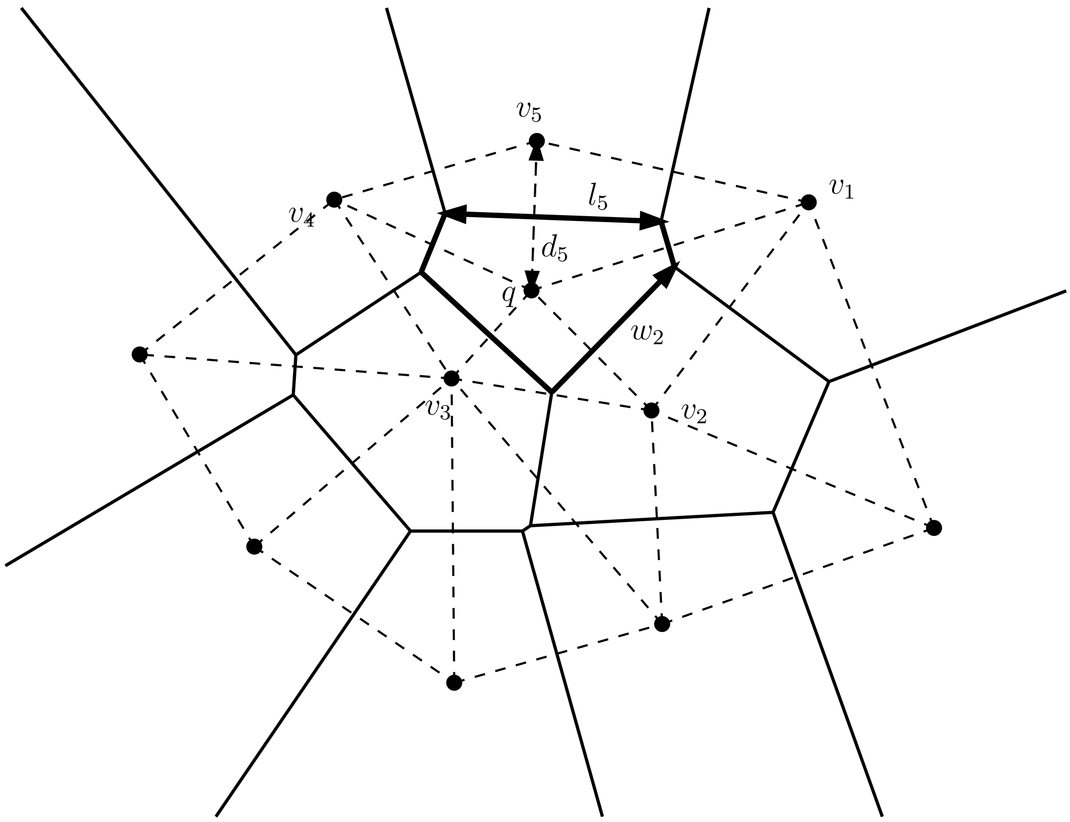
**Géométrie algorithmique, examen M1, 4 avril 2006, énoncé**

# 1 Voisins naturels




On considère un ensemble de points $\mathcal{S}$ et on regarde la diagramme de Voronoï de $\mathcal{S}$ et la triangulation de Delaunay duale.

Soit $q \in \mathcal{S}$, on appelle $v_1$, $v_2 \ldots v_{d_q}$ les voisins de $q$ dans la triangulation de Delaunay ($d_q$ est le degré de $q$).

On note $d_i = |qv_i|$ la longueur de l'arête de Delaunay $qv_i$ et $l_i$ la longueur de l'arête de Voronoï duale, on appelle $w_i$ le vecteur supporté par cette arête duale et tournant dans le sens direct autour de $q$..

— 1 — Quel est la valeur moyenne de $d_q$ si $q$ est choisi au hasard dans $\mathcal{S}$ ?

— 2 — Calculer le vecteur suivant :

$$\sum_{i=1}^{d_q} w_i$$

— 3 — Comparer les vecteurs $\frac{w_i}{l_i}$ et $\frac{qp_i}{d_i}$.

— 4 — On définit $\beta_i = \frac{l_i}{d_i}$ et on normalise ces coefficients en définissant $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{d_q} \beta_j}$.

Calculer le barycentre $g$ des $v_i$ avec les poids $\gamma_i$ : $g = \sum \gamma_i v_i$.

# 2 Voronoï de segments

— 1 —

Étant donné la droite $D$ d'équation $x = 0$ et le point $p$ de coordonnées $(3, 3)$, écrire l'équation du bissecteur de $p$ et $D$ (c'est à dire l'ensemble des points à la même distance de $p$ et $D$).

Quelle est la nature de ce bissecteur.

— 2 —

On ajoute un point $p'$ de coordonnées $(1, 2)$, décrire le diagramme de Voronoï de $D$, $p$ et $p'$ (c'est à dire découper le plan en région où le plus proche voisin parmi ces trois objets sera toujours le même).

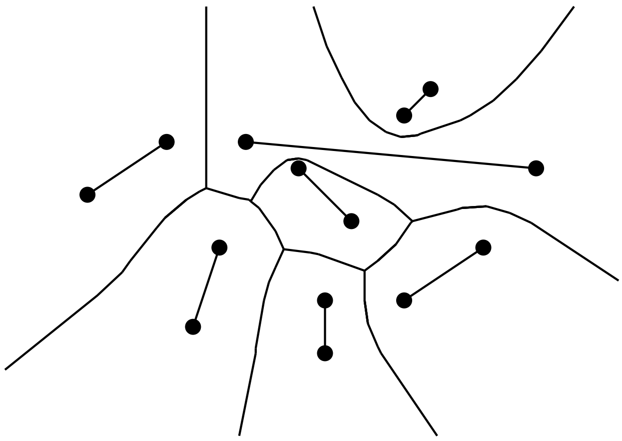
— 3 —

Soit $q = (0, -1)$ et $q' = (0, 4)$ deux points de $D$ Décrire maintenant le diagramme de Voronoï des deux segments $[pp']$ et $[qq']$, de combien de morceaux est-il formé.

Est-il possible de faire un exemple avec plus de morceaux ? moins de morceaux ?

— 4 —

On considère maintenant un ensemble $\mathcal{S}$ de $n$ segments et le diagramme de Voronoï de ces segments.



Montrer que la cellule de Voronoï d'un segment est simplement connexe (connexe et sans trou).

— 5 —

Si on ajoute un segment et que l'on met à jour le diagramme, quelle est la taille de la modification a apporter dans le cas le pire.

— 6 —

Même question si on suppose que le dernier segment ajouté est l'un des segments choisi au hasard dans l'ensemble des segments.

— 7 —

Conclure.

## 3 Cercles

On considère $n$ cercles tel que l'origine soit à l'intérieur de tous les cercles, tel que l'ensemble formé par le bord de tous les cercles soit connexe, tel que 3 cercles ne se coupent jamais en un même sommet et tel que 2 cercles ne soient jamais tangent.

— 1 — Dessiner un exemple avec 4 cercles, compter sur cet exemple le nombre de sommets, arêtes et cellules.

— 2 — Évaluer le nombre maximum de sommets, arêtes et cellules dans un arrangement de $n$ cercles. On pourra introduite $k_i$ le nombre de sommets sur le cercle $i$.

Dessiner un exemple maximal à 10 cercles.

— 3 — Est-il possible de dessiner un exemple avec 4 cercles conduisant à un nombre de sommets différent ? Si non justifier, si oui dessiner un exemple avec le maximum de sommets, le minimum de sommets.

— 4 — Évaluer le nombre minimum de sommets, arêtes et cellules dans un arrangement de $n$ cercles.

Dessiner un exemple minimal à 10 cercles.

**Géométrie algorithmique, examen M1, 4 avril 2006, correction**

# 1 Voisins naturels

— 1 — Classique du cours : $\frac{1}{n}\sum_q d_q = 6$.

— 2 — 0 évidemment.

— 3 — Ils sont unitaires et orthogonaux

— 4 — $0 = \sum_{i=1}^{d_q} w_i = \sum_{i=1}^{d_q} \frac{l_i}{d_i} qp_i$ en faisant tourner d'un quart de tour. Donc $0 = \sum_{i=1}^{d_q} \gamma_i qv_i$ donc $g = q$.

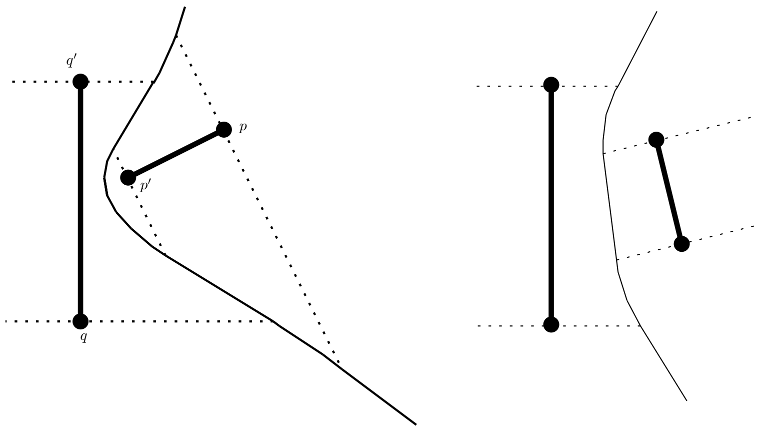
# 2 Voronoï de segments

— 1 — le point le plus proche sur $D$ de $(x, y)$ est $(0, y)$. L'équation du bissecteur est donc $x^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2$ soit $0 = y^2 - 6x - 6y + 18$. C'est la parabole de foyer $p$ et de directrice $D$.

— 2 —

On a deux demi paraboles, et une demi droite (faire un dessin).

— 3 —




7 morceaux, de haut en bas : médiatrice $pq'$, parabole foyer $q'$ directrice $pp'$, bissectrice, parabole foyer $p'$ directrice $qq'$, deuxième bissectrice, parabole foyer $q$ directrice $pp'$ et médiatrice $pq$.

On peut pas faire plus. On peut faire moins (voir dessin avec 5 morceaux).

— 4 —

Le segment qui relie un point de la cellule à son plus proche voisin sur le segment est entièrement inclus dans la cellule (sinon le point intermédiaire aurait un autre plus proche voisin mais cet autre voisin serait aussi plus proche de la première requête). Donc la cellule est connexe (par arc). Si un lacet est contenu dans la cellule, il peut dans un premier temps être projeté sur le segment puis contracté en un point.

— 5 —

La région du segment $s$ ajouté a $d_s$ régions voisines. La modification concernera $d_s$ bords de cellules chaque bord ayant au plus 7 morceaux. $d_s < n$ donc $O(n)$ dans le cas le pire.

— 6 —

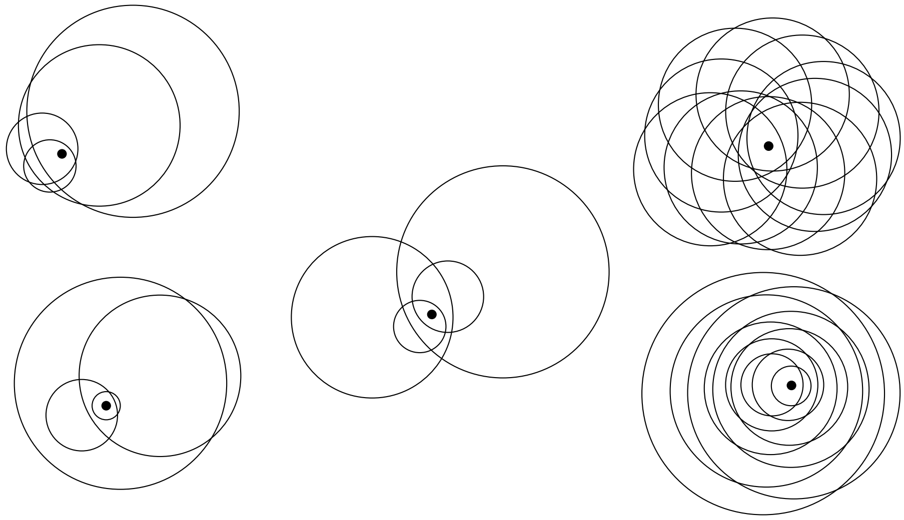
$d_s$ vaut 6 en moyenne comme d'habitude. Donc $O(1)$ en moyenne.

— 7 —

Un algo incrémental randomisé qui insère les segments dans un ordre aléatoire procédera donc à un nombre linéaire de modifications au cours des différentes insertions. Reste à savoir où se trouve le nouveau segment à insérer pour faire ces modifications au bon endroit. On arrive à faire des structures de localisation en $\log n$.

# 3 Cercles

— 1 — 3 —



En haut à gauche (le maximum) 14 cellules (avec la cellule infinie), 24 arêtes, 12 sommets. (Euler : 14-24+12=2).

Au milieu à gauche 10 cellules (avec la cellule infinie), 16 arêtes, 8 sommets. (Euler : 10-16+8=2).

En bas à gauche (le minimum) 8 cellules (avec la cellule infinie), 12 arêtes, 6 sommets. (Euler : 8-12+6=2).

— 2 —

Clairement $k_i \leq 2(n-1)$ (2 cercles se coupent en au plus 2 points).

Le nombre d'arêtes est $\sum k_i$.

Le nombre de sommets est $\frac{1}{2} \sum k_i$ car chaque sommet est partagé par 2 cercles.

Par Euler le nombre de cellules est $2 + \frac{1}{2} \sum k_i$ en comptant la cellule infini.

C'est bien vérifié à la question 1.

$$\sum k_i \leq 2n(n-1)$$

La borne sup peut être atteinte : ajouter toujours un cercle qui coupe tous les autres.

Dessin en haut à droite.

— 4 —

Puisque c'est connexe $k_i \geq 2$.

Si on regarde le graphe de connectivité des cercles, il doit être connexe, c'est donc au moins un arbre. Un arbre à $n$ nœuds à $n-1$ arêtes, il y a donc au moins $2(n-1)$ sommets.

$$4(n-1) \leq \sum k_i \leq 2n(n-1)$$

Dessin en bas à droite.