Géométrie algorithmique, examen M1, 3 avril 2007, énoncé

1 Échauffement

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points de la figure 1. Cet ensemble est repris (en double en cas de rature) en plus grand sur une feuille à part (à rendre). Quelques cercles ont étés tracés pour lever les ambiguïtés pour ceux qui n'aurait pas de compas.

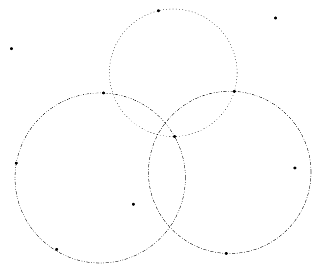


FIG. 1 –

2 XY-graphe

Étant donné un ensemble S de n points, on construit un graphe en reliant deux points si ils sont consécutifs à la fois en x et en y.

C'est à dire p_1p_2 est une arête du graphe si aucun point de S n'a une abscisse entre celles de p_1 et p_2 ET aucun point de S n'a une ordonnée entre celles de p_1 et p_2 (mais on n'a pas de condition sur l'ordre de p_1 et p_2).

2.1

Montrer que ce graphe est un sous graphe de la triangulation de Delaunay

2.2

Quel est le nombre maximal d'arêtes de ce graphe ? Donner un exemple où la borne est atteinte.

2.3

Quel est le nombre minimal d'arêtes de ce graphe ? Donner un exemple où la borne est atteinte.

3 Union d'ellipses

On a un ensemble de n ellipses dans le plan, et on va s'intéresser au bord de leur union, et en particulier au nombre de morceaux d'ellipses intervenant dans ce bord.

On supposera (ou on construira les exemples de telle sorte) que ce bord a une seule composante connexe.

3.1

Dessiner un exemple avec 5 ellipses où ce bord est composé de trois morceaux d'ellipses.

3.2

Dessiner un exemple avec 3 ellipses où ce bord est composé de 8 morceaux d'ellipses.

3.3

Étant donné n ellipses et un alphabet à n lettres, on va construire un mot sur cet alphabet de la façon suivante :
— On choisi un point de début sur un des morceaux d'ellipses
— On énumère les lettres associées dans l'ordre du bord.
(Rq : la dernière lettre est toujours la même que la première)

Donner les mots correspondants aux deux exemples précédents.

3.4

Montrer que le mot formé est une séquence de Davenport Schinzel d'ordre s pour un certain s que vous déterminerez.

3.5

Quelle est l'ordre de grandeur de la longueur maximale d'une telle séquence ? (vu en cours)

3.6

Quelle est la longueur maximale du bord de l'union de n ellipses ?

3.7

Dessiner deux exemple avec 4 ellipses où le bord est composé de 12 morceaux d'ellipses et qui ne soit pas "isomorphes" (pas le même mot, quelque soit la manière de choisir le début).

3.8

Question subsidiaire si tout le reste est fini : proposer un algorithme pour calculer un telle union, analyser sa complexité.

4 Arrangement de droites

Un jardinier cherche à faire 5 rangées de 4 arbres,

4.1

Quel est le nombre minimal d'arbres nécessaire ?

5 Droite ordinaire

On considère un ensemble S de $2n$ points, n points sur l'axe des x (c'est à dire avec $y = 0$) et n points dans le demi-plan avec $y > 0$. On appelle *droite ordinaire* une droite passant par exactement deux points de S (et pas plus ni moins). On cherche à trouver une droite ordinaire (figure 2).

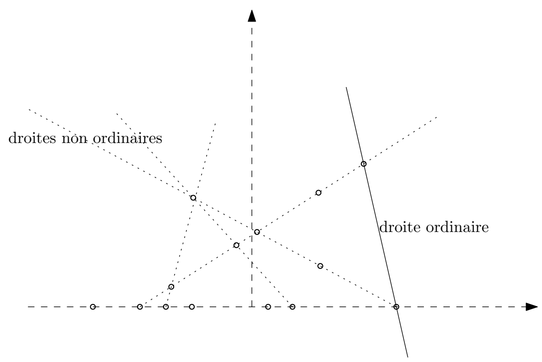


FIG. 2 –

5.1

Dessiner un exemple où il y a un point p de S tel que aucune droite passant par p n'est ordinaire.

5.2

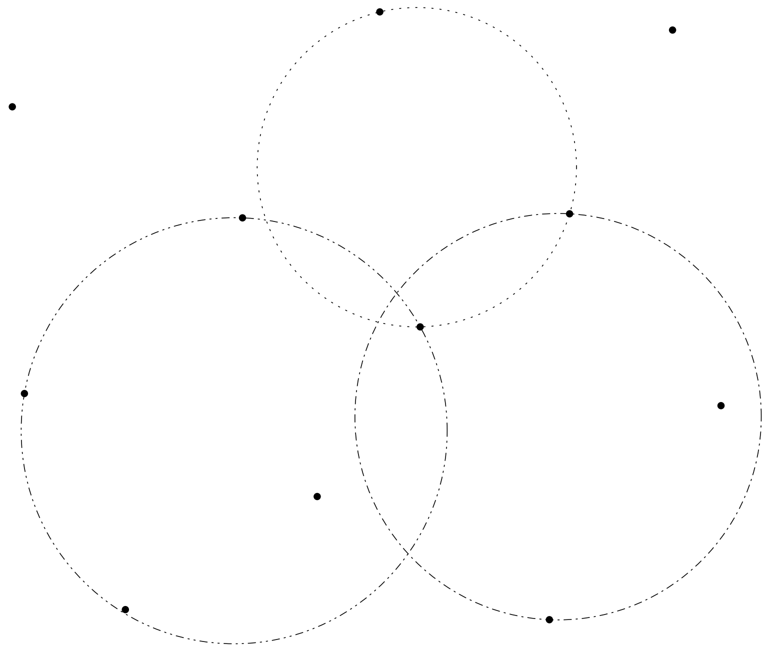
Si p est un point de S tel que $y_p > 0$ montrer qu'il y a au moins une droite ordinaire passant par p.

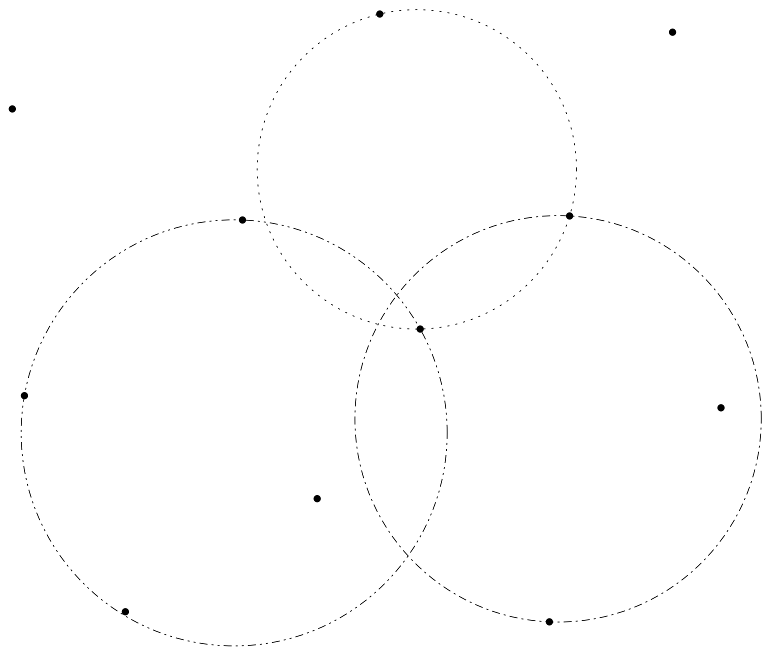
5.3

Donner un algorithme permettant de trouver cette droite ordinaire. Quelle est sa complexité ?

Examen Master STIC, géométrie algorithmique 2006-2007
Figure à compléter et à rendre

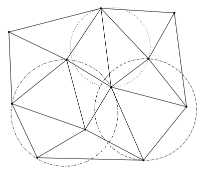
Nom :
Prénom :





Géométrie algorithmique, examen M1, 3 avril 2007, correction

1 Échauffement



2 XY-graphe

2.1

si p_1p_2 est une arête du graphe, la zone $[x_1, x_2] \times I\!R \cup I\!R \times [y_1, y_2]$ est vide. Cette zone contient le cercle circonscrit au rectangle $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, ce cercle est donc vide et l'arête est de Delaunay.

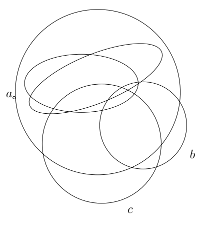
2.2

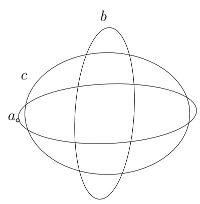
Clairement $n-1$, ce graphe est un sous graphe de la chaîne reliant les points après les avoir triés en x. L'exemple sera maximal si l'ordre en x est le même que l'ordre en y par exemple si $p_i = (i, i)$.

2.3

Zéro si il y a au moins 4 points. Par exemple $(0,1); (1,3); (2,0); (3,2)$. Il suffit de répéter cet exemple vers la droite pour avoir plus de points et de perturber un peu les points verticalement si on veut éviter les positions dégénérées avec des points alignés horizontalement.

3 Union d'ellipses





3.3

abca et *acbcacbca*

3.4

Deux ellipses se coupent en 4 points... DS d'ordre 4.

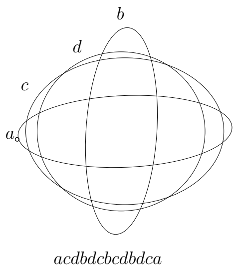
3.5

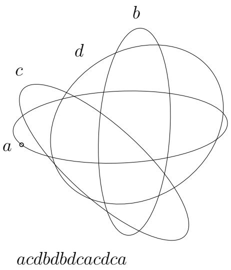
$O(n2^{\alpha(n)})$, presque linéaire !

3.6

juste 1 en moins puisque la première et dernière lettres correspondent en fait au même morceau.

3.7





acdbdcbcdbdca *acdbdbdcacdca*

3.8

En $O(n2^{\alpha(n)} \log n)$ par balayage par exemple.

4 Arrangement de droites

4.1

Nombre de sommets d'une arrangement de n droites : $n(n-1)/2$ soit 5 rangées non parallèles nous donnent 10 sommets (arbres). Introduire des dégénérescences fait diminuer le nombre de sommet par droite pour n donné.

5 Droite ordinaire

5.1

n points sur l'axe des x dont l'origine, n points sur l'axe des y en plus de l'origine, il n'y a pas de droite ordinaire passant par l'origine.

5.2

Si on prends les n droites par p et les points de l'axe des x, il y en a au moins une qui ne porte pas un des points restant puisqu'il n'y en a que $n-1$.

5.3

Trier les points autour de p et trouver l'angle où il n'y a qu'un seul point. Ça fait $O(n \log n)$. On peut faire $O(n)$ dans ce cas mais c'est un peu plus compliqué.