Géométrie algorithmique, master 1ère année

Olivier Devillers & Marc Pouget

26 avril 2005, 2h

$\boxed{\text{les trois exercices sont indépendants}}$ **Correction :**
corrigé

1 Triangulation

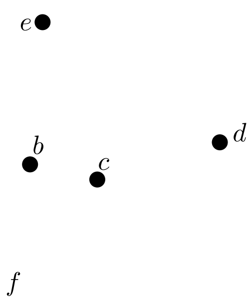
On considère un ensemble $\mathscr{S}$ de n points du plan en position générale (pas 3 points alignés, pas 4 points cocycliques).

Soit T_0, l'ensemble des triangles t formés par trois points de $\mathscr{S}$ tel que le cercle circonscrit à t ne contienne aucun point de $\mathscr{S}$.

Soit T_1, l'ensemble des triangles t formés par trois points de $\mathscr{S}$ tel que le cercle circonscrit à t contienne exactement un point de $\mathscr{S}$.

Étant donné $p \in \mathscr{S}$, on considère $T_{1,p} \subset T_1$ les triangles dont le cercle circonscrit contient p.

1. Énumerez les triangles de T_0 et de T_1 dans la figure suivante portant sur un ensemble de 6 points.



Correction : $T_0 = \{eab, ebc, ecd, fdc, fcb, fba\}$ $T_{1,a} = \{fbe,\}$ $T_{1,b} = \{eac, fca\}$ $T_{1,c} = \{ebd, fdb\}$ $T_{1,d} = \emptyset$ $T_{1,e} = \{abd, bcd\}$ $T_{1,f} = \emptyset$ $T_1 = \cup_{p\in\{a,b,c,d,e,f\}} T_{1,p}$

On considère maintenant le cas d'un ensemble $\mathscr{S}$ quelconque

2. Majorez en fonction de n le nombre de triangles de T_0.

   Correction : T_0 est l'ensemble des triangles de Delaunay, comme dans toutes triangulations le nombre de triangles est inférieur à $2n$.

3. Majorez le nombre de triangles de $T_{1,p}$ en fonction de n, donnez un exemple où ce nombre est le plus grand possible.

   Correction : $n-3$, exemple en «roue de charriot» avec p au milieu.

4. Pouvez vous donner une borne plus fine pour $T_{1,p}$ (en fonction d'autre chose que n). (On pourra considérer la suppression et l'insertion de p dans la triangulation de Delaunay de $\mathscr{S}$.)

   Correction : Si $t \in T_{1,p}$ c'est que t est de Delaunay pour l'ensemble $\mathscr{S} \setminus \{p\}$ et donc est détruit par l'insertion de p dans Delaunay. L'insertion de p crée $d^\circ(p)$ nouveaux triangles et détruit $d^\circ(p)-2$ triangles dans Delaunay. Donc $|T_{1,p}| = d^\circ(p) - 2$ (où $d^\circ(p)$ est le degré de p dans la triangulation de Delaunay de $\mathscr{S}$).

5. Majorez en fonction de n le nombre de triangles de T_1.

   Correction : $T_1 = \cup_{p\in\mathscr{S}} T_{1,p}$ $\quad |T_1| = \sum_{p\in\mathscr{S}} |T_{1,p}| = \sum_{p\in\mathscr{S}} d^\circ(p) - 2 \le 6n - 2n = 4n$

2 Enveloppe convexe

Cet exercice propose l'étude de l'algorithme QuickHull pour le calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble P de n points du plan :

Étape I Touver les 4 points extrémaux dans les directions haut, bas, gauche et droite.
Ces 4 points definissent un quadrilatère et 4 régions triangulaires à l'extérieur, voir figure 1.

Étape II Pour chacune des ces 4 régions triangulaires délimitées par 2 points a et b, et contenant un ensemble de points S, on applique la fonction récursive suivante :
fonction $QuickHullRecurse(a,b,S)$
Si $S = \{a,b\}$ alors return (a,b)
sinon
$c =$ le point de S le plus loin du segment $[a,b]$ dans la direction orthogonale à $[a,b]$ (voir figure 1), c'est à dire c est le point extrême dans cette direction.
$A =$ ensemble des points à droite de $[a,c)$
$B =$ ensemble des points à droite de $[c,b)$
return $QuickHullRecurse(a,c,A)$
concaténé avec $QuickHullRecurse(c,b,B)$

1. Quelle est la complexité de la recherche d'un point extrémal de P.

   Correction : C'est $O(n)$.

2. Notons $T(m)$ la complexité de l'appel de la fonction $QuickHullRecurse(a,b,S)$ pour un ensemble S de cardinal $|S| = m$. Notons $\alpha = |A|$ et $\beta = |B|$, on a la relation $\alpha + \beta \leq m - 1 = O(m)$ et pour cette analyse on peut simplifier en supposant $\alpha + \beta = m$.

   (a) Exprimer $T(m)$ en fonction de $T(\alpha)$ et $T(\beta)$.

   Correction : $T(m) = T(\alpha) + T(\beta) + O(m)$ puisque tester pour chaque point si il est dans A ou B se fait avec deux tests d'orientation.

   (b) Dans cette question, on se place dans le cas où l'ensemble des points est le mieux équilibré possible à chaque étape de la récursion : on a donc $\alpha = \beta = m/2$.
   Résoudre dans ce cas la récurrence 2a pour en déduire $T(m)$.

   Correction : $T(m) = m + 2T(\frac{m}{2} = O(m \log m)$ comme en cours.

   (c) Dans cette question, on étudie le cas où l'ensemble des points est le plus déquilibré possible à chaque étape de la récursion : on a donc $\alpha = 1$ et $\beta = m - 1$. Résoudre dans ce cas la récurrence 2a pour en déduire $T(m)$.

   Correction : $T(m) = m + T(m-1) = O(m^2)$ par recurence.

   (d) Dans cette question, on se place dans le cas où l'ensemble des points est équilibré et ou des points se trouvent dans le triangle abc. On va prendre $\alpha = \beta = m/3$ (et le nombre de points dans le triangle également de $m/3$).
   Résoudre dans ce cas la récurrence 2a pour en déduire $T(m)$.

   Correction : $T(m) = m + 2T(\frac{m}{3} = O(m)$ c'est une série géométrique.

3. Quelle est la complexité dans le cas le pire de l'algorithme QuickHull ?

   Correction : $O(n^2)$

4. Contruire une configuration générique de n points pour laquelle la complexité dans le cas le pire est atteinte. "Générique" signifie que cette configuration marche pour n arbitrairement grand.

Correction : Des points sur le cercle unité avec des angles $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{\pi}{2^{n-1}}$

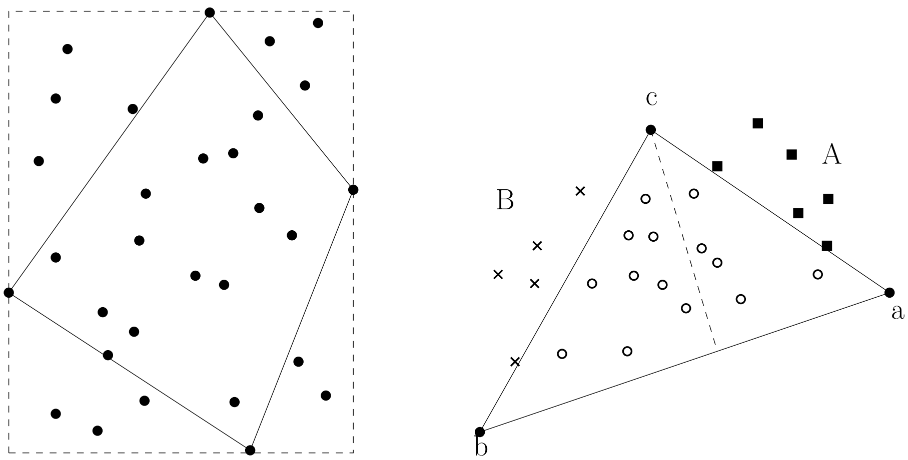
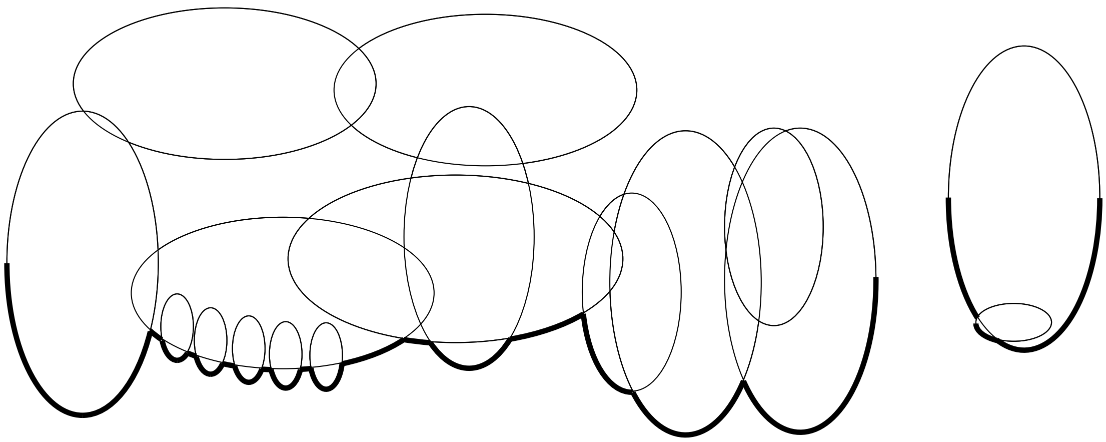


FIG. 1 – À droite : les 4 points extrémaux et les régions triangulaires. À gauche illustration de la fonction $QuickHullRecurse(a, b, S)$.

3 Enveloppe inférieure, arrangement

On considère un ensemble $\mathscr{E}$ de n ellipses dont la longueur du grand axe est le double de celui du petit axe et dont le grand axe est soit vertical soit horizontal comme dans l'exemple ci dessous.



On cherche à calculer l'enveloppe inférieure de l'ensemble des ellipses (en gras sur le dessin).

1. En combien de points peuvent se couper deux ellipses de $\mathscr{E}$? Dessiner un exemple.

   Correction : 4, comme n'importe quelle paire de coniques. Dans la figure, si on considère les deux ellipses de droite, on peut déplacer un peu la petite vers la droite pour qu'elle dépasse des deux cotés et obtenir l'enveloppe «grosse,petite,grosse,petite,grosse».

2. Qu'en conclure sur la taille de l'enveloppe inférieure ?

   Correction : Que c'est plus petit que $\lambda_4(n)$ longueur d'une séquence de Davenport Schinzel d'ordre 4, c'est à dire presque linéaire, mais quand même en théorie supra linéaire.

3. Si toutes les ellipses avaient leur grand axe vertical (pas d'ellipses d'horizontales), le résultat serait-il modifié ?

   Correction : Ben oui ! Il n'y a plus que deux points d'intersection pour deux ellipses (puisqu'à une affinité près c'est des cercles), on descend à $\lambda_2(n) = 2n-1$. C'est la même chose si on a que des horizontales et pas de verticales.

4. Est-il possible de tirer parti de la question précédente pour améliorer le résultat sur la complexité de l'enveloppe inférieure de $\mathscr{E}$.

   Correction : On découpe $\mathscr{E} = \mathscr{E}_v \cup \mathscr{E}_h$ en ellipses horizontales et verticales, les enveloppes inférieures de $\mathscr{E}_v$ et $\mathscr{E}_h$ sont donc linéaires. L'enveloppe finale est linéaire puisque le nombre de sommets des deux enveloppes est linéaire et qu'entre deux tels sommets on introduit au plus 4 nouveaux sommets.

5. Pouvez-vous suggérer brièvement un algorithme pour calculer cette enveloppe inférieure et donner sa complexité ?

   Correction : On sépare les horizontales et les verticales en $O(n)$, on fait l'enveloppe de chaque (division + fusion par balayage vu en cours) en $O(n \log n)$ fusion finale des deux enveloppes en $O(n)$ par balayage.