors qu'ils le ne l'auraient pas été sous forme développée :

[1]Ces résultats ont été obtenus avec la précision par défaut de Realpaver (1.0e-8). En fixant la précision à 1.0e-12, Realpaver trouve toutes les solutions avec une stratégie de recherche standard.

	Filtering : HC4+Newton						
	RR		MindTheGaps(RR)			Ratio	
	t(s)	B	t(s)	B	H	t	B
eco6	1.04	12087	0.56	6383	3	**-46.15%**	**-47.19%**
eco6H	0.69	9301	**0.29**	3729	1	**-57.97%**	**-59.90%**
eco7	61.99	468799	**12.74**	107817	11	**-79.44%**	**-77.00%**
eco7H	49.78	412957	8.42	82143	4	**-83%**	**-80%**
eco8	56.77	353155	40.43	246927	49	**-28.78%**	**-30.07%**
eco8H	30.93	216955	**24.17**	164733	4	**-21.85%**	**-24.07%**
eco9	636.75	2931479	641.75	2934801	1720	.78%	.11%
eco9H	301.20	1541855	**233.67**	1303655	103	**-22.42%**	**-15.44%**
eco10	7569.05	25751025	7381.65	24939453	17949	**-2.47%**	**-3.15%**
eco10H	554.72	2620443	**475.00**	2156345	808	**-14.37%**	**-17.71%**

TAB. 8.4 – Résultats expérimentaux pour *ecoN* et les formes de Horner corresponantes *ecoNH*.

Exemple 8.4.1 *Considérons la contrainte* $c : x^2 + x * y = 1/2$ *et sa forme factorisée* c' : $x(x+y) = 1/2$, *avec* $\boldsymbol{x} = \mathbf{y} = [-1, 1]$. $\square_{\mathbb{U}}(\pi(c' \cap \boldsymbol{X})) = [-1, 1]$ *alors que* $\square_{\mathbb{U}}(\pi(c' \cap \boldsymbol{X}))) = [-1, 0.25] \cup [0.25, 1]$.

Nous avons effectués quelques expérimentations sur les problèmes *ecoN* afin de comparer les performances de MindTheGaps sur les formes dévelopées (*ecoN*) et factorisées (*ecoNH*). Ces expérimentations montrent que la forme de Horner (factorisée) apportent une amélioration significative (d'un facteur entre 2 et 15) par rapport aux formes développées pour la bisection standard. Le nombre de branchements dans lesquels des trous sont utilisés (Hà est fortement réduit (par exemple d'un facteur 16 pour *eco9*). Pourtant, l'impact de MindTheGaps est renforcé tant sur le temps de calcul que sur le nombre de branchements. Ces résultats montrent que les trous générés par l'évaluation des contraintes factorisées sont plus pertinents.

La section suivante discute de l'extension de MindTheGaps aux consistances partielles.

8.5 Extension aux consistances partielles

kB-consistencies are not strictly local consistencies. Informally speaking, these higher consistencies try to shrink the domain by proving that no solution exists in some part of the domain. To do so, they use a lower order consistency ($(k-1)$B-consistency). The point is that they only reduce the bounds of the domains, that is to say they use a $(k-1)$B-consistency filtering to reject either $[\underline{x}, s]$ or $[s, \overline{x}]$ where $s \in [\underline{x}, \overline{x}]$. kB-consistency has a recursive definition based on 2B-consistency which is equivalent to Hull-consistency. Bound-consistency [**?**] is similar to 3B-consistency but it is based on Box-consistency, rather than 2B-consistency. Thus, partial consistencies also allow to identify gaps within the domains. Whenever kB-consistency tries to refute some interval $\alpha \subset \boldsymbol{x}_i$, it applies a $(k-1)$B-consistency over $P_{\boldsymbol{x}_i \leftarrow \alpha}$. Suppose that α is not eliminated but reduced to α'. Then, gaps can be retrieved in three different ways :

1. $\alpha \setminus \alpha'$ is a gap for $\boldsymbol{x}_i$
2. The gaps found by $(k-1)$B-consistency within α' holds also for $\boldsymbol{x}_i$.
3. The gaps found during the filtering of $P_{\boldsymbol{x}_i \leftarrow \alpha}$ within the domains of the other variables are only valid if they have been found also during the filtering of $P_{\boldsymbol{x}_i \leftarrow \boldsymbol{x}_i \setminus \alpha}$

The following example (see figure 8.6) illustrates this process for the first step of 3B-consistency :

Let $\mathbf{C} = \{x^2+y^2 = 1, y = -x^2+1\}$, with $\boldsymbol{x} = \mathbf{y} = [-10, 10]$. A 2B-consistency filtering reduces $\boldsymbol{x}$ to $[-0.99, 0.99]$ and $\mathbf{y}$ to $[0.1, 1]$. Then, consider that $\mathbf{y}$ is split in two parts $\boldsymbol{y}_1 = [0.55, 1]$ and $\boldsymbol{y}_2 = [0.1, 0.55]$:
- The box $\boldsymbol{X}_1 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1)$ is reduced by 2B-consistency to $([-0.54, 0.54], [0.8, 1])$. Thus, there is no solution for $y \in (0.55, 0.8)$, since this interval have been pruned by 2B-consistency (case 1). Moreover, a gap has been identified for variable x : $\boldsymbol{x}_2 = [-0.54, -0.316] \cup [0.316, 0.54]$.
- The box $\boldsymbol{X}_2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$ is not reduced by 2B-consistency, but a gap is identified for variable x :$\boldsymbol{x}_1 = [-1, -0.84] \cup [0.84, 1]$.
Consequently, if $y \in \boldsymbol{y}_1$ or $y \in \boldsymbol{y}_2$, then the set of allowed values for variable x is $\boldsymbol{x}_1 \cup \boldsymbol{x}_2$, that is to say $[-1, -0.84] \cup [-0.54, -0.316] \cup [0.316, 0.54] \cup [0.84, 1]$ (case 3).

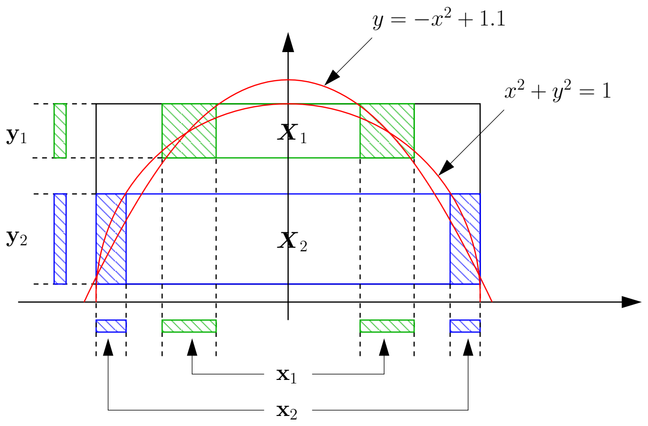


FIG. 8.6 – Gap identification and 3B-consistency.

Note that, the bound reductions (case 1) have been used in [**?**] to improve kB-consistency complexity. The gaps produced in case 2 and 3 could be used in a similar way to improve kB-consistency efficiency. A very first implementation of MindTheGaps combined with 3B-consistency shows significant improvements.

8.6 Conclusion

We have introduced in this paper a new splitting strategy for search algorithm in non-linear CSPs. This splitting strategy takes advantage of the gaps generated by consistency filtering algorithms. These gaps provide indications for selecting which domain to split and for selecting cutting points inside the domains. Splitting the domain by removing such gaps definitely reduces the search space. It also helps to discard some redundant solutions and helps the search algorithm to isolate different solutions. Experimental results show that in numerous problems, relevant gaps are found and thus, the performances of the search process are significantly improved in comparison with classical search algorithm. Further works concern efficient collection of gaps for higher consistencies as well as the identification of relevant gaps for non polynomial constraints.

problem	3B	3B+B1G				3B+B1G+hansen			
		2B- & 3B-gaps		3B-gaps		2B- & 3B-gaps		3B-gaps	
	t(s)	t(s)	H	t(s)	H	t(s)	H	t(s)	H
cyclohexane	13.10	11.27	8	11.26	8	13.28	3	13.23	3
d1	10.30	7.63	9	6.04	5	7.64	9	6.06	5
dhingra	8.17	7.85	1	7.87	1	7.80	1	7.86	1
ext-penta	87.76	32.34	92	32.15	92	32.30	92	32.23	92
ext-penta0	4.36	2.70	31	2.68	31	2.67	31	2.70	31
ext-penta1	6.66	2.85	3	2.86	3	2.89	3	2.89	3
ext-penta2	21.90	11.09	31	11.08	31	11.23	31	11.03	31
filter1	291.04	259.82	7	259.76	7	259.88	7	259.54	7
i4	38.54	33.47	1023	33.34	1023	33.74	1023	33.39	1023
minass	8.27	7.21	4	7.25	4	7.26	4	7.21	4
octohedron0	20.12	16.77	2	16.79	2	16.85	2	16.76	2
octohedron1	20.10	16.84	2	16.76	2	16.81	2	16.76	2
octohedron2	61.53	40.35	1	40.29	1	40.37	1	40.44	1
pentagon	4.41	3.08	6	3.09	6	3.07	6	3.15	6
pentagone0	0.03	0.01	1	0.01	1	0.01	1	0.01	1
pentagone1	0.11	0.04	1	0.04	1	0.04	1	0.04	1
pentagone2	0.19	0.11	8	0.11	8	0.10	8	0.11	8
ponts0	0.11	0.11	0	0.12	0	0.11	0	0.10	0
ponts1	5.90	5.23	7	5.27	7	5.26	7	5.23	7
ponts2	31.86	23.67	33	25.54	37	23.70	33	25.72	37
pontsall	51.26	35.57	39	39.32	49	35.47	39	39.27	49
robot2D	7.08	6.46	4	6.47	4	6.48	4	6.43	4
seyfertfilter	290.62	259.97	7	260.28	7	260.37	7	260.48	7

TAB. 8.5 – Experimental results for 3B-consistency with Hansen's criterion for eliminating small gaps. The results were obtained using RR, LW and B1G. t is the execution time in seconds ("-" stands for more than 1 hour), B is the total number of boxes generated by the splitting process and H is the number of splits inside a gap. The column ratio introduces the reduction percent in terms of CPU time (t) and total number of branching (B)

Bibliographie

[AH83] G. Alefeld and J. Hertzberger. *Introduction to Interval Computation*. Academic Press, New York, 1983.

[BC94] N. Beldiceanu and E. Contjean. Introducing global constraints in chip. *Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 12 :97–123, 1994.

[BGGP99] F. Benhamou, F. Goualard, L. Granvilliers, and J.F. Puget. Revising hull and box consistency. In *International Conference on Logic Programming*, pages 230–244, 1999.

[Blu53] L.M. Blumenthal. *Theory and Application of Distance Geometry*. Oxford University Press, 1953.

[BMB01] L. Bordeaux, E. Monfroy, and F. Benhamou. Improved bounds on the complexity of kb-consistency. In Morgan Kaufmann, editor, *Proceeding of IJCAI'2001*, pages 303–308, 2001.

[BMB02] L. Bordeaux, E. Monfroy, and F. Benhamou. Raisonnement sur les propriétés de contraintes numériques. In M. Rueher, editor, *Programmation en logique par contrainte*, pages 13–26. JFPLC'02, Hermès Science publications, 2002.

[BMV94] F. Benhamou, D. McAllister, and P. Van Hentenryck. CLP(intervals) revisited. In Maurice Bruynooghe, editor, *Proceedings of the 1994 International Symposium*, pages 124–138. MIT Press, 1994.

[BNT98] C. Bliek, B. Neveu, and G. Trombettoni. Using graph decomposition for solving continuous csps. In M. Maher and J-F. Puget, editors, *Proc. of CP'98 : 4th International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming"*, LNCS 1520, pages 102–116, Pisa, Italy, November 1998. Springer Verlag.

[BO97] F. Benhamou and W. Older. Applying interval arithmetic to real, integer and Boolean constraints. *Journal of Logic Programming*, 32(1) :1–24, 1997.

[BP97] H. Brönninmann and S. Pion. Exact rounding for geometric constructions. In *Proc. of International symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics(SCAN)*, 1997.

[BR75] J.R. Bitner and E.M. Reingold. Backtrack programming techniques. *Commun. ACM*, 18(11) :651–656, 1975.

[Buc65] B. Buchberger. *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*. PhD thesis, Université d'Innsbruck, Autriche, 1965.

[Buc85] B. Buchberger. Gröbner bases : an algorithmic method in polynomial ideal theory. In N.K. Bose, editor, *Recent trends in multidimensional system theory*. Reidel publ. comp., 1985.

[CDR98] H. Collavizza, F. Delobel, and M. Rueher. A note on partial consistencies over continuous domains. In M. Maher and J-F. Puget, editors, *Proc. of CP'98 : 4th International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming"*, LNCS 1520, pages 147–162, Pisa, Italy, November 1998. Springer Verlag.

[CDR99a] H. Collavizza, F. Delobel, and M. Rueher. Comparing partial consistencies. *Journal of Reliable Computing*, 5 :213–228, 1999.

[CDR99b] H. Collavizza, F. Delobel, and M. Rueher. Extending consistent domains of numeric csp. In *Proc of IJCAI'99 : 16th International joint conference on artificial intelligence*, volume 1, pages 406–411, Stockholm, Sweden, August 1999.

[Ceb03] M. Ceberio. *Contribution à l'étude des CSPs numériques sous et sur-contraints. Outils symboliques et contraintes flexibles continues.* PhD thesis, Université de Nantes, 2003.

[CH88] G.M. Crippen and T.F Havel. *Distance geometry and molecular conformation.* John Wiley and sons, 1988.

[Coo89] M.C. Cooper. An optimal k-consistency algorithm. *Artificial Intelligence*, 41(1) :89–95, 1989.

[DAK00] A.K. Dhingra, A.N. Almadi, and D. Kohli. A gröbner-sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 122 :431–438, December 2000.

[Dec86] R. Dechter. Learning while searching in constraint-satisfaction-problems. In *AAAI*, pages 178–185, 1986.

[Dec90] R. Dechter. Enhancement schemes for constraint processing : Backjumping, learning, and cutset decomposition. *Artif. Intell.*, 41(3) :273–312, 1990.

[Dec92] R. Dechter. From local to global consistency. *Artif. Intell.*, 55(1) :87–108, 1992.

[DH02] Z. Drezner and H. Hamacher, editors. *Facility Location : Applications and Theory.* Springer Verlag, 2002.

[Die98] P. Dietmaier. The stewart-gough platform of general geometry can have 40 real postures. In J. Lenarcic and M.L. Husty, editors, *Advances in Robot Kinematics : Analysis and Control*, pages 7–16. Kluwer Academic Publisher, 1998.

[DM89] R. Dechter and I. Meiri. Experimental evaluation of preprocessing techniques in constraint satisfaction problems. In *IJCAI*, pages 271–277, 1989.

[DSPEG01] L. Doherty, K. S.J. Pister, and L. El Ghaoui. Convex position estimation in wireless sensor networks. In *Proc. of the IEEE Infocom*, pages 1655–1663, Alaska, April 2001. IEEE.

[EM96] I.Z. Emiris and B. Mourrain. Polynomial system solving : the case of a six-atom molecule. Technical Report RR-3075, 1996.

[Fau99] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f_4). *Journal of Pure and Applied Algebra*, 139(1-3) :61–88, 1999.

[Fre78] E.C. Freuder. Synthesizing constraint expressions. *Communication of the ACM*, 21(11) :958–966, Nov. 1978.

[Fre88] E.C. Freuder. Backtrack-free and backtrack-bounded search. pages 343–369, 1988.

[Gas77] J. Gaschnig. A general backtrack algorithm that eliminates most redundant tests. In *IJCAI*, page 457, 1977.

[GB65] S.W. Golomb and L.D. Baumert. Backtrack programming. *Journal of ACM*, 12(4) :516–524, 1965.

[Gra03] L. Granvilliers. Realpaver : Solving non linear constraints by interval computations. User's manual, July 2003. http ://www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/granvil/realpaver.

[GSR92] C. Gosselin, J. Sefrioui, and M. J. Richard. Polynomial solutions to the direct kinematic problem of planar three degree of freedom parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 27(2) :107–119, 1992.

[Han92] E.R. Hansen. *Global optimization using interval analysis*. Marcel Deckler, 1992.

[HE80] R.M. Haralick and G.L. Elliott. Increasing tree search eciency for constraint satisfaction problems. *Artificial Intelligence*, 14 :263–313, 1980.

[Heu03] M. Heusch. distn : An euclidean distance global constraint. In F. Rossi, editor, *Proc. of CP'03 : 9th International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming")*, LNCS 2833, pages 975–975. Springer Verlag, September 2003.

[HG83] E. Hansen and R. Greenberg. An interval newton method. *Applied Mathematics and Computations*, 12 :89–98, 1983.

[Hyv92] E. Hyvönen. Constraint reasoning based on interval arithmetic : the tolerance propagation approach. *Artificial Intelligence*, 58(1) :71–112, December 1992.

[ILO02] ILOG. *Solver Reference manual http ://www.ilog.com/product/jsolver.* 2002.

[Jég91] P. Jégou. *Contribution à l'étude des problèmes de satisfaction de contraintes : algorithmes de propagation et de résolution ; propagation de contraintes dans les réseaux dynamiques.* PhD thesis, CRIM, USTL, Université de Montpellier, 1991.

[JKDW01] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis.* Springer, 2001.

[JL98] Narendra Jussien and Olivier Lhomme. Dynamic domain splitting for numeric CSPs. In *European Conference on Artificial Intelligence*, pages 224–228, 1998.

[JNT02] C. Jermann, B. Neveu, and G. Trombettoni. A new structural rigidity for geometric constraints systems. In *Proc. of Fourth International Workshop on Automated Deduction in Geometry(ADG'02)*, Linz, Austria, 2002.

[JNT03] C. Jermann, B. Neveu, and G. Trombettoni. Inter-block backtracking : Exploiting the structure in continuous csps. In *2nd International Workshop on Global Constrained Optimization and Constraint Satisfaction COCOS'03*, Lausanne, Switzerland, 2003.

[JTNR00] C. Jermann, G. Trombettoni, B. Neveu, and M. Rueher. A constraint programming approach for solving rigid geometric systems. In *Proc. of CP'00 : Sixth International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming"*, LNCS 1894, pages 233–248, Singapore, September 2000. Springer Verlag.

[Kah68] W.M. Kahan. A more complete interval arithmetic. Technical report, University of Toronto, Canada, 1968.

[KB00] L. Krippahl and P. Barahona. Psico : Combining constraint programming and optimisation to solve macromolecular structures. In *Proc. of ERCIM/COMPULOG Workshop on Constraints*, Univ. of Padova, Italy, June 2000.

[KB03] L. Krippahl and P. Barahona. Propagating n-ary rigid-body constraints. In F. Rossi, editor, *Proc. of CP'03 : 9th International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming")*, LNCS 2833, pages 452–465. Springer Verlag, September 2003.

[Kea96] R.B. Kearfott. *Rigorous global search : continuous problems*. Kluwer, 1996.

[KL98] I. Kotsireas and I. Lazard. Central configurations of the 5-body problem with equal masses in three dimensional space. In *Proceedings of CASC*, 1998.

[Kum92] V. Kumar. Algorithms for constraint-satisfaction problems : A survey. *AI Magazine*, 13(1) :32–44, 1992.

[Laz92] D. Lazard. Stewart platforms and gröbner basis. In *Proceedings of Advances in Robotics Kinematics*, pages 136–142, Septembre 1992.

[LCR$^+$] Y. Lebbah, Michel C., M. Rueher, D. Daney, and J.P. Merlet. Efficient and safe global constraints for handling numerical constraint systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Accepted for publication.

[Leb99] Y. Lebbah. *Contribution à la résolution de contraintes par consistance forte*. Thès de doctorat, École des Mines de Nantes, 1999.

[Lho93] O. Lhomme. Consistency techniques for numerical csps. In *IJCAI-93*, pages 232–238, 1993.

[Lho94] O. Lhomme. *Contribution à la résolution de contraintes sur les réels par propagation d'intervalles*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994.

[LRM02] Y. Lebbah, M. Rueher, and C. Michel. A global filtering algorithm for handling systems of quadratic equations and inequations. In P. Van Hentenryck, editor, *Proc of CP'02 : 8th International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming"*, LNCS 2470, Cornell University, Ithaca, NY, USA, September 2002. Springer Verlag.

[Luc91] F.E.A. Lucas. *Récréations Mathématiques*, volume 1-4. Gautier-Villars, Paris, 1891. Réédité depuis par Blanchard, Paris, 1959.

[Mac77] A.K Macworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence*, pages 99–118, 1977.

[Mac87] A.K. Mackworth. Constraint satisfaction. In S.C. Shapiro, editor, *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, New York, 1987. Wiley.

[Mar00] M. Cs. Markót. An interval method to validate optimal solutions of the "packing circles in a unit square". *Problems, Central European Journal of Operational Research*, 8 :63–78, 2000.

[MC04] M. Cs. Markót and T. Csendes. A new verified optimization technique for the "packing circles in a unit square" problems. *SIAM*, 2004. (submitted).

[Mer03] J-P. Merlet. Solving the forward kinematics of gough-type parallel manipulator with interval analysis. *Research report INRIA 2003*, RR-4013, 2003.

[Mes89] P. Meseguer. Constraint satisfaction problems : An overview. *AI Commun.*, 2(1) :3–17, 1989.

[MLR03] C. Michel, Y. Lebbah, and M. Rueher. Safe embedding of the simplex algorithm in a csp framework. In *5th Int. Workshop on Integration of AI and OR techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimisation Problems CPAIOR 2003*, pages 210–220, Université de Montréal, 2003. CRT.

[Mon74] U. Montanari. Networks of constraints : Fundamental properties and applications to image processing. *Information science*, 7 :95–132, 1974.

[Moo66] R. Moore. *Interval analysis*. Prentice-Hall, 1966.

[Mou93] B. Mourrain. The 40 g̈enericp̈ositions of a parallel robot. In *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation(ISSAC)*, pages 173–182. ACM Press, 1993.

[Nad88] B. A. Nadel. Tree search and arc consistency in constraint satisfaction algorithms. pages 287–342, 1988.

[Neu90] A. Neumaier. *Interval Methods for Systems of Equations*, volume 37. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1990.

[OB93] W. Older and F. Benhamou. Programming in CLP(BNR). In *Position Papers for the First Workshop on Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 239–249, Newport, RI, USA, 1993.

[PRTT03] J.M. Porta, L. Ros, F. Thomas, and C Torras. A branch-and-prune algorithm for solving systems of distance constraints. In *IEEE Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan, Sept 2003.

[Pug98] Jean-François Puget. A fast algorithm for the bound consistency of alldiff constraints. In *AAAI '98/IAAI '98 : Proceedings of the fifteenth national/tenth conference on Artificial intelligence/Innovative applications of artificial intelligence*, pages 359–366, Menlo Park, CA, USA, 1998. American Association for Artificial Intelligence.

[Pur83] P.W. Jr. Purdom. Search rearrangement backtracking and polynomial average time. *Artif. Intell.*, 21(1-2) :117–133, 1983.

[PVH96] J.F. Puget and P. Van Hentenryck. A constraint satisfaction approach to a circuit design problem. Technical Report CS-96-34, 1996.

[PVH98] J.F. Puget and P.. Van Hentenryck. A constraint satisfaction approach to a circuit design problem. *Journal of Global Optimization*, 13 :75–93, 1998.

[Rat94] D. Ratz. Box-splitting strategies for the interval Gauss–Seidel step in a global optimization method. *Computing*, 53 :337–354, 1994.

[RCD90] F. Rossi, Petrie C.J., and V. Dhar. On the equivalence of constraint satisfaction problems. In *ECAI*, pages 550–556, 1990.

[Rég94] J-C. Régin. A filtering algorithm for constraints of difference in csps. In *AAAI '94 : Proceedings of the twelfth national conference on Artificial intelligence (vol. 1)*, pages 362–367, Menlo Park, CA, USA, 1994. American Association for Artificial Intelligence.

[Rég96] J-C. Régin. Generalized arc consistency for global cardinality. In *AAAI-96*, pages 209–215, 1996. Oregon.

[Rég99] J-C. Régin. The symetric alldiff constraint. In *IJCAI-99*, pages 420–425, 1999.

[RR00] J-C. Régin and M. Rueher. A global constraint combining sum and difference constraints. In *Proc. of CP'00 : Sixth International Conference on "Principles and Practice of Constraint Programming"*, LNCS 1894, pages 384–396, Singapore, September 2000. Springer Verlag.

[SCCG01] P.G. Szabó, T. Csendes, L.G. Casado, and I. García. Equal circles packing in a square i. - problem setting and bounds for optimal solutions. *Optimization Theory - Recent Developments from Matrahaza. Kluwer, Dordrecht*, pages 191–206, 2001.

[SF94] D. Sabin and E.C. Freuder. Contradicting conventional wisdom in constraint satisfaction. In A. Borning, editor, *Proc. of PPCP'94 : Second International Workshop on "Principles and Practice of Constraint Programming"*, LNCS 874, pages 10–20. Springer Verlag, 1994.

[Tra93] C. Traverso. The posso test suite examples, 1993. Available at http ://www.inria.fr/saga/POL/index.html.

[VHMK97] P. Van Hentenryck, D. McAllister, and D. Kapur. Solving polynomial systems using a branch and prune approach. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 34(2) :797–827, April 1997.

[Wal75] D. Waltz. Understanding line drawings of scenes with shadows. In Patrick Henry Winston, editor, *The Psychology of Computer Vision*. McGraw-Hill, New York, 1975. (D'abord publié dans un technical report du MIT en 1972).

Index