Une Procédure par Évaluation et Séparation basée sur une analyse Max-Plus du Flowshop.

Ch Lenté, J.C. Billaut et J.L. Bouquard
E3I, Université de Tours
37200 Tours
courriel : {lente,billaut,bouquard}@univ-tours.fr

Résumé

Un problème de flowshop peut être vu comme un problème matriciel dans l'algèbre Max-Plus. Une procédure par séparation et évaluation est construite, qui s'appuie sur l'associativité du produit matriciel. Cette procédure peut traiter une large gamme de problèmes de flowshop.

1 Introduction

Dans un ouvrage maintenant ancien, Bellman, Esogbue et Nabeshima présentaient de façon très détaillée les aspects mathématiques de certains problèmes d'ordonnancement, de type flowshop essentiellement. Ce document tente de s'inscrire dans la continuité de leurs travaux, en présentant, dans une algèbre non traditionnelle, une nouvelle étude de ces problèmes de type flowshop. L'algèbre choisie est $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\}, max, +)$, communément appelée algèbre Max-Plus [2].

2 Le Flowshop

Un problème de flowshop est composé de m machines et de n travaux, chaque travail se décomposant en une suite ordonnée de m opérations. L'ordre d'exécution des opérations est identique d'un travail à un autre, c'est une donnée du problème, autrement dit toutes les premières opérations des travaux nécessitent la même et unique machine M_1, toutes les deuxièmes opérations la même et unique machine M_2, etc. Une machine ne peut exécuter qu'une opération à la fois et une opération ne peut débuter qui si toutes les opérations du même travail qui la précèdent sont terminées. L'objectif est de minimiser la plus grande date d'achèvement des travaux, autrement appelée le C_{max}. Ce problème est NP difficile au sens fort dès qu'il comporte plus de 3 machines [1].

À tout travail x correspond une matrice Max-Plus triangulaire inférieure $T(x)$ et à toute séquence de travaux une autre matrice triangulaire inférieure égale au produit des matrices des travaux composants la séquence, dans leur ordre inverse d'apparition. Ainsi à la séquence $\sigma = abc$ est associée la matrice $T(\sigma) = T(c)T(b)T(a)$. Le C_{max} d'une séquence est donné par la plus grande composante de la matrice associée, il admet également une expression matricielle. Minimiser le C_{max} dans un problème de flowshop revient à trouver le meilleur ordre de multiplication des matrices associées [3].

3 Une procédure par séparation et Évaluation.

Une Procédure par Séparation et Évaluation (PSE) est une méthode exacte de résolution qui est souvent représentée sous forme arborescente. C'est une méthode essentiellement énumérative, mais qui tente d'effectuer une énumération par paquets.

Dans le cadre de problèmes de flowshop, un shéma de séparation souvent utilisé consiste à construire progressivement la séquence par le début ou/et par la fin. L'originalité principale de la PSE proposée ici réside dans le fait que l'on ne tente pas de fixer a priori la place d'un travail, mais uniquement de le positionner par rapport à un autre. Ce schéma de séparation est basé sur l'associativité du produit matriciel.

Supposons que l'on doive ordonnancer quatre travaux a, b, c et d et que l'ordonnancement optimal soit $\sigma = acdb$, ce qui correspond au produit $T(b)T(d)T(c)T(a)$. Un schéma de séparation classique conduit à mettre a en tête de séquence suivi de c, de d et enfin de b, cela correspond à effectuer le produit $(T(b)[T(d)\{T(c)T(a)\}])$. Mais ce même produit peut s'écrire $[(T(b)T(d)][T(c)T(a))]$, ce qui s'obtient en créant la séquence ac puis la séquence bd et finalement la séquence $(ac)(bd)$.

4 Conclusion

Le fait d'ajouter au problème de base de flowshop des contraintes additionnelles de décalage minimal inter-opérations, de temps de montage ou de batch ne remet pas en cause la modélisation matricielle. Dans le cadre du flowshop, l'approche max-Plus se révèle donc trés interressante car elle permet de manipuler de façon transparente un certain nombre de contraintes qui, dans une approche plus traditionnelle complexifient énormément les équations. La Procédure par Séparation et Évaluation qui en a été déduite est originale par son shéma de séparation et générique dans le sens où elle ne manipule pas explicitement les contraintes et qu'elle peut traiter tout autre contrainte acceptant la modélisation matricielle, comme des dates de début au plus tôt ou des durées de latence.

Références

[1] M.R. Garey, D.S. Johnson and R. Sethi, The complexity of flowshop and jobshop scheduling. *Math. Oper. Res*, vol. 1 : 117-129, 1976.

[2] J. Gunawardena, *Idempotency*. Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[3] C. Lenté, Analyse Max-Plus de problèmes d'ordonnancement de type Flowshop. *Thèse de Doctorat*, Université François Rabelais, Tours, Novembre 2001.